Alexander Ziwet

HÖHERE ANALYSIS
FÜR INGENIEURE

VON

Dr. JOHN PERRY F. R. S.

PROFESSOR DER MECHANIK UND MATHEMATIK AM ROYAL COLLEGE OF SCIENCE ZU LONDON

AUTORISIERTE DEUTSCHE BEARBEITUNG VON

Dr. ROBERT FRICKE UND **FRITZ SÜCHTING**

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

OBERINGENIEUR DES STÄDTISCHEN ELEKTRIZITÄTSWERKES MINDEN IN WESTF.

MIT 106 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

BG

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1902

Vorwort.

Indem die Unterzeichneten eine deutsche Bearbeitung von John Perry's Buche *„The Calculus for Engineers"* den lernenden und lehrenden Technikern Deutschlands vorlegen, vollenden sie einen Plan, welcher sie mehrere Jahre hindurch beschäftigt hat. Es reicht nämlich die Idee der Verdeutschung dieses Buches zurück in die Jahre, als im lebhaften Austausche der Meinungen die Fragen der Organisation des mathematischen Hochschulunterrichtes zwischen den beteiligten Kreisen diskutiert wurden. Wenn es damals nicht immer leicht war, zum *inneren* Ausgleich der Meinungen zu gelangen, so ist *ein* Grund hierfür oft genannt. Wir Deutsche waren eben nicht so glücklich, wie z. B. unsere Nachbarn im Westen, führende Geister zu besitzen, welche *zugleich* im Lager der Techniker, wie in dem der Mathematiker die Anerkennung besafsen. Sie hätten uns vermöge ihrer Erfahrung und Einsicht sogleich den richtigen Weg gewiesen. So aber waren bei uns die Wissenschaft der Technik und diejenige der Mathematik jede gesondert von der anderen gewachsen und grofs geworden; und als ihre nahe Beziehung und die Zeitverhältnisse einmal zu einer Aussprache trieben, da konnte es nicht fehlen, dafs jede mit dem stolzen Bewufstsein ihrer Kraft und Gröfse ihr Wort führte, dafs sie aber leider das Verfehlen des gemeinsamen Weges mit dem Verlust des Gemeinschaftsgefühles büfsen mufsten.

Alle, welche an jener Periode der Aussprachen Interesse genommen haben, werden die Überzeugung gewonnen haben, dafs in letzterer Beziehung die Schaffung des Wandels höchst erwünscht wäre, und dafs insbesondere die Lehrorganisation der technischen Hochschulen von den Folgen widersprechender Meinungen befreit werden müsse. Da hat es erstlich, was wir hier nur nebenher erwähnen, nicht an ganz Radikalen gefehlt, welche darauf hinzielten, die *höhere Mathematik* überhaupt von den Hochschulen zu verbannen; doch haben diese im Verein deutscher Ingenieure unmittelbar ihre gerechte Zurückweisung erfahren. Vor allem aber wurden zahlreiche Stimmen laut, welche den üblichen mathematischen Hochschulunterricht nicht frei hielten von bedenklichen Schäden. Es wurden Umwandlungen

der Lehrmethode und der Stoffauswahl in den mathematischen Vorlesungen gefordert, welche dem vornehmlichsten Zwecke unserer Hochschulen, der *Bildung der für die grofse industrielle Praxis alljährlich nötigen Ingenieure,* mehr dienlich sein sollten als bisher. Es ist ferner nicht nur aus dem Lager der Mathematiker, sondern auch namentlich von den führenden Ingenieurkreisen wiederholt die Forderung betont, die Mathematik müsse als *Wissenschaft* im Organismus der Hochschule noch ganz anders als bisher zur Geltung kommen.

Die Bemühungen der Unterzeichneten haben sich nun zunächst der ersteren Frage zugewandt, nämlich der Sorge um die Ausbildung der weitaus überwiegenden Zahl studierender Techniker, welche nach Absolvierung ihrer Studien für den Eintritt in die *Praxis* wohl vorbereitet sein wollen. Für diese Studierenden haben die Vorlesungen über höhere Mathematik lediglich den Zweck, *als Vorbereitung zu dienen für das Verständnis der weiter folgenden technischen Vorlesungen,* in erster Linie derjenigen über technische Mechanik, dann aber auch über Dampfmaschinentheorie, Elektrotechnik, Brückenbau u. s. w. Dafs der Lehrer der höheren Mathematik in den diesem Zwecke dienenden Vorlesungen seinen Zuhörern jede mögliche Erleichterung der Auffassung zukommen lassen wird, ist eigentlich selbstverständlich. Er wird sich auf das Notwendige beschränken, der abstrakten Formulierung seiner Sätze, wo es irgend angeht, zu Gunsten einer geometrisch anschaulichen Darstellung entsagen, sowie überhaupt seinem Gegenstande die elementarste Seite abzugewinnen suchen, welche mit dem wissenschaftlichen Charakter desselben noch vereinbar ist. Der Lebensnerv des Dozenten hängt viel zu sehr am Lehrerfolge, als dafs eine Abweichung von jener Richtschnur eine häufiger hervortretende Erscheinung werden könnte.

Aber es wurde die Forderung laut: „Das sei nicht einmal genug, *der Mathematiker solle seine Beispiele dem Ideenkreise des Technikers entnehmen und an diesen seine mathematischen Überlegungen einführen.*“ Einiges läfst sich ja in dieser Hinsicht leicht erreichen. Bei den Grundbegriffen „Variabele“, „Funktion“, „Differentialquotient“ wird man an mechanische oder sonstige physikalische Vorgänge anknüpfen, bei den Anwendungen der Differentialrechnung auf die Kurvengeometrie wird man bei der Kurvenerzeugung solche Mechanismen gern bevorzugen, welche den künftigen Maschinenbauer interessieren, in der Integralrechnung wird man vom statischen Moment und vom Trägheitsmoment handeln u. s. w. Man wird ferner, wo es angeht, kinematische Modelle, Integraphen, Planimeter u. s. w. in der Vorlesung demonstrieren, um die unmittelbare Umsetzung mathe-

matischer Vorstellungen in mechanisch greifbare Wirklichkeit darzuthun.

Aber auch so bleibt noch gar zu leicht eine, wie wir glauben, tiefgehende Lücke zwischen der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung und der nächst benachbarten Vorlesung über technische Mechanik. Und mancher Studierende, der vielleicht noch mit Mühe der mathematischen Vorlesungen Herr geworden war, konnte die Kluft nicht mehr recht überwinden und war seinem eigentlichen Studienziele durch die mathematischen Vorlesungen mehr entfremdet als zugeführt.

Wir glauben, daſs hier der eigentliche Grund der eingangs erwähnten Miſsstimmung zwischen den Technikern und den Mathematikern zu suchen ist. Wir sind nicht im Zweifel, daſs dieser Grund ein gerechter ist, und daſs alles aufgeboten werden muſs, um Abhilfe zu schaffen.

Die wahre Lösung kann natürlich nur in der Aufhebung jener Entfremdung zwischen der technischen und der mathematischen Wissenschaft liegen, von der wir schon anfangs sprachen. Über die Art, wie man dieses Ziel anstreben könnte, mögen uns am Schlusse noch ein paar Andeutungen gestattet sein. Dieselben betreffen die Fragen der wissenschaftlichen Weiterentwicklung der technischen Hochschulen; wir dürfen in dieser Hinsicht erst von der Zukunft Früchte und Erfolge erhoffen, für das augenblickliche Lehrbedürfnis an den Hochschulen sind uns einstweilen andere Bahnen gewiesen. Da liegt es näher, den schon eingeschlagenen Weg des Entgegenkommens zunächst noch weiter zu verfolgen und die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung noch weit mehr auszukleiden mit Beispielen aus dem Interessenkreise des angehenden Technikers. Manche Bitte um Beihilfe wird in dieser Hinsicht seitens der Mathematiklehrer an ihre technischen Kollegen gerichtet sein. Aber wir glauben mit der Meinung nicht fehl zu gehen, daſs die Ausbeute in dieser Hinsicht doch eine recht magere geblieben ist.

Hier ist nun die Stelle, wo unser lebhaftes Interesse an Perry's Werke *„The Calculus for Engineers“* eingesetzt hat. Es kommt hierbei nur nebensächlich in Betracht, daſs Perry, selber Techniker, sich die richtige Würdigung der höheren Mathematik als einer *„grundlegenden Hilfswissenschaft“* der Technik bewahrt hat, und daſs er in dieser Hinsicht manches goldene Wort zur Beherzigung für den angehenden Techniker in seinem Buche ausspricht. Auch darauf würde nicht das Hauptgewicht zu legen sein, daſs Perry in der That eine bewunderungswürdige Lehrgabe besitzt und seine Gegenstände

in anregender Frische selbst solchen Lesern oder Zuhörern mundgerecht zu machen weiſs, welche sonst vielleicht mathematischen Überlegungen wenig geneigt sind. Ist es ihm doch sogar mit groſsem Erfolge gelungen, in Abendvorlesungen, die für Arbeiter bestimmt sind, mathematische Gegenstände zu behandeln, die durchaus über die Elemente hinausgreifen*). Das Ausschlaggebende war vielmehr für uns die überreiche Anzahl von Beispielen, die dem Gesichtskreise des Technikers entnommen sind, die Methode, überall vom konkreten Beispiele aus den mathematischen Gedanken entstehen zu lassen, die innige Durchdringung der mathematischen Überlegung mit ihrer Verwertung bei der Behandlung technischer Probleme. Wir brauchen an dieser Stelle dem Buche selber nicht vorzugreifen. Schon beim Durchblättern wird der Bauingenieur, der Elektrotechniker, der Maschinenbauer zahlreiche Stellen finden, bei denen sein Interesse mit demjenigen des Mathematikers Hand in Hand geht. So glaubten wir in Perrys Buch die Ausfüllung der Lücke gefunden zu haben, welche die mathematischen Vorlesungen an den Hochschulen zu isolieren drohte!

Wir wollen damit nicht sagen, daſs in unserem Buche jener Königsweg gefunden sei, welcher das Erlernen der Differential- und Integralrechnung ohne jede Anstrengung gestattet. Wir meinen überhaupt nicht, daſs nun Perrys Weg für die mathematischen Vorlesungen an unseren Hochschulen ein für alle Mal und ausschlieſslich vorbildlich sein soll. Sind es doch Perrys eigene Worte, daſs sein Buch die strengeren Darstellungen der höheren Analysis keineswegs überflüssig machen solle. Auch hier dürfte wieder die *goldene Mittelstraſse* die richtige sein: *Unsere mathematischen Vorlesungen mögen sich, ohne ihren wissenschaftlichen Grundcharakter dranzugeben, dem Standpunkte und der Methode Perrys thunlichst weit annähern.* Der Studierende aber wird im Anschluſs an die mathematischen Vorlesungen, vielleicht auch als Vorbereitung zu denselben, durch das ausführliche Studium von Perrys Werke die wesentlichste Förderung gewinnen; denn das ist uns, wie schon bemerkt, nicht zweifelhaft, daſs er in diesem Buche das beste Bindeglied findet, um seine erworbenen mathematischen Kenntnisse nutzbringend in den späteren Vorlesungen zu verwerten.

Allerdings muſs zugestanden werden, daſs durchaus nicht alle Teile von Perrys Buche für die Studierenden der ersten Semester

*) *Practical Mathematics,* Summary of six lectures delivered to working men by Professor John Perry, London 1899 (printed by Wyman and Sons, London).

gleichmäfsig verständlich sind. Der Leser wird je nach dem Stande seiner Kenntnisse Auswahl treffen müssen, und speziell der Anfänger wird manche Entwicklungen über Wechselströme, Thermodynamik, Balkenbiegung u. s. w. als ihm noch zu fremd bei Seite lassen. Aber gerade diese Entwicklungen machen das vorliegende Buch *für den älteren Studenten, ja auch für den bereits in der Praxis stehenden Ingenieur* höchst wertvoll. Gar zu leicht pflegen ja die beim Vorexamen vorhandenen mathematischen Kenntnisse sich schnell zu dezimieren. Solchen Lesern wird, wenn sie später der Mathematik bedürfen, Perry wie gerufen kommen; denn er *redet ihre Sprache* und vermittelt ihnen innerhalb des Gesichtskreises ihrer Interessen die mathematischen Hilfsmittel, ohne die sie nicht auskommen können.

Dafs in unserem Buche die volle Strenge in den mathematischen Begriffsbildungen und Deduktionen keineswegs beabsichtigt war, wollen wir doch noch ausdrücklich für solche Kritiker aussprechen, welche geneigt sind, auf diese Strenge immer und unter allen Umständen das Hauptgewicht zu legen. Einige Stellen, welche von Bedenken nicht frei waren, haben wir bei unserer Bearbeitung ändern dürfen, wozu uns der Herr Verfasser in sehr dankenswerter Weise die Erlaubnis erteilte. Einen weitgehenden Gebrauch aber haben wir von dieser Erlaubnis *nicht* zu machen gewagt. So bleibt denn auch in der nachfolgenden Darstellung manche Stelle bestehen, bei welcher die strenge mathematische Überlegung vielleicht erst in längerer abstrakter Betrachtung den Boden sichern und ebnen könnte, über die jedoch unser Buch mit naiver, aber deshalb um so frischer wirkender Sorglosigkeit hinweggeht. Wir halten das in einem für Ingenieure bestimmten Buche, ja selbst hie und da auch bei Vorlesungen an technischen Hochschulen für unbedenklich. Aber freilich gilt dabei als selbstverständliche Voraussetzung, dafs der Vortragende selbst mit vollem Bewufstsein gelegentlich den unstrengen Weg geht, und dafs er seine Aussagen für sich selber jederzeit in strenger Überlegung zu kontrolieren imstande ist. Dieser Forderung entspricht der anerkannte Grundsatz, dafs die mathematischen Vorlesungen an den technischen Hochschulen in die Hand eines geschulten Mathematikers gehören und nur dann einem Techniker übertragen werden dürfen, wenn derselbe zugleich ein geschulter Mathematiker ist.

Dafs letzteres bei uns in Deutschland mit der Zeit erreichbar sei, haben wir schon oben als wünschenswert hingestellt. Möchte sich in Deutschland die technische Hochschule zu einer wahren „Universitas“ der Technik entwickeln, indem sie alle Wissenszweige, die ihrem inneren Charakter nach ihr angehören, in ihrem Organismus

zur Entfaltung bringt. Dahin gehört die Mechanik nicht nur in dem Umfange, wie sie gegenwärtig der grofsen Menge der Studierenden übermittelt wird, sondern in allen Teilen ihrer reichen Gliederung und in ihrer höchst interessanten geschichtlichen Entwicklung. Dahin gehören aber auch alle jene Disziplinen der höheren Mathematik, welche mit der Mechanik verwandt sind. So darf die mathematische Wissenschaft nicht nur an unseren Universitäten, wo sie in hoher Blüte steht, sondern auch an den technischen Hochschulen ihr Bürgerrecht verlangen. Möchte es dahin kommen, dafs die Mathematik auch an den technischen Hochschulen nicht immer nur unter dem Gesichtspunkte des Utilitarismus, dieses Totfeindes aller freien Wissenschaft, betrachtet werde. Möchten unsere Hochschulen die Worte Walther Thomson's beherzigen, die uns Perry in dem Satze vermittelt, **„that there is no useful mathematical weapon, which an engineer may not learn to use“.**

Die Herausgeber.

Inhaltsverzeichnis.

Höhere Analysis für Ingenieure.

Einleitung.

1. Der Ingenieur hat gewöhnlich keine Zeit für eine weitgehende mathematische Ausbildung — was sehr zu bedauern ist — und diejenigen jungen Ingenieure, welche eine solche Ausbildung genossen haben, können in ihrem Berufe aus ihren mathematischen Kenntnissen nicht immer Nutzen ziehen. Solche Leute werden, so hoffe ich, das vorliegende Buch brauchbar finden; nur dürfen sie nicht dem Vorurteil anheim fallen, daſs sie bei dem elementaren Charakter des Buches bereits alles zu wissen vermeinen, was dasselbe zu lehren imstande ist.

Übrigens schreibe ich in erster Linie für solche Leser, welche nur eine geringe mathematische Schulung besitzen, die jedoch bereit sind tüchtig zu arbeiten, um zu lernen, wie die höhere Analysis bei den Problemen der Technik zur Verwendung kommt. Ich bin der Meinung, daſs ein guter Techniker nur die Prinzipien der höheren Analysis zu kennen braucht, diese aber sollte er in der That sehr gut kennen.

2. Es wird angenommen, daſs der Leser die Elemente der Mechanik kennt; ebenso muſs er, falls er die elektrischen Aufgaben behandeln will, die Elemente der Elektrizitätslehre kennen. Eine von praktischem Sinne begleitete Kenntnis der wenigen Grundthatsachen ist das, was erforderlich ist. Eine solche Kenntnis aber erwirbt man sich selten durch bloſses Lesen oder Hören von Vorträgen, man muſs daneben einfache *praktische Versuche* anstellen und leichte *numerische Übungsaufgaben* durchführen.

Betreffs der Mechanik würde ich gern sehen, wenn der Leser die Gegenstände kennt, welche z. B. in den grundlegenden Teilen meiner Bücher über *„angewandte Mechanik“* *) und über die *„Dampf- und Gasmaschine“* **) entwickelt sind; d. h. ich nehme an, daſs er die Grund-

*) J. Perry, *Applied Mechanics,* London 1897 (Cassell & Co.).
**) J. Perry, *The Steam- and Gas Engine,* London 1897 (Cassell & Co.).



gesetze z. B. über das Biegungsmoment eines Balkens, über die von Kräften geleistete Arbeit, über Wirkungsweise einer Wärmekraftmaschine u. s. w. kennt. Vielleicht wird ihn das vorliegende Buch veranlassen, sich Kenntnisse dieser Art zu verschaffen. Ich wähle fast alle meine Beispiele aus der Technik, und wer diese einfachen Beispiele wirklich durcharbeitet, wird finden, dafs er damit das meiste von der theoretischen Seite des Ingenieurwesens kennen gelernt hat.

3. Ich kenne Leute, welche höhere mathematische Prüfungen abgelegt haben, die jedoch bei praktischen Arbeiten die gewöhnlichsten Formeln der technischen Handbücher, wenn irgend möglich, meiden. Glaubt ein Studierender auch ein guter Mathematiker zu sein, so sollte er sich gleichwohl in der Durchführung *numerischer Rechnungen* üben, z. B. mit Hilfe einer Logarithmentafel den Wert von a^b finden, wenn a und b irgend welche Zahlen sind, oder $\sqrt[3]{0{,}014}$ oder $2{,}365^{-0{,}26}$ berechnen u. s. w. Auch mag er irgend eine Formel aus einem Handbuch nehmen und mit ihr numerische Rechnungen anstellen. Es mufs ihm nicht genug sein zu wissen, dafs er's kann; er mufs die numerischen Rechnungen *wirklich ausführen.* Er mufs wissen, dafs, wenn eine Entfernung zu 2,454 abgemessen und die letzte Dezimalstelle unsicher ist, es recht ungeschickt ist, bei der Multiplikation oder Division mit dieser Zahl ein Resultat mit vielen Dezimalstellen herauszurechnen, oder zu sagen, dafs die indizierte Leistung einer Maschine 324,65 Pferdekräfte sei, wenn die Angaben des Indikators um 5% oder mehr unsicher sind. Er mufs den kürzesten Weg kennen, um das Produkt $3{,}216 \cdot 4{,}571$ auf vier Dezimalstellen ohne Gebrauch von Logarithmen zu berechnen. Er mufs die Näherungsformel

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha$$

oder

$$(1+\alpha)^n\,(1+\beta)^m = 1 + n\alpha + m\beta$$

prüfen, falls α und β klein sind, und muss selber feststellen, welche Fehler beim Gebrauch dieser Näherungswerte eintreten, falls $\alpha = 0{,}01$ oder $-0{,}01$, $\beta = \pm 0{,}025$ und $n = 2$ oder $\frac{1}{2}$ oder $-1\frac{1}{3}$ und $m = 4$ oder 2 oder -2 oder $\frac{1}{3}$ oder irgend einer anderen Zahl gleich ist.

Was die *Trigonometrie* angeht, so müssen die Grundbegriffe derselben bekannt sein. Man zeichne z. B. einen Winkel $\sphericalangle BAC$, etwa von 35°. Vom Punkt B des einen Schenkels fälle man auf den anderen ein Lot, dessen Fufspunkt C heifse. Man messe $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ so genau als möglich. Ist thatsächlich $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$? Man rechne das wirklich numerisch aus. Nun berechne man:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin 35^0, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos 35^0, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{tang } 35^0.$$

Man prüfe, ob die erhaltenen Resultate mit den Angaben in den trigonometrischen Tafeln übereinstimmen. Man lerne, wie man, wenn eine Seite des Dreiecks ABC und einer der spitzen Winkel gegeben ist, die anderen Seiten berechnet. Man lerne, daſs der Sinus von 130^0 positiv ist, daſs dagegen der Cosinus dieses Winkels negativen Wert besitzt. Ebenso prüfe man mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln, ob

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

ist, wobei man für A und B irgend zwei speziell gewählte Winkel einsetzen wolle. Es reihen sich hier noch drei weitere analoge Formeln an, welche $\sin(A-B)$, $\cos(A+B)$ und $\cos(A-B)$ betreffen. In ähnlicher Weise behandele man die vier Formeln, welche durch Addition und Subtraktion jener Formeln gewonnen werden, und von denen eine diese ist:

$$2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$$

Man prüfe ebenso:

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1,$$

sowie die entsprechende Formel für $\sin 2A$ u. s. w.

Bevor meine Leser in der Lektüre fortfahren, fühlen sie sich hoffentlich veranlaſst, den nützlichsten (d. i. den grundlegenden und interessantesten) Teil der Trigonometrie nochmals vorzunehmen und die in diesem Teile enthaltenen Lehrsätze möglichst selbständig zu beweisen, sofern sie das noch nicht gethan haben sollten.

Man berechne die Gröſse eines Winkels von 1,6 Grad in Bogenmaſs (die Einheit des Bogenmaſses ist gleich einem Winkel von 57,296 Grad); man bestimme, um wieviel der Sinus und die Tangente dieses Winkels von dem (in Bogenmaſse gemessenen) Winkel selbst abweichen. Man erinnere sich, daſs, wenn man in der höheren Mathematik $\sin x$ schreibt, x dabei in Bogenmaſs gemessen vorausgesetzt wird.

Ich erwarte nicht, daſs der Leser viel über *höhere Algebra* weiſs; doch nehme ich an, daſs er imstande ist, Ausdrücke wie $(x^2+7x+12)$ oder (x^2-a^2) je in die beiden linearen Faktoren zu zerlegen, sowie daſs er fähig ist, auch etwas kompliziertere algebraische Ausdrücke zu vereinfachen. Es ist keineswegs die Kenntnis der Permutationen und Kombinationen oder der Theorie der Gleichungen, der Theorie der Kegelschnitte oder der Tangentialebenen bei Flächen 2. Grades, was der Techniker braucht. Glücklich allerdings ist derjenige Ingenieur, der zugleich ein Mathematiker ist; aber es ist nur wenigen

verliehen, die beiden so verschiedenen Begabungen in sich zu vereinigen.

Ein Bauingenieur mufs für seine Vermessungsarbeiten natürlich die Methoden zur Auflösung von Dreiecken beherrschen; aber für den Maschinenbauer und Elektrotechniker ist dies sowie manches andere, was jetzt zum üblichen Lehrplan der Techniker gehört, ziemlich wertlos; davon hat mich eine langjährige Beobachtung der Studenten und Ingenieure am Zeichentisch und in der Werkstatt überzeugt. Das klingt unwissenschaftlich, aber ich wage es mit Nachdruck zu betonen. Der junge Techniker kann nicht genug geübt werden in der blofsen Vereinfachung algebraischer und trigonometrischer Ausdrücke, solche Ausdrücke einbegriffen, welche die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ enthalten; und der beste Dienst eines einführenden Werkes über Analysis besteht darin, dafs es die Studierenden veranlafst, sich dieser Übung immer wieder zu unterziehen.

Aber der Techniker braucht keine Ausbildung in mathematischen Kunststücken, wie sie nötig ist bei manchen Konstruktionsaufgaben der Geometrie oder bei den üblichen Vexierfragen der Prüfungen oder dann, wenn man, um die Differentialrechnung zu vermeiden, sich in endloser und umständlicher Weise mit der Elementarmathematik abquält. Das Ergebnis eines falschen Erziehungssystems erkennt man daran, dafs unter hundert guten Technikern nicht einer ein überzeugter Theoretiker ist.

4. Ich zweifele nicht daran, dafs die Grundideen der Differential- und Integralrechnung jedem meiner Leser an sich bereits ganz bekannte Dinge sind, nur kennt er sie nicht in der analytischen Gestalt. Er hat eine vollständige Kenntnis vom Begriffe eines *Verhältnisses;* aber er ist noch nicht gewohnt geworden, dafür $\frac{dy}{dx}$ zu schreiben. Er hat einen klaren Begriff vom *Flächeninhalt;* aber er hat das Symbol $\int f(x)\,dx$, wie wir es brauchen, noch nicht kennen gelernt. Ihm sind die Ideen bereits eigen, nur drückt er sie noch nicht in der mathematischen Form aus.

Vielleicht haben manche meiner Leser schon schwierige mathematische Prüfungen abgelegt, sie können eine gegebene Funktion von x differenzieren, viele Funktionen integrieren; sie wissen allerhand schwierige Aufgaben über Fufspunktkurven, Rolllinien und elliptische Integrale zu lösen: auch solchen Lesern hoffe ich nützlich zu sein. Für sie ist die Schwierigkeit, dafs ihnen ihre mathematischen Kenntnisse nicht von Nutzen zu sein scheinen bei praktischen Aufgaben der Technik. Gieb ihren x's und y's eine physikalische Be-

deutung oder schreibe statt ihrer p's und v's, und was die leichteste Rechenaufgabe war, wird ein schwieriges Problem. Ich kenne solche Leute, die, wenn sie in einem technischen Buche ein $\frac{dp}{dt}$ oder ein Integralzeichen finden, schleunigst über dasselbe hinweglesen.

5. Wie ich damit begann, mein Buch zu schreiben, dachte ich den Gegenstand so vor meinen Lesern entwickeln zu sollen, wie ich ihn — ich glaube und ich habe es mir auch sagen lassen — mit großsem Erfolg in verschiedenen Klassen der Fortbildungsschule habe darstellen können. Aber vieles kann man in Vorlesungen ausführen, wozu man in der kaltblütigen Thätigkeit am Schreibtisch unfähig ist. Da fehlt eben der belebte Blick der Zuhörer, der einen warnt, wenn ein wenig mehr Ausführlichkeit von nöten ist, der einem zeigt, daſs eine grundlegende Idee bereits erfaſst wurde. Durch bloſses Zeichnen einer Kurve kann ein Begriff entwickelt werden, und Erläuterungen können angeknüpft werden an Gegenstände, die im Hörsaal vor Augen liegen.

Möge der Leser verständige Auswahl für seine Lektüre treffen; möge er hier kein Problem durcharbeiten, an dem er nicht ein berufsmäſsiges Interesse nimmt. Die Zahl der Probleme ist groſs; aber die beste Schulung besteht darin, nur einige wenige von ihnen *mit aller Sorgfalt* zu studieren.

Ich erwarte übrigens vom Leser, daſs er öfters zur Lektüre der ersten und grundlegenden Abschnitte des Werkes zurückkehrt.

Das Buch würde zu überladen werden, wenn ich mich in demselben nicht auf die interessantesten und lehrreichsten technischen Aufgaben beschränken würde. Ich behalte mir für eine künftige Gelegenheit vor, was vielleicht für manche Studierende der interessantere Teil meines Gegenstandes sein würde, nämlich der Technik oder, wie wir auch sagen dürfen, der angewandten Physik Erläuterungen für die Theorie der *partiellen Differentialgleichungen* zu entnehmen. Mancher wird das für einen Gegenstand halten, der in elementarer Fassung nicht gelehrt werden könne; andererseits aber hat uns Lord Kelvin schon vor langer Zeit gezeigt, daſs es überhaupt kein nützliches mathematisches Werkzeug giebt, das der Ingenieur nicht für sich zu verwerten lernen könnte. So sollte denn der Ingenieur vor allen die Differentialrechnung mit derselben Leichtigkeit handhaben lernen, wie er in der Werkstatt lernt, mit Meiſsel und Feile umzugehen; das ist die Idee, welche mich bei meinem Unterricht der Ingenieure im Gebrauch der höheren Analysis leitet.

Das vorliegende Buch hat nicht vor, die strengeren Darstellungen

der höheren Analysis überflüssig zu machen; es ist mehr nur eine Vorbereitung für jene. In dem ersten der drei Kapitel des Buches unternehme ich es garnicht, irgend eine andere Funktion als x^n zu differenzieren oder zu integrieren. Im zweiten Kapitel handele ich von den Funktionen e^{ax} und $\sin(ax+c)$. Das dritte Kapitel ist dann allerdings schwieriger.

Zum Zwecke der Übung in einfachen analytischen Entwicklungen, soweit dieselben für technische Probleme von Nutzen sind, habe ich eine Sammlung von Übungsbeispielen über Differentiation und Integration an verschiedenen Stellen des Werkes eingefügt.

Klein gedruckte Absätze und unter dem Texte angefügte Noten werden vielleicht von manchen Studierenden bei der ersten Lektüre des Buches zu schwer befunden werden. Gelegentlich mag auch ein Übungsbeispiel ein wenig mehr Kenntnis erfordern, als der Leser bereits besitzt. Solche Stellen mag er dann einfach überspringen.

Kapitel I.

x^n.

6. Jedermann kennt bereits die **Koordinatengeometrie** und benutzt **quadratisch geteiltes Papier** oder, wie wir kurz sagen, **Millimeterpapier.** Solches Papier kauft man in wohlfeiler Ausführung zu 15 ₰ den Bogen: wer das noch nicht weiſs, und wer meint, er müsse vielleicht gar 1 ℳ für den Bogen bezahlen, der hat eine zu hohe Meinung von seinem richtigen Wert und braucht es daher zu sparsam.

Ein **Kaufmann**, der in seinem Kontor auf einem Bogen Millimeterpapier Tag für Tag Punkte einträgt und sie durch eine Kurve verbindet, Punkte, von denen der einzelne den Tagespreis des Eisens, des Kupfers, des wollenen Garns oder der Seide markiert oder irgend eine andere Angabe macht, der braucht Koordinatengeometrie. Welches aber ist der Zweck, den er mit dem Zeichnen solcher Kurven verfolgt? 1. Er kann hinterher die Höhe des Preises an irgend einem Tage direkt ablesen. 2. An der *Neigung* seiner Kurve erkennt er sofort den *Grad* des Steigens oder Fallens des Preises. 3. Wenn er auf dem gleichen Bogen für das einzelne Datum noch die Zahlwerte sonstiger Dinge oder Verhältnisse graphisch aufträgt, so wird er bemerken, welche Wirkung deren Ansteigen oder Herabgehen auf den Preis seiner Ware ausübt; und dies setzt ihn in den Stand, den künftigen Preisgang vorherzusagen und auf die Weise Gewinne zu erzielen. 4. Die Prüfung der Kurve für die Vergangenheit verleiht seinen Schlüssen auf die Zukunft eine gröſsere Sicherheit, als ohne den Besitz einer solchen anschaulichen Übersicht möglich wäre.

Man bemerke, daſs **der einzelne Punkt in der Ebene immer zwei Gröſsen darstellt.** Sein horizontaler*) Abstand von einer ersten vertikal gestellten Ausgangsgeraden oder Axe wird gewöhnlich als die x-Koordinate bezeichnet und soll auf der rechten Seite jener vertikalen Axe positiv, nach links hin negativ gerechnet werden.

---

*) Die Bezeichnungen „horizontal“ und „vertikal“ rühren daher, daſs man sich die im Texte gemeinte Figur an der Wandtafel gezeichnet denkt.

Vielfach bezeichnet man die x-Koordinate auch als *Abscisse* des Punktes; im obigen Beispiel bedeutet sie die Zeit. Die andere Koordinate (wir nennen sie gewöhnlich die y-Koordinate oder einfach die *Ordinate*) ist der vertikale Abstand des Punktes von einer zweiten horizontal gelegenen Axe; im betrachteten Fall stellt die Ordinate den Preis dar. In den Tagesblättern findet man Kurven, welche das Steigen und Fallen des Thermometers und des Barometers darstellen. Ich habe einmal einen gelehrt geschriebenen Artikel gelesen über die Art, wie in England Bevölkerung, Wohlstand und Steuern gewachsen sind. Der Überlegung war schwer zu folgen. Nahm man indessen die Zahlenangaben des Verfassers und trug sie graphisch in das Quadratnetz des Millimeterpapiers auf, so war jedes Resultat, welches er mühevoll herausgearbeitet hatte, an den Kurven ohne weiteres ersichtlich, so daſs es ein Kind verstehen konnte. Das ist vielleicht der Grund, warum einige Autoren keine Kurven veröffentlichen: mancher hätte, wenn er's thäte, wenig Anlaſs zu schriftstellern.

7. Beim Anstellen von **Experimenten** macht man gewöhnlich ausfindig, wie eine erste Gröſse, die ich y nennen will, von einer anderen Gröſse, die x heiſsen soll, abhängt. So ist der Druck p gesättigten Dampfes (es sei Wasser und Dampf in einem Kessel bei Ausschluſs der Luft und jeder weiteren Flüssigkeit) stets derselbe für die gleiche Temperatur. Eine im Quadratnetze gezeichnete Kurve läſst uns für irgend eine Temperatur den Druck ablesen und umgekehrt, zugleich aber zeigt sie das Verhältnis, nach welchem die eine Gröſse zunimmt bei Wachstum der anderen und noch manches andere. Ich will nicht behaupten, daſs die Kurve unter allen Umständen und für jeden Zweck besser sei als eine tabellarische Zusammenstellung der Zahlwerte; manche Angaben liefert die Kurve besser, manche die Zahlentabelle.

Wenn wir übrigens irgend eine Gröſse durch die Länge einer Linie repräsentieren, so thun wir das natürlich unter Zugrundelegung eines bestimmten Maſsstabes; 1 cm stellt dann z. B. einen Druck von 10 kg auf 1 qcm oder eine Temperaturdifferenz von 20° Celsius oder irgend eine andere Gröſse dar. Aus der Zeichnung hat man dann immer nur die *Maſszahl* der Länge zu bestimmen, diese Zahl erhält dann aus der gerade vorliegenden Abmachung ihre Benennung; denn selbstverständlich hat an sich die Länge von 1 cm mit einem Druck von 10 kg pro qcm oder mit einer Temperaturdifferenz von 20° Celsius nichts zu thun.

Wenn Jemand zwei zusammenhängende Reihen durch Beobachtung gewonnener Zahlen in das Quadratnetz graphisch einträgt, so thut



er das erstens, um zu sehen, ob die Punkte vielleicht auf einer regelmäſsig geformten Kurve liegen. Ist dem so, so wird, je einfacher die Kurve ist, um so einfacher auch das Gesetz ausfallen, das wir für den Zusammenhang jener Zahlen aufstellen wollen. Zweitens zeichnet man Kurven, um Beobachtungsfehler zu korrigieren. Wenn nämlich die Punkte nahehin in einer einfachen regelmäſsig gebildeten Kurve liegen, und wir ziehen vermittels eines dünnen biegsamen Lineals die Kurve, welche möglichst gleichmäſsig zwischen den Punkten hindurchläuft, so darf es als wahrscheinlich angenommen werden, daſs, wenn keine Beobachtungsfehler vorlägen, die Punkte genau auf jener Kurve lägen. Auf das Vorzeichen ist dabei natürlich stets, wie oben schon erwähnt, Rücksicht zu nehmen. So wird z. B. ein Punkt, welcher in der Entfernung -5 zur Rechten einer Geraden gelegen ist, einfach auf der entgegengesetzten Seite der Geraden den Abstand $+5$ von derselben haben. Übrigens weiſs ich aus langer Erfahrung, daſs es der Mühe wert ist, einige Zeit und Sorgfalt auf die richtige Auswahl der Maſsstäbe zu verwenden: oft ist es zweckmäſsig, Abscisse und Ordinate nach verschiedenen Maſsstäben zu messen; auch empfiehlt es sich häufig, die Koordinaten nicht mit 0 beginnen zu lassen, weil uns vielleicht das Anfangsstück der Kurve weniger interessiert. Stets soll man darauf bedacht sein, den Bogen gut auszunutzen und die Kurventeile, welche man studieren will, in möglichst groſsem Maſsstabe darzustellen.

Nun wolle sich der Leser einige Bogen Millimeterpapier käuflich erwerben und ohne fremde Hilfe die Resultate irgend welcher Beobachtungen graphisch darstellen. Möge er z. B. einen Band eines statistischen Werkes hernehmen und irgend eine Zahlenreihe in besprochener Weise bearbeiten; er stelle graphisch dar die Mitteltemperatur in jedem Monat des letzten Jahres, die Staatsschulden seit 1688, den augenblicklichen Wert einer Leibrente für verschiedene Zeitpunkte unter Zugrundelegung eines Zinsfuſses von 4%, das Gesamtkapital, welches seit 1849 in Eisenbahnen am Schlusse jeden Jahres angelegt worden war. Jedes Beispiel ist nützlich, doch wählt sich der Leser zweckmäſsig solche Gegenstände, an denen er ein Interesse hat. Falls er Laboratoriumsversuche gemacht hat, so wird er ein überwiegendes Interesse daran haben zu sehen, welcherlei Gesetze ihm seine Kurven im Quadratnetze auf diesem Gebiete liefern.

8. Handelt es sich um Beobachtungen über die gegenseitige Abhängigkeit des Druckes p und der Temperatur t oder des Druckes p und des Volumens v oder des Volumens v und der Temperatur t oder der indizierten Leistung und der Nutzleistung einer Dampf- oder



Gasmaschine oder von Stromstärke und Spannung in der Elektrizitätslehre, und wollen wir allgemeine Angaben über derartige Paare von Gröfsen machen, so werden wir die Bezeichnungen x und y an Stelle der p, v, t und sonstiger Gröfsen gebrauchen. Um in einfachster Art anzugeben, dafs ein Gesetz vorliegt, welches zwei variabele Gröfsen x und y an einander knüpft, bedient man sich des Symbols:

$$\mathbf{F(x, y) = 0;} \tag{1}$$

in Worten sagt man: *„es existiere eine Gleichung zwischen x und y"*. Ein Ausdruck, welcher x und y enthält (und vielleicht auch noch mehrere andere Buchstaben oder Zahlen) wird als eine **Funktion** von x und y bezeichnet, und wir gebrauchen Symbole wie $F(x, y)$, $f(x, y)$, $Q(x, y)$ etc., um allgemein Funktionen zu bezeichnen, sofern wir den wirklichen Ausdruck der Funktion noch nicht kennen, oder manchmal auch dann, wenn wir diesen Ausdruck zwar kennen, jedoch denselben abgekürzt bezeichnen wollen. Andrerseits brauchen wir $F(x)$ oder $f(x)$ oder irgend ein anderes passendes Symbol, um *„irgend einen mathematischen Ausdruck in x"* zu bezeichnen, und wir sagen dann **„es sei $f(x)$ eine Funktion von x".** So bedeutet

$$y = f(x) \tag{2}$$

irgend eine Gleichung, welche uns in den Stand setzen soll, y für gegebene Werte x zu berechnen.

Das Gesetz $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ hat die Form der obigen Gleichung (1); berechnen wir y explicite in x, so gewinnen wir $y = \pm \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$ und haben dann die Gestalt (2). Aber in beiden Fällen haben wir mit der gleichen Abhängigkeit zwischen x und y zu thun. In der reinen Mathematik deutet man x und y gewöhnlich nur erst als Entfernungen; in der angewandten Mathematik stehen x und y auch für beliebige andere Gröfsen, welche wir mit einander vergleichen, die wir dann aber in oben besprochener Weise unter Benutzung festgewählter Mafsstabe durch Längen darzustellen imstande sind.

9. Übungsbeispiele im Kurvenzeichnen.

I. Man zeichne die zur Gleichung $y = 2 + \frac{1}{30}x^2$ gehörende Kurve.

Für $x = 0$ findet man $y = 2$, für $x = 1$ ebenso $y = 2{,}0333$, für $x = 2$ folgt $y = 2{,}133$ u. s. w. Man trage diese Werte von x und y in das Quadratnetz ein. Die Kurve ist eine Parabel.

II. Man ziehe die Kurve von der Gleichung $y = 2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2$, die ebenfalls eine Parabel ist, in derselben Weise wie unter I. und auf dem gleichen Bogen.

III. Man zeichne die Kurve der Gleichung $xy = 120$. Jetzt hat man für $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. bez. $y = 120, 60, 40, 30$ u. s. w. Die Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel.

IV. Man ziehe die Kurve von $y \cdot x^{1,414} = 100$ oder $y = 100 \cdot x^{-1,414}$. Kann der Leser den Wert y für das einzelne x nicht berechnen, so weiſs er nicht mit Logarithmen umzugehen. Je früher er den Gebrauch der Logarithmen lernt, um so besser.

V. Zeichne die Kurve der Gleichung $y = ax^n$ für irgend ein speziell gewähltes a. Ich empfehle dem Studierenden einige Zeit zu verwenden auf das Zeichnen von Spezialfällen aus der groſsen Gattung dieser viel benutzten Curven. Man wähle $n = -1$ (was schon in III. vorkam), $n = -2$, $n = -1\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$, $n = -0{,}1$, $n = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{4}$, $n = 1$, $n = 1\frac{1}{2}$, $n = 2$ (cf. Nr. I), $n = 3$, $n = 4$ u. s. w.

VI. Man zeichne die zu $\boldsymbol{y = a \sin(bx + c)}$ gehörende Kurve, indem man für a, b, c zweckmäſsige Spezialwerte einsetzt.

Anweisung. Da $bx + c$ in *Bogenmaſs* gemessen ist (die Einheit des Bogenmaſses = 57,2958 Grad), in den Tafeln aber die Winkel gewöhnlich in Gradmaſs angegeben sind, so wähle man für b und c Werte, welche die numerische Rechnung möglichst einfach gestalten.

Man setze z. B. $b = 1 : 114{,}6$ und wähle c gleich dem Bogenmaſs des Winkels von 30^0 $\left(\text{d. i. } c = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236\right)$. Man lasse weiter a den Wert 5 bedeuten und berechne alsdann für die Werte $x = 0, 10, 20$ u. s. w. die zugehörigen y.

So hat man z. B. für $x = 6$ den Wert $y = 5 \sin\left(\frac{6}{114{,}6} + 0{,}5236\right)$; in *Gradmaſs* umgerechnet haben wir:

$$y = 5 \sin\left(\tfrac{1}{2}\, 6^0 + 30^0\right) = 5 \sin 33^0 = 2{,}723.$$

Hat man diese Kurve gezeichnet, so überlege man, welche Veränderung eintritt, wenn statt des eben gewählten Wertes für c gesetzt wird 0 oder $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{3}$ oder $\frac{\pi}{2}$; desgleichen wenn a abgeändert wird. Mehr als eine Woche möge der Leser dieser Kurve widmen!

VII. Zeichne die Kurve von $\boldsymbol{y = ae^{bx}}$. Dabei setze man erstlich $a = 1$, $b = 1$, sodann aber andere Werte von a und b. Auch möge man zum Schluſs zwei Beispiele mit negativen Zahlwerten von b in Betracht ziehen.

Bei den bezeichneten Übungen wolle der Studierende die Hilfe eines Lehrers so wenig wie möglich in Anspruch nehmen; gegenseitige Unterstützungen der Studierenden selbst sind aber immer recht nützlich, zumal wenn sie zu Disputationen über den Gegenstand anregen.



Der Grund, warum ich mich auf die obigen sieben Fälle beschränkt habe, ist dieser: Die Studierenden lernen für gewöhnlich ziemlich komplizierte Ausdrücke differenzieren und integrieren: aber wenn der einfachste von diesen Ausdrücken ihnen in einem praktischen Probleme der Technik entgegentritt, so fürchten sie sich vor demselben. Nun ist es aber sehr selten, daſs ein Ingenieur mit einem Probleme zu thun hat (selbst in den schwierigeren Fällen seiner theoretischen Arbeiten), welches die Kenntnis anderer Funktionen als der drei:

$$y = ax^n, \quad y = a\sin(bx + c), \quad y = ae^{bx}$$

erfordert. Diese drei Funktionen müssen allerdings vollständig klar verstanden sein, und der lernende Techniker muſs das Studium derselben als den wichtigsten Teil seiner theoretischen Arbeit ansehen.

Während es demnach einfach eine Notsache für den Studierenden ist, das Studium der drei genannten Arten von Funktionen zu betreiben, so sehe ich nicht ein, warum er sich nicht auch das kleine Vergnügen machen soll und die Kurven der folgenden Gleichungen konstruieren:

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ (Kreis)},$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(Ellipse)},$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(Hyperbel)},$$

oder auch weitere Gleichungen der Art, wie sie im Kapitel III noch ausführlicher genannt werden sollen. Immerhin sind diese Kurven vom Standpunkte des Ingenieurs vergleichsweise nicht so interessant.

10. Nach dem Studium von $y = e^{-ax}$ und $y = b\sin(cx + g)$ wird es der Leser nicht schwer finden, jetzt auch die Funktion:

$$\boldsymbol{y = b \cdot e^{-ax} \sin(cx + g)}$$

zu verstehen, welche eine der wichtigsten Kurven der Technik liefert.

Er muſs zunächst eine der Kurven $y = b\sin(cx + g)$, wie er sie bereits untersucht hat, hernehmen. Sodann hat er auf demselben Bogen Papier die Kurve $y = e^{-ax}$ zu zeichnen und die Ordinaten beider Kurven für eine Reihe von Werten x jeweils mit einander zu multiplizieren, um die Ordinaten der neuen Kurve zu gewinnen. Die so entspringende Kurve ist offenbar wellenförmig gestaltet, indem y zwischen gröſsten und kleinsten Werten hin- und herschwankt. Diese Funktion y stellt sich ein bei der oscillierenden Bewegung eines Pendels oder des Zeigers gewisser Meſsinstrumente, wenn die



Schwingungen durch eine Flüssigkeit oder durch einen anderen widerstrebenden Einfluſs gedämpft werden; x bedeutet dabei die Zeit. Der Studierende wird die Kurve viel besser verstehen, wenn er Beobachtungen über solch' eine Bewegung anstellt, so z. B. mit einer in Öl untergetauchten Bleischeibe, welche infolge der Torsion des im Mittelpunkt der Scheibe angebrachten Aufhängungsdrahtes so langsame Drehschwingungen ausführt, daſs man während einer Schwingung für eine ganze Reihe von Zeiten x die zugehörigen Ausschlagswinkel y (mit Zeiger und Skala) ablesen kann. Der Winkel zwischen einer Extremlage und der nächstfolgenden auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage heiſst die Schwingungsweite. Der natürliche Logarithmus vom Quotienten einer Schwingungsweite und der nächstfolgenden oder auch ein Zehntel vom Logarithmus des Quotienten der ersten und elften Schwingungsweite liefert die Gröſse a, multipliziert mit der Schwingungsdauer, d. h. der Zeitdauer *einer einzelnen Schwingung*. Dieses sogenannte **logarithmische Dekrement** ist bei verschiedenen Messungen höchst wichtig.

11. Können wir mit Hilfe einer Zeichnung oder eines Modells **die Bahn eines Punktes** angeben, und sind wir im Stande, seine augenblickliche Lage auf der Bahnkurve aus der gleichzeitigen Stellung eines zweiten Punktes abzuleiten, so können wir die gleichen Angaben immer auch vermöge analytischer Rechnungen machen.

Beispiel 1. Ein Punkt F und eine Gerade DD seien gegeben; welches ist die Bahn eines Punktes P, der sich so bewegt, daſs das Verhältnis seiner Entfernung vom Punkte F zum Abstande von der Geraden DD stets dasselbe ist?

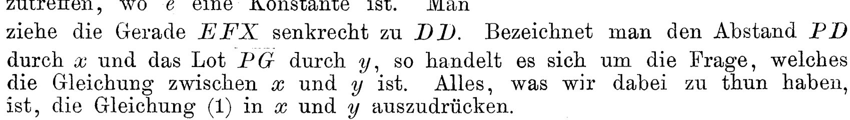
In Figur 1 möge z. B.:

(1) $$\overline{PF} = e \cdot \overline{PD}$$

Fig. 1.

zutreffen, wo e eine Konstante ist. Man ziehe die Gerade EFX senkrecht zu DD. Bezeichnet man den Abstand $\overline{PD}$ durch x und das Lot $\overline{PG}$ durch y, so handelt es sich um die Frage, welches die Gleichung zwischen x und y ist. Alles, was wir dabei zu thun haben, ist, die Gleichung (1) in x und y auszudrücken.

Man bezeichne zu diesem Zwecke die Strecke $\overline{EF}$ durch a. Dann gilt:



$$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PG}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{y^2 + (x-a)^2},$$

so daſs wir, wenn wir in (1) die rechte und linke Seite zum Quadrat erheben, die Gleichung gewinnen:

(2) $$y^2 + (x-a)^2 = e^2 x^2.$$

In dieser Gleichung ist die Antwort enthalten. Ist $e = 1$, so heiſst die entstehende Kurve eine **Parabel**, für $e > 1$ eine **Hyperbel**, für $e < 1$ eine **Ellipse**.

Beispiel 2. Der Kreis APQ (cf. Figur 2) rollt auf der geraden Linie OX. Welches ist die Bahn eines Punktes P der Peripherie des Kreises?

Berührt der Kreis die Gerade in O, so falle P mit dem Berührungspunkte O zusammen. OX und OY (in Figur 2) seien die Axen, so daſs $\overline{SP} = x$ und $\overline{PT} = y$ die Koordinaten des Punktes P sind. Der Radius des Kreises sei a. Der Winkel PCQ werde durch φ bezeichnet. Man fälle CB senkrecht zu PT und bemerke, daſs alsdann die Gleichungen gelten:

Fig. 2.

$$\overline{PB} = a \cdot \sin PCB = a \sin(\varphi - 90^0) = -a\cos\varphi,$$

$$\overline{BC} = a \cdot \cos PCB = a \sin\varphi.$$

Andrerseits is der Bogen

$$QP = a \cdot \varphi = \overline{OQ}.$$

Da nun

$$x = \overline{OQ} - \overline{BC}, \quad y = \overline{BT} + \overline{PB}$$

zutrifft, so haben wir

(3) $$x = a\varphi - a\sin\varphi, \qquad y = a - a\cos\varphi.$$

Eliminiert man φ aus den Gleichungen (3), so entspringt eine Gleichung zwischen x und y. Doch behält man besser φ und damit zwei Gleichungen bei, weil dann die Rechnungen einfacher ausfallen. Wir werden somit die beiden Gleichungen (3) fortan immer als die Gleichungen der betrachteten Kurve bezeichnen. Letztere wird die **Cykloide** genannt, wie alle meine Leser bereits wissen werden.

Beispiel 3. Eine **Kurbel** verschiebe mittelst einer **Pleuelstange** einen Kreuzkopf in geradliniger Bahn. Wo befindet sich derselbe für gegebene Lage der Kurbel?

Die Bahnrichtung laufe durch den Mittelpunkt des Kurbelkreises. Ist A der Endpunkt der geradlinigen Bahn des Stangenendpunktes Q (cf. Figur 3), so ist offenbar $\overline{OA} = l + r$, unter l die Länge der Pleuelstange und unter r den Kurbelradius verstanden.

Man erinnere sich nun, daſs man zwei unabhängige Gleichungen gewinnt, wenn man alle Seiten einer geschlossenen Figur auf zwei gerade Linien projiziert. Projizieren wir auf OA, so gewinnen wir (cf. Figur 3):

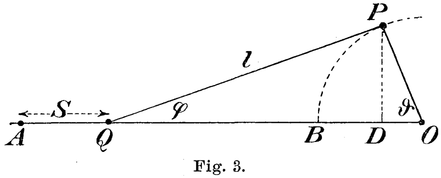


Fig. 3.

(1a) $$S + l\cos\varphi + r\cos\vartheta = l + r,$$

während wir bei Projektion auf PD erhalten:

(1b) $$l\sin\varphi = r\sin\vartheta.$$

Eliminieren wir φ aus diesen Gleichungen, so können wir S für den Einzelwert ϑ berechnen. Der Studierende sollte das eigentlich selber ausrechnen; doch bin ich schwach genug, ihm diese Arbeit abzunehmen. Wir folgern aus der Gleichung (1b):

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\vartheta},$$

so daſs Gleichung (1a) die Gestalt annimmt:



(2) $$S = l\left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\vartheta}\right] + r(1 - \cos\vartheta)\,^{*)}.$$

Der Leser sollte im Anschlufs an diese Beispiele einige Übungsaufgaben selbständig durcharbeiten, z. B. die folgenden:

1) Die Endpunkte A und B einer Stange gleiten längs der beiden Schenkel OA und OB eines rechten Winkels AOB; man bestimme die Gleichung der Bahn eines Punktes P der Stange.

2) Bei der **Watt'schen Geradführung** benutzt man einen Punkt, welcher angenähert eine gerade Linie beschreibt. Man bestimme die Gleichung der vollständigen Bahn desselben.

In Figur 4 ist die mittlere Lage durch $OABO'$ gegeben. Die günstigste Lage des Punktes P entspricht der Proportion $\overline{BP}:\overline{PA} = \overline{OA}:\overline{O'B}$. Man verschiebe nun das Gelenksystem. Die vollständige Bahn des Punktes P sieht dabei ungefähr wie eine 8 aus.

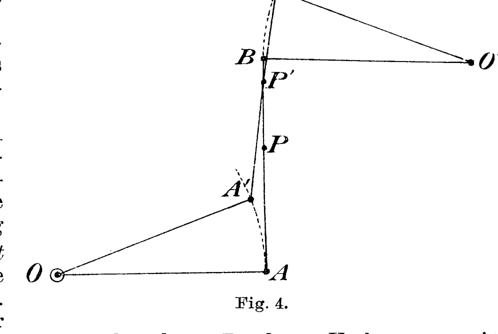


Fig. 4.

3) Man bestimme die Gleichung der Bahn irgend eines Punktes auf der Mitte einer gewöhnlichen Kurbelstange.

4) Der eine Endpunkt A einer Stange beschreibt eine geradlinige Bahn COC' des Mittelpunktes O; und zwar liege die einfache harmonische Bewegung vor, für welche $\overline{OA} = a \sin pt$ ist, unter a und p Konstante und unter t die Zeit verstanden. Der andere Endpunkt B der Stange bewege sich längs einer geraden Strecke BD, deren Verlängerung in O auf COC' senkrecht steht. Welches ist die Bewegung von B? Man zeige, dafs dieselbe angenähert auch eine einfache harmonische Bewegung und zwar von der halben Periode ist.

5) Bei jeder Schiebersteuerung, die aus einer Reihe einzelner Gelenkstangen zusammengesetzt sein mag und von einer gleichmäfsig rotierenden Kurbel angetrieben wird, besteht die Bewegung irgend eines Punktes an irgend einem der Glieder in irgend einer bestimmten Richtung stets aus zwei Teilen; aus einer einfach harmonischen Grundbewegung, deren Periode mit der der Kurbel übereinstimmt und aus der übergelagerten Oktave. Auf das Studium der **Kulissenbewegungen** und der **Kulissensteuerungen** von diesem Gesichtspunkte aus kann

---

*) Ist $\frac{r^2}{l^2}$, wie gewöhnlich, ein kleiner Bruch, so kann man, entsprechend der für kleine Werte ε gültigen Näherungsformel $\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, folgenden angenäherten Wert für S angeben:

$$S = \frac{r^2}{4l}(1 - \cos 2\vartheta) + r(1 - \cos\vartheta).$$

Dieses Ergebnis ist von weit gröfserer Wichtigkeit, als es hier scheinen mag. Bildet übrigens die geradlinige Bahn des Kreuzkopfes mit der Geraden von O nach ihrer Mitte einen Winkel $\alpha > 0$, so ist für kleine Werte von α der Wert S nahehin derselbe wie oben, nur geteilt durch $\cos\alpha$. Ist α grofs, so wird der Ausdruck von S komplizierter; doch kann man immer gute Näherungsausdrücke finden, mit denen sich leicht rechnen läfst.

man gern ein paar Monate verwenden. Denn hier liegt das Geheimnis verborgen, warum eine Steuerung ein besseres Diagramm ergiebt, als die andere. Zum Beispiel suche man den Unterschied zwischen der Hackworth-Steuerung mit gebogener Kulisse und derjenigen mit gerader Kulisse. Vergl. auch Art. 122.

12. Die Gerade als Ergebnis der Darstellung einer Gleichung. Die Beweise verschiedener weiterhin zu machender Angaben sollen später nachgeholt werden; zuerst soll sich der Leser mit den Gegenständen, die zu beweisen sind, wohl vertraut machen. Ich habe Schüler gekannt, welche mathematische Sätze *beweisen* konnten, die aber noch Jahre lang nachher nicht richtig verstanden hatten, was sie eigentlich bewiesen hatten.

Man nehme irgend einen Ausdruck $y = a + bx$, wo a und b konstante Zahlen sind, so z. B. $y = 2 + 1\frac{1}{2}x$. Alsdann setze man $x = 0, 1, 2, 3$ etc. und berechne die zugehörigen Werte y. Man markiere die diesen Koordinatenpaaren x, y entsprechenden Punkte im Quadratnetz, und man wird finden, daſs sie genau in einer geraden Linie gelegen sind. Man nehme weiter $y = 2 + 3x$ oder $y = 2 + \frac{1}{2}x$ oder $y = 2 - \frac{1}{2}x$ oder $y = 2 - 3x$ und wird in allen Fällen wieder zu einer Geraden geführt. Leute, die hiervon etwas verstehen, werden ja freilich an diesem Ergebnis von vornherein nicht gezweifelt haben; und wer eine praktische Prüfung, ob im Einzelfall die Punkte auf einer Geraden liegen, unnötig findet, mag sie unterlassen, obschon es der Mühe wert sein würde, bei dieser Prüfung zu verweilen. Man bemerke wohl, daſs ich in allen Fällen den gleichen Wert des Koeffizienten a gegeben habe; die Folge ist, daſs alle Geraden etwas gemein haben müssen. Worin besteht dies? Ich deute nur kurz an, daſs a der Wert von y für $x = 0$ ist.

Jetzt prüfe man die zu den Gleichungen $y = 2 + 1\frac{1}{2}x$, $y = 1 + 1\frac{1}{2}x$, $y = 0 + 1\frac{1}{2}x$, $y = -1 + 1\frac{1}{2}x$, $y = -2 + 1\frac{1}{2}x$ gehörenden Geraden und untersuche, was es bedeutet, wenn der Koeffizient b überall derselbe ist. Man wird finden, daſs die Geraden mit demselben b alle die gleiche Neigung gegen die x-Axe haben; und in der That pflegt man dieserhalb b als *Richtungskoeffizienten* oder *Neigungskoeffizienten* oder auch kurz als „*Steigung*" der Geraden zu benennen.

Ist $y = a + bx$, so entspreche der Abscisse $x = x_1$ die Ordinate $y = y_1$, und ebenso entspreche der Abscisse $x = x_1 + 1$ die Ordinate $y = y_2$. Man zeigt alsdann leicht $y_2 - y_1 = b$. Somit ist das, was ich als „Steigung" einer Geraden bezeichnete, der Höhenunterschied für zwei Stellen mit der Horizontalentfernung 1. Wenn wir übrigens sagen, daſs eine Straſse eine Steigung von $\frac{1}{20}$ oder eine solche von 1 zu 20 habe, so meinen wir damit, daſs auf 20 Meter Straſsenlänge 1 Meter Steigung komme. Dann ist $\frac{1}{20}$ der *Sinus* des Neigungswinkels der



Strafse gegen eine horizontale Ebene. Man beachte, dafs demgegenüber die soeben definierte „Steigung“ einer Geraden in anderer Weise gemessen ist. Offenbar ist nämlich die „Steigung“ einer Geraden in unserem Sinne gleich der *Tangente* des Neigungswinkels der Geraden gegen die horizontale Gerade.

Verfolgen wir jetzt allgemeiner die durch $y = a + bx$ gegebene Gröfse y in ihrer Abhängigkeit von der Variabelen x, so bemerken wir, dafs *das Verhältnis des Wachstums von y zum entsprechenden Wachstum des x* konstant ist; dieses Verhältnis ist in der That durch die „Steigung“ b unserer Geraden direkt gegeben. Wir geben ohne nähere Ausführung an, dafs man für das fragliche Verhältnis die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ braucht. Man wolle diese Bezeichnung hier aber nur erst als ein Symbol für die Steigung unserer Geraden auffassen; jedenfalls hüte man sich von vornherein, dafs man nicht etwa $\frac{dy}{dx}$ im Sinne von $\frac{d \cdot y}{d \cdot x}$ fafst. Man halte fest, dafs, wenn $y = a + bx$ ist, $\frac{dy}{dx} = b$ folgt; aus $\frac{dy}{dx} = b$ wird sich umgekehrt $y = A + bx$ ergeben, wo A eine beliebige Konstante bedeutet.

Eine beliebig gegebene Gleichung ersten Grades zwischen x und y wie $Ax + By = C$ mit konstanten Koeffizienten A, B, C kann in die Gestalt $y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$ gesetzt werden; es handelt sich also hier um die Gerade, welche die „Steigung“ $-\frac{A}{B}$ besitzt, und welche durch den Punkt der Koordinaten $x = 0$, $y = \frac{C}{B}$ oder, wie wir kurz sagen, durch den Punkt $\left(0, \frac{C}{B}\right)$ hindurchläuft. So läuft die Gerade $4x + 2y = 5$ durch den Punkt $(0, 2\frac{1}{2})$ und hat die Steigung -2. Hier wird also y abnehmen, wenn x wächst. Der Leser wolle sich die Gerade von der Gleichung $y = 2\frac{1}{2} - 2x$ ziehen und sich den Unterschied zwischen ihr und der Geraden $y = 2\frac{1}{2} + 2x$ klar machen. Man veranschauliche sich, was man unter einer positiven und was unter einer negativen „Steigung“ zu verstehen haben wird. Man ziehe sich auch einige gekrümmte Linien und beurteile nach Augenmafs näherungsweise die Steigung an den einzelnen Stellen derselben.

13. Aufgaben über die gerade Linie.

1) Gegeben sei die Steigung einer geraden Linie. Man wisse aufserdem, dafs dieselbe durch den Punkt der Koordinaten $x = 3$, $y = 2$ hindurchläuft. Welches ist die Gleichung der Geraden?

Ist die Steigung z. B. 0,35, so lautet die Gleichung $y = a + 0{,}35\,x$, wo a noch unbekannt ist. Da jedoch der Punkt (3, 2) auf der Geraden liegt, so gilt $2 = a + 0{,}35 \cdot 3$ oder $a = 0{,}95$, und also ist die gesuchte Gleichung $y = 0{,}95 + 0{,}35\,x$.

2) Welches ist die Steigung irgend einer Geraden, die senkrecht zur Geraden $y = a + bx$ verläuft?

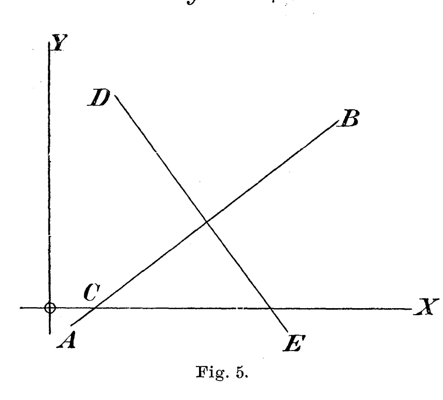


Fig. 5.

Es sei AB in Figur 5 die gegebene Gerade, welche die Axe OX in C schneidet; dann ist $b = \text{tang} \sphericalangle BCX$. Verläuft die Gerade DE senkrecht zur Geraden AB, so ist ihre Steigung:

$$\text{tang}\, DEX = -\,\text{tang}\, DEC = -\,\text{cotg} BCE = -\frac{1}{b}.$$

Hiernach ist $y = A - \frac{1}{b}x$ die allgemeine Gleichungsform für alle Geraden, welche die Gerade $y = a + bx$ senkrecht schneiden; die Konstante A kann noch jeden beliebigen Wert annehmen.

3) An welcher Stelle schneiden sich die beiden Geraden der Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $Mx + Ny + S = 0$?

Offenbar in dem Punkte, dessen Koordinaten x, y beide Gleichungen befriedigen. Wir haben also hier mit einer Aufgabe der elementaren Algebra zu thun, nämlich mit der Auflösung zweier linearen Gleichungen nach zwei Unbekannten.

4) Sind tang α und tang β bekannt, so ist es leicht tang $(\alpha - \beta)$ zu finden. Sind somit zwei Gerade $y = a + bx$ und $y = m + nx$ gegeben, so kann man leicht den Winkel zwischen ihnen bestimmen.

5) Die Gerade $y = a + bx$ möge durch die Punkte (1, 2) und (3, 1) hindurchlaufen. Wie grofs sind a und b?

6) Eine Gerade $y = a + bx$ steht senkrecht zur Geraden $y = 2 + 3x$ und läuft durch den Punkt (1, 1). Welches sind die Werte von a und b?

14. Von der Aufstellung empirischer Formeln.

Haben wir im Labaratorium Messungen angestellt über zwei Gröfsen, die von einander abhängen, so mögen wir uns in einer Tafel die korrespondierenden Werte beider Variabelen zusammengestellt haben. Wünschen wir zu wissen, ob eine einfache Beziehung zwischen beiden Variabelen besteht, so tragen wir uns unter zweckmäfsiger Auswahl des Mafsstabs die zusammengehörigen Wertepaare als Koordinaten von Punkten in das Quadratnetz ein. Giebt es eine ziemlich regelmäfsig verlaufende Kurve, welche bei Beachtung der Möglichkeit, dafs sich

Beobachtungsfehler eingeschlichen haben, durch alle Punkte hindurchzulaufen scheint, so suchen wir nach einer Formel $y = f(x)$, welche diese Kurve darstellt, und welche wir demnach als den analytischen Ausdruck des zwischen den Variabelen x und y bestehenden Gesetzes benutzen können.

Scheinen die Punkte sämtlich auf einer Geraden zu liegen, so wird man mit einem *gespannten Faden* die am meisten wahrscheinliche Lage derselben ausfindig machen. Es giebt eine umständliche algebraische Methode, diejenige Gerade zu finden, welche die Lage der Punkte mit kleinstem Fehler liefert; aber für die meisten technischen Zwecke ist die genannte Mafsregel mit dem gespannten Faden hinreichend genau.

Scheint die Kurve einem Gesetze wie $y = a + bx^2$ zu folgen, so wolle man y und die Quadrate x^2 der beobachteten Mafszahlen x als Punktkoordinaten abtragen und sehe nach, ob die entspringenden Punkte auf einer Geraden liegen. Scheint die Kurve einem Gesetze wie:

$$(1) \qquad \boldsymbol{y = \frac{ax}{1+bx}}$$

zu folgen, das auch in die Gestalt $\frac{y}{x} + by = a$ gekleidet werden kann, so teile man die einzelne Mafszahl y durch das korrespondierende x und nenne den Quotienten X. Nun trage man X und y im Quadratnetz als Koordinaten ab; läuft alsdann eine Gerade durch die abgesteckten Punkte hindurch, so haben wir solch' ein Gesetz $X = A + By$ oder $\frac{y}{x} = A + By$ oder $y = \frac{Ax}{1 - Bx}$, eine Gleichung, die offenbar wieder das Gesetz (1) darstellt.

Auch in vielen anderen Fällen können wir die „*Methode des gespannten Fadens*“ anwenden, um zu prüfen, ob ein Gesetz mit nur zwei Konstanten Geltung hat.

So mag z. B. die Expansionskurve in dem Indikatordiagramm einer Gasmaschine betrachtet werden. Für viele Zwecke ist es wichtig, eine empirische Gleichung zwischen dem Drucke p und dem Volumen v zu besitzen. Ich habe immer gefunden, dafs die folgende Regel $\boldsymbol{pv^s = C}$, wo s und C zwei Konstante sind, mit einem ausreichenden Grade der Genauigkeit als gültig angesehen werden kann. Es ist nicht sehr wichtig, den Wert von C zu kennen; dagegen ist, falls ein solches Gesetz besteht, der Wert von s von grofser Bedeutung*).

---

*) Ich kenne keinen physikalischen Grund für die Annahme, dafs die im Texte genannte Formel zutreffend ist. Zuerst dachte ich, dafs vielleicht alle diejenigen empirisch gezeichneten Kurven, die ungefähr die Gestalt von Hyperbeln haben, sich angenähert dem Gesetze $yx^n = C$ fügen würden; doch fand ich bald, dafs diese Vermutung keineswegs richtig war.

Im Zusammenhange hiermit sind die folgenden Erfahrungen erwähnenswert. Finden meine Schüler bei der Durchrechnung des im Texte genannten Gesetzes, dafs $\log p$ und $\log v$ als Koordinaten keine Gerade liefern, so zeigt sich jedesmal, dafs sie die Gröfse des „schädlichen Raumes“ falsch eingesetzt haben. Zu grofser bez. zu kleiner „schädlicher Raum“ liefert Resultate, die nach entgegengesetzten Seiten von der geraden Linie abweichen.

Übrigens ist wirklich bei vielen Rechnungen der Gebrauch einer empirischen Formel sehr nützlich. Hat man keine solche Formel, so mufs man mit der graphisch vorliegenden Kurve selber arbeiten und diejenigen Regeln anwenden, nach denen man eine Tangente an die gezeichnete Kurve zieht. Zur Beurteilung der Ungenauigkeit dieser letzteren Methode ist es aber sehr lehrreich, wenn man eine Anzahl von Studierenden dieselbe Kurve zeichnen und auf ihr dieselben zwei Punkte markieren läfst, und wenn man ihnen dann aufgiebt,

Um zu prüfen, ob jene Regel gilt, trage man $\log p$ und $\log v$ wieder als Punktkoordinaten im Quadratnetz auf (wobei man übrigens die gemeinen Logarithmen brauchen kann). Liegen die so gewonnenen Punkte nahehin in einer Geraden, so sehen wir, daſs eine Relation von der Gestalt:

$$\log p + s \log v = c$$

gilt, in welcher s und c Konstanten bedeuten; und also gilt unter diesen Umständen die vorhin angenommene Regel $pv^s = C$.

Wünschen wir eine Formel zu prüfen, welche drei unabhängige Konstanten enthält, so können wir dieselbe oft auf folgende Gestalt:

$$Av + Bw + Cz = 1 \tag{2}$$

bringen, wo v, w, z in irgend einer Weise x und y enthalten. So haben wir, um $y = \frac{a + bx}{1 + cx}$ zu prüfen:

$$y + cxy = a + bx \quad \text{oder} \quad \frac{y}{a} + \frac{c}{a}xy - \frac{b}{a}x = 1.$$

Hier steht also y an Stelle von v, xy für w, und x ist das, was oben z hieſs.

Gilt die Gleichung (2), und werden v, w, z als Punktkoordinaten im Raume gedeutet, so müssen alle entspringenden Punkte in einer Ebene liegen. Vermittelst dreier Seiten eines hölzernen Kastens und einer Anzahl von Kügelchen an den Enden von zugespitzten Drahtstiften kann man das direkt prüfen. Um die fragliche Ebene wirklich zu finden, tauche man die Vorrichtung in einen Behälter mit Wasser und versuche, ob man die Kügelchen in eine solche Lage bringen kann, daſs sie alle in der Wasseroberfläche gelegen sind. Ich habe auch eine der darstellenden Geometrie entnommene Methode zur Bestimmung der Ebene in Anwendung gebracht; doch habe ich noch keine Methode gefunden, welche sich mit derjenigen des gespannten Fadens in den oben betrachteten Fällen an Einfachheit vergleichen könnte.

Übrigens giebt es keine ein für alle Mal gültige feste Regel, nach welcher man die Geltung irgend einer empirischen Formel für beobachtete Zahlwerte prüfen könnte. Auch darf der Lernende nicht vergessen, daſs seine Formel nur eine empirische ist, und daſs er mit derselben nicht so umgehen darf, als habe er in ihr ein Naturgesetz von absoluter Strenge entdeckt.

Gelingt es nicht, eine einfache Formel für ein empirisches Gesetz zu finden, so mache man einen Versuch mit dem Ansatze:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

weil man bekanntlich durch eine solche Gleichung mit hinreichend vielen Gliedern kleinere Teile irgend welcher vorgelegten Kurve näherungsweise darstellen kann. Sind in einem Ausdruck mehr als zwei Konstanten enthalten, so können wir auch deren Werte in vielen Fällen durch eine sorgfältige Anwendung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate finden.

Um zu untersuchen, ob der Druck p und die in Celsiusgraden gemessene Temperatur θ gesättigten Dampfes durch die Relation:

$$p = a(\theta + \beta)^n \tag{3}$$

verbunden sind, hat man die drei Konstanten a, β, n zu bestimmen. Der einzig erfolgreiche Weg, den ich hierbei habe gehen können, ist der, daſs ich zunächst

---

daſs jeder an seiner Kurve in jenen beiden Punkten die Tangenten zieht und den Winkel zwischen diesen miſst. Es ist erstaunlich, was für verschiedene Linien sie dabei ziehen, und welche verschiedenen Winkel sie erhalten. Man lasse sie überdies noch den Krümmungsradius der Kurve an einer einzelnen Stelle messen, und die Resultate werden noch weiter auseinander gehen.

β nach Gutdünken annehme. Ich weifs, dafs β nahehin den Wert 40 hat. Ich lasse also einen Studierenden mit $\beta = 40$ arbeiten, einen zweiten mit $\beta = 41$, einen dritten mit $\beta = 39$ u. s. w. Das Ziel ist dabei, diejenige Relation (3) ausfindig zu machen, welche eine möglichst genaue Darstellung der Beziehung zwischen p und θ liefert etwa im Intervall zwischen $p = \frac{1}{2}$ kg auf 1 qcm und $p = 10$. Derjenige, bei dem sich die Punkte der Koordinaten $x = \log p$, $y = \log(\theta + \beta)$ am genauesten auf einer Geraden anordneten, hatte den besten Wert β benutzt. Diese Methode kann von beanlagten Studierenden noch weiter ausgebildet werden*).

*) Bei den praktischen Untersuchungen und Beobachtungen des Ingenieurs gelangt man oft zu mathematischen Ausdrücken, die man wegen ihrer Kompliziertheit nicht wohl für richtig halten kann; denn die Naturgesetze sind meistens auch mathematisch einfach zu formulieren. Dann kann man aber häufig eine einfache *empirische Formel* aufstellen, welche die gefundenen Ausdrücke (wenigstens innerhalb der in Frage kommenden Grenzen) mit einer ganz geringen Abweichung ersetzt. Zuweilen kann sogar eine so einfache Funktion wie $a + bx$ oder x^a einen komplizierten Ausdruck mit nur ganz geringem Fehler ersetzen. Einige Gewandtheit in solchen Vereinfachungen kann man sich leicht erwerben, besonders bei solchen Berechnungen, wo einige der Ausdrücke numerisch festgestellt werden können, oder bei denen man von vornherein mit Zahlenwerten arbeitet:

Aufgabe 1. Von den folgenden, durch Beobachtungen gefundenen Zahlen wisse man, dafs sie einem Gesetze von der Form $y = a + bx$ folgen, aber auch, dafs Beobachtungsfehler in ihnen enthalten sind. Mit Hülfe von quadriertem Papier mögen nun die wahrscheinlichsten Werte für a und b gesucht werden.

x	2	3	$4\frac{1}{2}$	6	7	9	12	13
y	5,6	6,85	9,27	11,65	12,75	16,32	20,25	22,33

Lösung: $y = 2{,}5 + 1{,}5\,x$.

Aufgabe 2. Von den nachstehenden Zahlen vermute man, dafs sie einem Gesetze von der Form $y = \frac{ax}{1 + sx}$ folgen. Man trage die Werte für $\frac{y}{x}$ und y auf Millimeterpapier ein und sieht dann, dafs diese einem Gesetze: $\frac{y}{x} + sy = a$ folgen; so findet man die wahrscheinlichsten Werte für a und s.

x	0,5	1	2	0,3	1,4	2,5
y	0,78	0,97	1,22	0,55	1,1	1,24

Lösung: $y = \frac{3x}{1 + 2x}$.

Aufgabe 3. Zwischen dem Drucke p (in kg pro qcm) und dem Volumen v eines Kilogramm gesättigten Wasserdampfes (in cbm) seien experimentell folgende Beziehungen gefunden:

p	0,5	1,0	2,0	4,0	7,0	11,0	15,0
v	0,3297	1,717	0,8960	0,4673	0,2763	0,1807	0,1351

15. Wir haben uns nun daran zu erinnern, daſs, falls $y=a+bx$ ist, $\frac{dy}{dx}=b$ gilt, und daſs umgekehrt aus $\frac{dy}{dx}=b$ sich $y=A+bx$ ergiebt, wo A eine unbestimmte Konstante ist.

Wir wollen diese Angaben jetzt auf dem Wege der Rechnung bestätigen.

Es sei $y=a+bx$. Man wähle einen speziellen Wert x und berechne das zugehörige y. Man wähle jetzt den um Δx gröſseren Wert $x+\Delta x$, dem der Wert $y+\Delta y$ entspreche:

$$y+\Delta y=a+b(x+\Delta x).$$

Durch Subtraktion der Gleichung $y=a+bx$ gewinnt man

$$\Delta y=b\Delta x \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=b;$$

und so klein auch Δx und Δy werden mögen, immer ist ihr Quotient gleich b; wir schreiben in diesem Sinne $\frac{dy}{dx}=b$, wobei wir die Werte Δx und Δy in dem Falle, daſs sie immer kleiner und kleiner werden sollen, mit der besonderen Bezeichnung dx und dy belegen.

Wir tragen nun die Briggischen Logarithmen von p und v auf Millimeterpapier ein und suchen nachzuweisen, daſs für v und p die Beziehung gilt:

$$p\cdot v^{1,0646}=1,7610.$$

Aufgabe 4. Die untenstehenden Zahlen sind Resultate von Experimenten, deren jedes 4 Stunden dauerte.

J ist die indizierte Leistung einer Dampfmaschine (in Pferdestärken), von welcher B P.S. auf zwei Dynamomaschinen übertragen wurden. Die Dynamomaschinen leisteten eine elektrische Nutzarbeit von E P.S. Pro Stunde wurden W kg Dampf verbraucht und C kg Kohlen verbrannt (die Leistung der Maschine wurde durch Änderung des Dampfdruckes reguliert). Nun möge man nachweisen, daſs näherungsweise die folgenden Beziehungen gelten:

$$W=364+9,55\,J;\quad B=0,95\,J-18;\quad E=0,93\,B-10;\quad C=1,91\,J-28.$$

J	B	E	W	C
190	163	143	2180	332
142	115	96	1715	248
108	86	69	1400	176
65	43	29	980	99
19	0	0	555	—



16. Bei der Kurve der Figur 6 liegt eine **positive Steigung** (*Wachstum* des y mit wachsendem x) in den Teilen AB, DF, HI und eine **negative Steigung** (*Abnahme* des y mit wachsendem x) in den Teilen BD und FH vor. An den Stellen B und F ist die

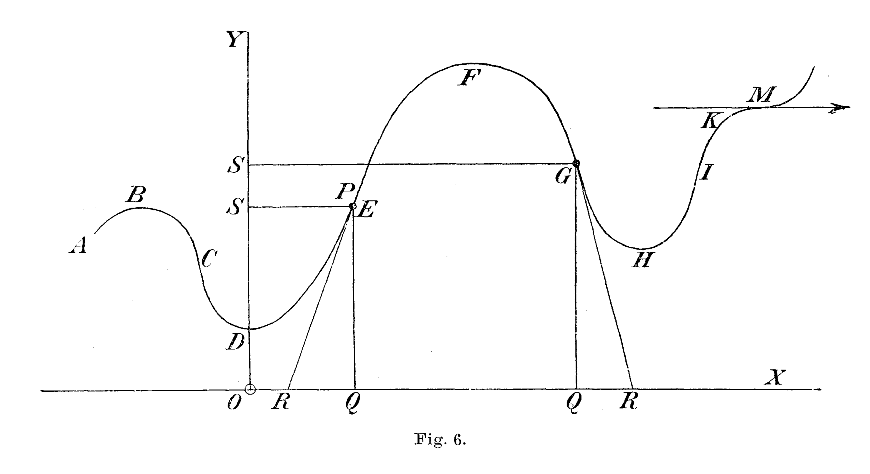


Fig. 6.

Steigung gleich 0; an jeder derselben wird y zu einem **Maximum**. Die Steigung ist gleichfalls gleich 0 bei D und H, wo jedesmal ein **Minimum** von y vorliegt. Bis zum Punkte E wächst die Steigung, von da an nimmt sie wieder ab; bei E hat man einen **Wendepunkt** der Kurve.

Wünschen wir die Steigung unserer Kurve an einer Stelle P kennen zu lernen, so wählen wir zunächst nahe bei P einen Punkt F der Kurve. (Man stelle sich vor, dafs jenes Kurvenstück PF tausendfach vergröfsert in Figur 7 gezeichnet sei.) Man setze $\overline{PS} = x$, $\overline{PQ} = y$; $\overline{NF} = x + \varDelta x$, $\overline{FL} = y + \varDelta y$, so dafs $\overline{PM} = \varDelta x$, $\overline{FM} = \varDelta y$ wird. Alsdann ist $\overline{FM} : \overline{PM}$ oder $\varDelta y : \varDelta x$ die *mittlere* Steigung zwischen P und F. Dieselbe ist $=$ tang $\sphericalangle FPM$. Man führe nun dieselbe Konstruktion für einen Punkt F' aus, der näher an P liegt, dann

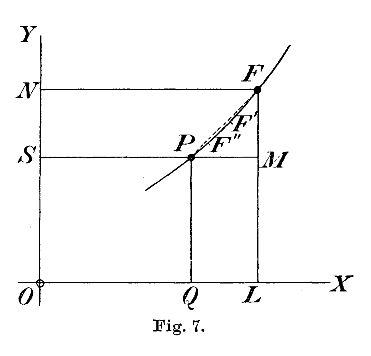


Fig. 7.

für einen noch näher gelegenen Punkt F'', u. s. w. Man überlege, dafs die Geraden FP, $F'P$, $F''P$, $\cdots$ sich mehr und mehr der Richtung der Tangente unserer Kurve im Punkte P annähern. Es

ist nun in jedem Falle $\Delta y : \Delta x$ die Tangente desjenigen Winkels, welchen die Gerade FP oder $F'P$ oder $F''P \cdots$ gegen eine horizontale Gerade bildet; und wir erkennen so, dafs wenn wir uns mit den Punkten F der Stelle P *unbegrenzt* annähern, die Steigung der Kurve oder der Betrag von $\frac{dy}{dx}$ für die Stelle P gleich der Funktion tangens desjenigen Winkels ist, den die Kurventangente in P mit der positiven X-Axe bildet. Wollen wir somit an Stelle einer rohen Beurteilung der Steigung nach Augenmafs, wie wir sie bei Diskussion von Figur 6 ausführten, eine genauere Bestimmung der Steigung an der einzelnen Stelle P unserer Kurve ausführen, so gelten folgende Gesichtspunkte. Man bemerke erstlich, dafs die *Steigung* unabhängig von der Lage der X-Axe ist, wenn letztere nur eine horizontale Gerade ist; man darf dieserhalb bei Anwendung des entwickelten Verfahrens die X-Axe immer *unterhalb* desjenigen Teiles der Kurve annehmen, für welchen man die Steigung untersuchen will. Man ziehe die Tangente PR der Kurve (cf. Figur 6), welche die X-Axe in R erreichen mag; dann ist die Steigung einfach $= \text{tang} \sphericalangle PRX$. Hält man bei der Konstruktion und Bezeichnung der Figur immer an der gegebenen Vorschrift fest, so ist $\sphericalangle PRX$ spitz, so lange die Steigung positiv ist; dagegen fällt dieser Winkel überall stumpf aus, wo die Steigung negativ ist.

Man wolle fortan daran festhalten, dafs unter „Steigung" einer Kurve an einer Stelle das Verhältnis des augenblicklichen Anwachsens von y zu demjenigen von x verstanden ist, und dafs wir mit dieser *Steigung* nichts anderes meinen als tang $\sphericalangle PRX$ (siehe die Figur 6). Eben dies ist denn auch die Bedeutung des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ oder, wie wir sagen, **„des Differentialquotienten von y in Bezug auf x"**; alle diese Ausdrücke bezeichnen eine und dieselbe Gröfse.

Jeder weifs, was gemeint ist, falls man beim Wandern im hügeligen Terrain sagt, die **Steigung** sei wechselnd, sie nehme ab oder sie nehme zu. In dieser Vorstellung besitzt man aber bereits die Grundidee der Differentialrechnung.

17. Wir alle wissen, was es heifst, wenn wir in einem Eisenbahnzuge sagen, **„die Geschwindigkeit sei 60 km pro Stunde"**. Meinen wir, dafs wir in der voraufgehenden Stunde 60 km gefahren seien oder in der nächsten diese Entfernung zurücklegen werden? Gewifs nicht! Wir haben vielleicht erst vor 10 Minnten den Bahnhof verlassen, vielleicht mufs der Zug in der nächsten Sekunde infolge eines Zwischenfalls halten. Was wir meinen, ist vielmehr dies, dafs der letzte Kilometer in einer Minute durcheilt ist oder, noch richtiger,

die letzte Strecke von 0,0006 km in 0,00001 Stunde. Aber das ist auch noch nicht ganz exakt; wir müssen kleinere und kleinere Entfernungen nehmen und jedesmal durch die korrespondierende Zeit teilen, erst so nähern wir uns dem genauen Werte der augenblicklichen Geschwindigkeit.

Für den freien vertikalen Fall eines Körpers gelten folgende tabellarisch zusammengestellte Angaben über die Fallräume und Fallzeiten. Die Zeitintervalle sollen 0,1 bez. 0,01 und 0,001 Sekunden vom Beginn der vierten Sekunde nach dem Anfange des Fallens sein; die in diesen Zeitteilchen durchmessenen Strecken sind in der zweiten Zeile angegeben. Jede derselben, geteilt durch das korrespondierende Zeitintervall, giebt die mittlere Geschwindigkeit während dieses Intervalls.

Zeitintervall in Sekunden	0,1	0,01	0,001
Fallraum in Metern . . .	2,992 593	0,294 844	0,029 440
Mittlere Geschwindigkeit	29,926	29,484	29,440

Wir sehen, dafs, je kleiner das Zeitintervall zu Anfang der vierten Sekunde nach Beginn des Fallens gewählt wird, sich die mittlere Geschwindigkeit während dieses Zeitintervalles um so mehr dem genauen Werte der Geschwindigkeit am Ende der dritten Sekunde annähert, welche noch genauer gleich 29,435 Meter pro Sekunde ist.

Die richtige Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit können wir finden, falls wir das Gesetz zwischen dem Fallraume s und der Falldauer t, wie es sogleich angegeben werden soll, kennen. Dieses wohlbekannte Gesetz des freien Falles lautet:

$$\mathbf{s = 4{,}905 \cdot t^2.}$$

Hat t irgend einen gegebenen Wert, so können wir das zugehörige s berechnen. Nimmt jetzt t einen etwas gröfseren Wert $t + \Delta t$ an (hier ist Δt ein Symbol für ein kleines Zeitteilchen, keineswegs ist $\Delta \cdot t$ gemeint, was etwas ganz anderes ist), und nennen wir den zur Falldauer $t + \Delta t$ gehörenden Fallraum $s + \Delta s$, so ist:

$$s + \Delta s = 4{,}905 \cdot (t + \Delta t)^2 \quad \text{oder} \quad = 4{,}905 \cdot [t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2].$$

Durch Subtraktion folgt $\Delta s = 4{,}905 \cdot [2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2]$; und diese Formel erlaubt uns, die Strecke Δs, welche während des Zeitintervalls von t bis $t + \Delta t$ durchmessen ist, genau zu berechnen. Die mittlere Geschwindigkeit während dieses Intervalles ist $\Delta s : \Delta t$ oder:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}81\, t + 4{,}905\, \Delta t.$$

Man bemerke, daſs diese Formel, abgesehen von den nur auf 2 bezw. 3 Dezimalstellen angegebenen Koeffizienten, exakt ist; irgend eine weitere Vernachlässigung ist bei ihr nicht vollzogen.

Wir gelangen nun zum wichtigsten Grundbegriffe unserer Betrachtung: wird Δt kleiner und kleiner, so nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mehr und mehr dem Werte $9{,}81\,t$ an, da das andere Glied $4{,}905\,\Delta t$ kleiner und kleiner ausfällt; in diesem Sinne sagen wir, daſs **beim Grenzübergange** $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ genau gleich $9{,}81 \cdot t$ werde. Der Grenzwert von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bei kleiner und kleiner werdendem Δt wird durch $\frac{ds}{dt}$ bezeichnet und ist das „Verhältnis des Anwachsens von s zu dem von t“ oder der „Differentialquotient“ von s inbezug auf t; physikalisch gesprochen heiſst derselbe die „Geschwindigkeit zur Zeit t“.

Es ist eigentlich gar nicht so schwer, den Begriff des „*Grenzwertes*“ aufzufassen. Man begegnet der Meinung, daſs die angegebenen Formeln nur näherungsweise richtig seien. Viele kommen zu dieser Auffassung, weil ihre Lehrer Ausdrücke brauchen, wie „man vernachlässige $4{,}905 \cdot \Delta t$, weil dieser Betrag klein ist“ oder sie sagen gleich ohne jede nähere Erklärung des Grenzbegriffs „man lasse dt einen unendlich kleinen Zuwachs der Zeit bedeuten“; und trotzdem dividieren sie eine andere Gröſse dadurch. Sie zeigen damit, daſs sie, wenn sie auch das Alter des Methusalem erreichen mögen, niemals die klare Auffassung, welche den wissenschaftlich durchgebildeten Ingenieur macht, erreichen werden.

Eine andere Unklarheit haben die verschuldet, welche sagen: „man setze $\Delta t = 0$; dann hat $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder $\frac{ds}{dt}$ den und den Wert“. Die genaue Ausdrucksweise ist: „falls Δt ohne Ende kleiner und kleiner wird, nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mehr und mehr dem Grenzwerte $9{,}81 \cdot t$“; und wie ich schon ausführte, benutzt man den wichtigen Begriff der Grenze in praxi tagtäglich.

Falls wir aus dem Gesetze, welches s und t verknüpft, den Wert $\frac{ds}{dt}$ oder die Geschwindigkeit bestimmen, so sagen wir, daſs wir s inbezug auf die Zeit t **differenzieren.** Ist $\frac{ds}{dt}$ gegeben und s als Funktion von t gesucht, kehren wir also den Prozeſs der Differentiation um, so bezeichnen wir diese Operation als **Integration.**

Würde ich eine Vorlesung halten, so würde ich noch länger bei der Ausgestaltung des Begriffs eines Verhältnisses, den die Hörer



bereits mitbringen, verweilen und würde noch durch manches Beispiel meine Auffassung versinnlichen. Aber man nimmt in einer Vorlesung eine Auseinandersetzung noch aufmerksam hin, die in einem Buche bereits höchst langweilig wird. Ich mache dieserhalb aus der Not eine Tugend und bemerke, dafs meine Leser für sich selber meine oben entwickelte Auffassung sich vollständig klar veranschaulichen können, falls sie nur ein wenig über dieselbe nachdenken wollen. Schliefslich ist mein Hauptziel, meine Leser dahin zu bringen, dafs sie nicht mehr, wie leider noch viele Ingenieure, vor den Differential- und Integralzeichen, $\frac{dy}{dx}$ und $\int y\,dx$, Angst bekommen.

18. Es seien s und t für irgend eine Bewegung gegeben, und zwar vermöge einer Zahlentabelle. Wie untersucht man diese Bewegung näher? Man nehme z. B. das Reichskursbuch zur Hand, welches auf der Strecke Frankfurt-Basel nicht weniger als 86 Stationen angiebt. Die Angaben der folgenden Tabelle, welche einen auf jener Strecke verkehrenden Zug betreffen, sind so zu verstehen: s ist die ab Frankfurt zurückgelegte Strecke in km, t sei in Stunden und Minuten gemessen.

s	0	3,7	7,2	10,7	13,8	16,7	18,6	20,8	22,6	27,3	27,3	...
t	$3^h 57'$	$4^h 6'$	$4^h 12'$	$4^h 19'$	$4^h 25'$	$4^h 31'$	$4^h 36'$	$4^h 41'$	$4^h 46'$	$4^h 53'$	$5^h 3'$	...

Man kann nun nach folgender Methode verfahren: Man trage die Werte t (beginnend mit $3^h 57'$) auf einem Bogen Millimeterpapier als Abscissen, die Werte s aber als Ordinaten auf und zeichne die durch die Punkte (s, t) hindurchlaufende Kurve.

Die *Steigung* der Kurve an irgend einer Stelle stellt die Geschwindigkeit des Zuges in einem Mafsstab dar, welcher von den bei s und t benutzten Mafsstäben abhängt.

Man suche die Stellen auf, wo die Geschwindigkeit grofs ist, und die, wo sie klein ausfällt. Zwischen $t = 4^h 53'$ und $t = 5^h 3'$ ist die Geschwindigkeit gleich 0; da hat der Zug eben stillgestanden. Um genaue Werte der Geschwindigkeit zu bekommen, müfste man die Werte s für alle Werte der Zeit t geben und nicht nur für einige wenige. Das kann nicht mehr durch eine Zahlentabelle, sondern nur noch durch die Kurve gemacht werden. Damit soll jedoch nicht gesagt sein, dafs die Tabelle nicht für viele Zwecke brauchbarer sei als die Kurve.



Würde der Zug an irgend einer Stelle halten und dann rückwärts fahren in der Richtung auf Frankfurt, so würden wir eine „negative Steigung“ unserer Kurve und damit einen negativen Wert der Geschwindigkeit gewinnen.

Man bemerke, dafs die **Beschleunigung**, als Verhältnis des Anwachsens der Geschwindigkeit zum Anwachsen der Zeit, gegeben ist durch das Verhältnis des Anwachsens der Steigung unserer Kurve zum Anwachsen der Zeit. Nichts hindert, in dem eben gebrauchten Quadratnetz auch noch eine Kurve aufzuzeichnen, welche uns in jedem Augenblick die **Geschwindigkeit** des betrachteten Zuges darstellt. Die Steigung dieser neuen Kurve liefert uns alsdann offenbar die Beschleunigung. Übrigens können wir uns freuen, dafs bislang noch niemand dem Differentialquotienten der Beschleunigung einen besonderen Namen gegeben hat.

Wir stellen hier die gebräuchlichen Bezeichnungsweisen zusammen:

s und t bedeuten Weg und Zeit;

die Geschwindigkeit wird durch v oder $\frac{ds}{dt}$ oder $\dot{s}$ in Newtons Schreibweise bezeichnet;

die Beschleunigung ist durch $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2s}{dt^2}$ oder nach Newton durch $\ddot{s}$ gegeben;

der Differentialquotient der Beschleunigung würde $\frac{d^3s}{dt^3}$ sein.

Man halte daran fest, dafs die symbolische Bezeichnung $\frac{d^2s}{dt^2}$ der Beschleunigung nicht das geringste mit dem algebraischen Ausdrucke $\frac{d^2 \cdot s}{d \cdot t^2}$ gemein hat. Durch das Symbol $\frac{d^2s}{dt^2}$ wird blos zum Ausdruck gebracht, dafs wir s zweimal nach der Zeit t differenziert haben.

Wir stellten bereits fest, dafs die Steigung einer Kurve durch eine Tangentenkonstrnktion gefunden werden kann; hiernach ist es ein Leichtes, die Beschleunigung aus der Kurve für die Geschwindigkeit zu gewinnen.

19. Eine andere Methode, die noch besser ist als die auf Tangentenkonstruktion gegründete, liefert die Beschleunigung durch Rechnung; durch die nachfolgende Tabelle möge diese Methode kurz veranschaulicht werden:

t, gemessen in Sekunden	s, gemessen in Metern	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder v, gemessen in m : sec	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder Beschleunigung, gemessen in m : sec^2
0,06	0,00880		
		0,1474	
0,07	0,02354		— 1,25
		0,1349	
0,08	0,03703		— 1,27
		0,1222	
0,09	0,04925		— 1,27
		0,1095	
0,10	0,06020		— 1,29
		0,0966	
0,11	0,06986		— 1,31
		0,0835	
0,12	0,07821		— 1,31
		0,0704	
0,13	0,08525		

In einem noch nicht näher untersuchten Mechanismus mufste zu einem gewissen Zwecke für jede Lage eines Punktes A dessen Beschleunigung bestimmt werden. Bei einer solchen Aufgabe bestimme ich in üblicher Art erst seine Geschwindigkeit. Ich zeichne mir des besseren Überblicks halber eine Skizze und markiere die Stellen des Punktes A in regelmäfsigen Zeitintervallen. Daneben gebe ich des genaueren in einer Tabelle für den Beginn jedes Zeitintervalles die Länge der durch den Punkt A zurückgelegten Bahn, von einem festen Anfangspunkt gemessen, und nenne dieselbe s. Würde ich hier die Tabelle für die ganze Bahn des Punktes A, bis er seine Anfangsstellung wieder annimmt, wirklich mitteilen, so wäre das freilich noch lehrreicher; aber der Studierende kann sich auch selber eine solche Tabelle für irgend einen speziellen Mechanismus anlegen. So mag z. B. s die Entfernung eines Kolbens vom Ende seines Hubes sein. Natürlich wird ein theoretisch ausgebildeter Ingenieur sich bei dem beschriebenen Verfahren nicht aufhalten. Er kennt eine graphische Methode, welche ihm für den Kurbelmechanismus alle gewünschten Gröfsenverhältnisse sofort angiebt. Aber kennt er eine solche Methode für jeden möglichen Mechanismus? Und würde es auch nur der Mühe wert sein, eine solche graphische Konstruktion für jeden möglichen Mechanismus auszubilden? Demgegenüber ist die oben skizzierte Methode der naturgemäfse Weg, um die Beschleunigung irgend eines Punktes in einem Mechanismus zu finden, und ich bin der Meinung, dafs sich ihre Benutzung auch für den Praktiker empfehlen dürfte. Für den Anfänger ist sie unschätzbar.

Jetzt sei die Masse des Körpers, dessen Centrum A die betrachtete Bewegung beschreibt, gleich m (d. i. **das Gewicht des Körpers in Kilogramm, geteilt durch die Beschleunigung g der Schwere**)*). Multipliziert man alsdann die gefundene Beschleunigung, gemessen

*) Ich habe an anderer Stelle die Gründe auseinandergesetzt, warum ich in Büchern, die für Ingenieure bestimmt sind, die technische Einheit der Kraft, das Kilogramm gebrauche, und nicht die Dyne. Übrigens ist das technische Maſssystem ebensogut ein *absolutes*, wie das C.G.S.-System. Ich wende es seit zwanzig Jahren bei meinen Studenten an, und erreiche damit, daſs ihnen ihre Mechanik nicht eine bloſse Bücherweisheit bleibt, sondern auf die in der technischen Praxis auftretenden Fragen paſst, wie ein Handschuh auf die Hand. Dem Elektrotechniker ist das C.G.S.-System zwar ziemlich geläufig; aber mit dem Bauingenieur und Maschinenbauer in Dynen und Ergs zu rechnen, ist etwa dasselbe, als wenn man in einem Laden chinesisch sprechen wollte.

Im technischen Maſssystem ist die **Sekunde** die Einheit der Zeit, das **Meter** die Einheit des Weges und das **Kilogramm** die Einheit der **Kraft.** Um den Unterschied gegenüber dem physikalischen Maſssystem noch besser zu kennzeichnen, will ich hinzufügen: Als Einheit der Masse gilt diejenige Masse, welcher die Kraft 1 kg die Beschleunigung von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ erteilt.

Diese Masseneinheit, deren Gewicht in unseren Breiten 9,81 kg beträgt, hat übrigens keinen besonderen Namen; denn die Masse eines Körpers an sich interessiert den Ingenieur nicht; sie ist für ihn bloſs ein Rechnungsbegriff. Unsere Regel lautet einfach so: Bei allen Rechnungen der technischen Dynamik dividieren wir das Gewicht eines Körpers [in kg] durch 9,81. Dann erhalten wir seine Masse in technischen Einheiten, d. h. in solchen Einheiten, daſs die Endresultate für Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung etc. wieder in dem in der Technik gebräuchlichen Maſs auftreten (kg, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$, etc.).

Benutzt man dies technische Maſssystem nicht, so muſs man jedes Resultat erst noch mit bestimmten Koeffizienten multiplizieren oder dividieren, um es dem Praktiker überhaupt verständlich zu machen.

Man kann die Kraft auch deuten als den Quotienten aus einer geleisteten *Arbeit* (in mkg) und der zugehörigen *Weglänge* (in m), oder als Quotient einer erzeugten oder zerstörten *Bewegungsgröſse* und der dazu verbrauchten *Zeit.*

Beispiel 1. **Ein Hammer** von 1 kg Gewicht fällt mit einer Geschwindigkeit von 4,00 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ und kommt beim Aufschlagen in 0,001 Sekunden zur Ruhe. Wie groſs ist die mittlere Kraft des Stoſses? Hier ist die Masse $\frac{1}{9,81} = 0,1$; die zerstörte Bewegungsgröſse (Produkt von Masse und Geschwindigkeit) ist 0,4. Nun ist die Kraft gleich der pro Sekunde vernichteten Bewegungsgröſse, und also ist in unserem Falle die mittlere Kraft gleich $0,4 : 0,001 = 400$ kg.

Beispiel 2. Aus einer seitlichen Öffnung eines Wasserbehälters tritt ein Strahl vom Querschnitt 0,001 qm mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 4,00 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ (relativ zum Behälter). Welche Reaktionskraft übt dieser Strahl aus?

Es treten hier pro Sekunde 0,004 cbm, d. i. 4 kg Wasser aus. Die Masse dieses Quantums ist $4 : 9,81 = 0,4$, woraus sich die Bewegungsgröſse zu $0,4 \cdot 4 = 1,6$ ergiebt. Diese pro Sekunde erzeugte Bewegungsgröſse liefert uns direkt den **Reaktionsdruck auf den Behälter in kg.**

Der reifere Leser wird leicht erkennen, daſs die Reaktionskraft unabhängig davon ist, ob der Behälter sich bewegt oder nicht.

in $\mathrm{m} : (\mathrm{sec})^2$, mit m, so gewinnt man die auf den Körper ausgeübte Kraft, welche seine Geschwindigkeit *vergrößert*. Die Krafteinheit ist das Kilogramm.

20. Wir betrachteten bereits den freien Fall der Körper, bei welchem Fallraum und Zeitdauer durch das Gesetz $s = \frac{1}{2} g t^2$ verbunden waren, wo g die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet ($g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$). Aber es giebt noch viele andere Größenpaare, welche durch ein ähnliches Gesetz verknüpft sind, und ich will dasselbe allgemein:

$$\boldsymbol{y = a x^2}$$

schreiben. Man wähle einen speziellen Wert a, etwa $a = \frac{1}{30}$. Sodann setze man der Reihe nach $x = 0, 1, 2, 3, \cdots$ und berechne die zugehörigen Werte von y.

Man markiere die korrespondierenden Punkte (x, y) im Quadratnetz. Dieselben liegen auf einer Parabel. Für irgend eine Stelle der Kurve, etwa für $x = 3$, bestimme man durch Konstruktion der Tangente die Steigung derselben (die wir durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnen) und führe dasselbe bei $x = 4$, $x = 2, \cdots$ aus. Man zeichne sodann eine neue Kurve, indem man für die einzelnen Abscissen x jetzt die eben berechneten Werte der Steigung $\frac{dy}{dx}$ als Ordinaten abträgt. Diese Kurve zeigt unmittelbar (vermöge der Länge der einzelnen Ordinate), wie groß die Steigung der zuerst betrachteten Kurve ist. Man zeichne etwa die eine Kurve schwarz, die andere rot. Man stelle fest, daß die Steigung unserer Kurve an irgend einer Stelle das Produkt von $2a$ und der zugehörigen Abscisse x ist.

Letzteres Resultat können wir auch rechnerisch gewinnen. Einem ersten Werte x entspreche y. Wählt man jetzt die Abscisse etwas größer, etwa gleich $x + \Delta x$, so sei die zugehörige Ordinate $y + \Delta y$. Wir haben alsdann:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 = a[x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2].$$

Subtrahiert man hiervon $y = ax^2$, so folgt:

$$\Delta y = a[2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2]$$

und bei Division mit Δx weiter:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

Jetzt stelle man sich vor, daß Δx ohne Ende kleiner und kleiner wird, und brauche die symbolische Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für den Grenz-

wert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Wir gewinnen dabei $\frac{dy}{dx} = 2ax$, ein Ergebnis, das wir bereits aus unseren Kurven ablasen*).

21. Betrachten wir den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in seiner Abhängigkeit von x und wiederholen den Prozefs der Differentiation, so bezeichnen wir das Ergebnis durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ und erhalten im betrachteten Beispiele $2a$. Wir wollen diese symbolische Bezeichnung ausführlichst in Gebrauch nehmen, ohne dafs wir auf ihre etwas tiefer liegende Bedeutung einzugehen brauchen. Ist y eine Funktion von x, so ist $\frac{dy}{dx}$ das Verhältnis des augenblicklichen Anwachsens von y zu demjenigen von x; $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist das Verhältnis des Anwachsens von $\frac{dy}{dx}$ zu dem von x. Es ist hiernach $\frac{d^2y}{dx^2}$ der **Differentialquotient** von $\frac{dy}{dx}$ nach x, ebenso wie $\frac{dy}{dx}$ der Differentialquotient von y inbezug auf x ist.

Umgekehrt gilt: Man **integriere** $\frac{d^2y}{dx^2}$ und wird $\frac{dy}{dx}$ gewinnen; man integriere $\frac{dy}{dx}$ und findet y.

Ich denke, man wird sich leicht mit diesen Bezeichnungen und Begriffen vollständig vertraut machen. Nur bin ich besorgt, dafs,

---

*) *In allgemeinen Symbolen:* Man setze

(1) $$y = f(x),$$

wo $f(x)$ irgend eine Funktion von x bezeichnen soll. Man setze einen speziellen Wert x ein und berechne das zugehörige y. Sodann wähle man einen etwas gröfseren Wert $x + \Delta x$ und berechne den zugehörigen Wert $y + \Delta y$, gegeben durch:

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Subtrahiert man Gleichung (1) von (2) und teilt durch Δx, so folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Was wir unter $\frac{dy}{dx}$ verstehen, ist **der Grenzwert von** $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, falls Δx ohne Ende kleiner und kleiner wird. Das ist die exakte Definition von $\frac{dy}{dx}$, die selbst für schwächer beanlagte Studierende nicht schwer zu fassen und zu behalten sein dürfte. Übrigens sieht man leicht, dafs der Differentialquotient von $a \cdot f(x)$ das a-fache des Differentialquotienten von $f(x)$ ist, und dafs der Differentialquotient einer Summe $f(x) + F(x)$ gleich der Summe der Differentialquotienten von $f(x)$ und $F(x)$ ist.

wenn wir andere Buchstaben brauchen als die x's und y's, diese Vertrautheit verloren gehen könnte.

Der Differentialquotient von

$$y = a + bx + cx^2,$$

wo a, b und c konstante Gröfsen sind, ist

$$\frac{dy}{dx} = 0 + b + 2cx.$$

Das Integral von $0 + b + kx$ inbezug auf x ist $A + bx + \frac{1}{2}kx^2$, wo A eine willkürliche Konstante ist.

Entsprechend ist das Integral von $b + kz$ inbezug auf z gleich $A + bz + \frac{1}{2}kz^2$ und das Integral von $b + kv$ inbezug auf v gleich $A + bv + \frac{1}{2}kv^2$.

Es ist sehr leicht, als Übungsaufgabe auszurechnen, dafs die Funktion $y = ax^3$ den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = 3ax^2$ besitzt und $y = ax^4$ entsprechend $\frac{dy}{dx} = 4ax^3$. All' das sind Beispiele des allgemeinen Satzes, dafs für $y = ax^n$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$ lautet.

Bei der Berechnung dieser Beispiele halten wir daran fest, dafs doch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Grenzwert $\frac{dy}{dx}$ hatte, und dafs dementsprechend $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$ eine Näherungsformel für ohne Ende abnehmende Δx ist.

Man schreibt diese Näherungsformel vielfach auch so:

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}\Delta x,$$

oder auch

(1) $$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x.$$

22. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Für eine Bewegung sei die Beschleunigung konstant gleich a:

(1) $$\frac{d^2s}{dt^2} = a.$$

Durch Integration findet man die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{ds}{dt} = b + at.$$

Dabei haben wir eine Konstante b hinzugefügt, weil ja umgekehrt bei der Differentiation die Konstante b den Wert 0 liefert. Es müssen noch weitere Angaben vorliegen, damit wir im Stande sind, den Wert der Konstanten b anzugeben. In diesem Sinne sei bestimmt, dafs $v = v_0$

sei, wenn $t = 0$ ist. Dann ist offenbar $b = v_0$, sodafs die Geschwindigkeit gegeben ist durch:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + at. \tag{2}$$

Durch nochmalige Integration folgt:

$$s = c + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2,$$

wobei man bemerken wolle, dafs wir auch bei dieser zweiten Integration eine zunächst unbekannte Konstante c hinzuzusetzen haben. Um den Wert derselben finden zu können, müssen wir wieder eine bezügliche Angabe über die Bewegung besitzen. Möge dieserhalb zur Zeit $t = 0$ der Wert $s = s_0$ bekannt sein; dann ist $c = s_0$, und wir haben als vollständigen Ausdruck für die Bewegung:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2. \tag{3}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man rückwärts die Gleichung (2) und durch Differentiation dieser letzteren die Gleichung (1) wieder.

23. Der Studierende ist nun, **sobald er differenzieren und integrieren kann**, folgenden Arten von Aufgaben gewachsen.

I. Ist s als irgend eine Funktion der Zeit gegeben, so differenziere man und findet die Geschwindigkeit für irgend einen Augenblick; man differenziere nochmals und findet entsprechend die Beschleunigung.

II. Ist die Beschleunigung als eine beliebige Funktion der Zeit gegeben, so integriere man und findet die Geschwindigkeit; man integriere nochmals und findet den zurückgelegten Weg.

Man bemerke, dafs bei einer Winkelbewegung oder Drehung s statt der zurückgelegten Strecke auch den durchlaufenen Winkel bedeuten kann. Man wird unter diesen Umständen statt s besser θ schreiben. Dann ist $\frac{d\theta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit und $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ die Winkelbeschleunigung.

24. Übungsbeispiele über die Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

1) Die Beschleunigung durch die Schwere ist nach *unten* gerichtet und wird bekanntlich durch g bezeichnet; für unsere Breiten ist $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Wird ein Körper zur Zeit $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit V_0 vertikal aufwärts geworfen, so soll angegeben werden, wo er sich nach t Sekunden befindet. Wird s nach oben positiv gerechnet und



gilt $s = 0$ für $t = 0$, so ist die Beschleunigung gleich $-g$ zu nehmen, und man hat $s = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. (Wir nehmen hierbei an, daſs vom Luftwiderstand abgesehen wird, und daſs auch die Abnahme von g bei gröſser werdendem s auſser Betracht bleibt.)

Man bemerke, daſs $v = V_0 - g t$ ist, und daſs v verschwindet, falls $V_0 - g t = 0$ oder $t = \frac{V_0}{g}$ zutrifft. Man bestimme für diesen Zeitpunkt den Wert von s. Man hat alsdann den höchsten Punkt der Bahn und die Zeit, welche der Körper braucht, um diesen Punkt zu erreichen.

Wann ist s wieder $= 0$ geworden? Und welche Geschwindigkeit hat der Körper in diesem Augenblick?

2) Dem eben betrachteten Körper soll neben seiner vertikalen Geschwindigkeit jetzt auch noch eine horizontale Geschwindigkeit u_0 erteilt werden, welche dauernd dieselbe bleibt. Ist x der horizontale Abstand des Körpers vom Nullpunkt zur Zeit t, so gilt $\frac{d^2 x}{d t^2} = 0$, und man hat $\frac{d x}{d t} = u_0$ und also $x = u_0 t$, falls $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ zutrifft. Für die vertikal gerichtete Ordinate y des Körpers gelten die im ersten Beispiel für s ausgeführten Betrachtungen. Der Ort des Körpers ist somit für eine beliebige Zeit t gegeben durch:

$$x = u_0 t, \quad y = V_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2;$$

und man findet durch Elimination von t:

$$y = \frac{V_0}{u_0} x - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{u_0{}^2},$$

wodurch eine Parabel dargestellt ist.

3) Hat der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit V in einer Richtung, welche gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt ist, so haben wir $V \cdot \sin \alpha$ für V_0 und $V \cdot \cos \alpha$ für u_0 in obige Gleichungen einzutragen und können dann mit Hilfe derselben alle möglichen nützlichen Rechnungen über Wurfbewegung anstellen.

Man zeichne sich die Wurfbahn, wenn $V = 400 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $\alpha = 45^0$ gilt; desgl. für dieselbe Anfangsgeschwindigkeit und $\alpha = 60^0$ sowie für $\alpha = 30^0$.

25. Kinetische Energie.

Ein Massenteilchen, dessen Masse wir m nennen, habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und den Ort $s = 0$. Das Teilchen sei Angriffspunkt einer konstanten Kraft F, welche demselben die Be-



schleunigung $\frac{F}{m}$ erteilt. Nach Verlauf der Zeit t hat man für Geschwindigkeit und Ort, wie im vorigen Falle:

(1) $$v = v_0 + \frac{F}{m} t,$$

(2) $$s = 0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Die letztere Gleichung können wir auch so schreiben

$$s = \tfrac{1}{2} t \left(2 v_0 + \frac{F}{m} t\right);$$

vermöge der ersteren Gleichung folgt daraus leicht $s = \frac{1}{2} t (v_0 + v)$, worin der Satz enthalten ist, daſs die mittlere Geschwindigkeit in irgend einem Zeitintervall gleich dem arithmetischen Mittel aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit ist.

Legt nun das Massenteilchen den Weg s zurück, so hat die Kraft F dabei die „*Arbeit*" $F \cdot s$ geleistet. Berechnet man F aus (1) zu $F = (v - v_0) \frac{m}{t}$ und multipliziert mit s, so finden wir als Gröſse der geleisteten Arbeit $\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$; hier haben wir den im bewegten Körper aufgespeicherten Arbeitsvorrat als Funktion der Geschwindigkeit ausgedrückt. In der That wächst infolge der geleisteten Arbeit der Ausdruck $\frac{1}{2} m v_0^2$ bis auf $\frac{1}{2} m v^2$ an; wir bezeichnen in diesem Sinne $\frac{1}{2} m v^2$ als die *kinetische Energie* des Massenteilchens.

Man kann diese Verhältnisse auch so darstellen: Das betrachtete Massenteilchen m habe zur Zeit t die Geschwindigkeit v und lege während des nächstfolgenden Zeitteilchens Δt den Weg Δs zurück, wobei während Δt infolge Einwirkung einer Kraft F die Geschwindigkeitszunahme Δv stattfinde. Nun ist die Kraft F gleich dem Produkt der Masse m und der Beschleunigung:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \text{und} \quad \Delta s = v \cdot \Delta t,$$

so daſs

$$F \cdot \Delta s = m v \Delta t \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot v \Delta v = \Delta E;$$

wir verstehen hierbei unter ΔE den während der Zeit Δt eintretenden Zuwachs der kinetischen Energie des Massenteilchens und haben also $\frac{\Delta E}{\Delta v} = m v$. Indessen werden die hiermit entwickelten Gleichungen erst exakt, wenn $\Delta s, \Delta t, \cdots$ ohne Ende klein werden: Es folgt somit $\frac{dE}{dv} = m v$ oder in Worten: „Der Differentialquotient von E inbezug auf v ist mv". Integrieren wir jetzt inbezug auf v, so folgt

$E = \frac{1}{2} mv^2 + c$, wo c eine Konstante ist. Man wird nun $E = 0$ setzen, wenn $v = 0$ ist; dann ist $c = 0$, und wir haben:

$$E = \frac{1}{2} mv^2.$$

Man übe sich noch weiter im Differenzieren und Integrieren für den Fall, daſs die Variabelen nicht x und y heiſsen. Gegenwärtig hatten wir $\frac{dE}{dv}$, wo früher $\frac{dy}{dx}$ stand. Hätten wir $\frac{dy}{dx} = mx$ gehabt, so wäre es gewiſs leichter gewesen, auf $y = \frac{1}{2} mx^2 + c$ zu schlieſsen; doch muſs man sich frei machen von der Schwäche des Anfängers, immer nur mit x und y differenzieren zu können.

26. Übungsbeispiele. Hat eine auf Zug beanspruchte **Spiralfeder** durch eine Kraft F **die Verlängerung** x erfahren, so ist $x = \frac{F}{a}$, wo a den Widerstand der Feder gegen Verlängerung bezeichnet. Allgemein wird man hier als die bei Verlängerung der Feder um Δx geleistete Arbeit das Produkt der Kraft und der Verlängerung Δx ansehen. Es wachse nun die Kraft stetig von Null bis F und entsprechend die Verlängerung von Null bis x. Welches ist die Spannungsenergie, die der Feder dadurch mitgeteilt wird?

Der Gewinn an Energie beim Übergange von x zu $x + \Delta x$ ist $\Delta E = F \cdot \Delta x$; hieraus folgt, wenn wir für F seinen Wert ax einsetzen, die genaue Gleichung $\frac{dE}{dx} = F = ax$ und damit für die Energie $E = \frac{1}{2} ax^2 + c$. Ist nun wieder $E = 0$ für $x = 0$, so ist $c = 0$, so daſs die aufgespeicherte Energie gegeben ist durch:

$$E = \frac{1}{2} ax^2 = \frac{1}{2} F \cdot x. \tag{1}$$

Bemerkenswert ist der Fall, daſs eine Masse M am freien Ende einer Spiralfeder vertikal schwingt. Befindet sich die Masse im Abstande x von der Ruhelage, so ist die potentielle Energie $\frac{1}{2} ax^2$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2} Mv^2$. Die **Gesamtenergie** ist sonach $\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} ax^2$.

Ist eine Kraft F dazu erforderlich, einem elastischen Stabe die Verlängerung oder Verkürzung x zu erteilen oder einer Stange die Durchbiegung x zu verleihen, und ist dabei $F = ax$, unter a eine gewisse Konstante verstanden, so ist die im Stabe aufgespeicherte Spannungsenergie oder potentielle Energie immer $\frac{1}{2} ax^2 = \frac{1}{2} F \cdot x$.

Wenn entsprechend ein *Drehmoment* T nötig ist, um einen Stab oder eine Spiralfeder oder dergleichen um einen Winkel θ zu verdrehen, und wenn dabei $T = a\theta$ gilt, unter a eine Konstante verstanden, so ist die gesammelte Spannungs- oder potentielle Energie $\frac{1}{2} a\theta^2 = \frac{1}{2} T\theta$.



Ist T in cmkg und θ in Bogenmafs ausgedrückt, so erhalten wir das Resultat in cmkg.

Geleistete Arbeit = Kraft · Weg oder = Drehmoment · Winkel.

27. Hat der Leser einige Kenntnisse in der Elektrizitätslehre, so wolle er das in der Formel:

$$\mathbf{V = RC + L \cdot \frac{dC}{dt}} \tag{1}$$

zum Ausdruck kommende erweiterte Ohmsche Gesetz in Worte kleiden.

Wenn R (Anzahl der Ohm) und L (Anzahl der Henries) konstant bleiben, und wenn die Stromstärke C und ihr Differentialquotient nach der Zeit $\frac{dC}{dt}$ bekannt sind, so läfst sich die elektromotorische Kraft V aus (1) bestimmen. Ist andrerseits das Gesetz der veränderlichen Spannung V bekannt, so mufs es sicherlich ein Mittel zur Bestimmung der zugehörigen veränderlichen Stromstärke C geben. Hierbei bedeutet L die auf der Selbstinduktion der Leitung beruhende gegenelektromotorische Kraft in Volt für die Stromänderung von 1 Ampère pro Sekunde.

Ist der Strom in der primären Spule eines **Transformators** und damit also auch die Induktion im Eisenkern unveränderlich, so tritt überhaupt keine elektromotorische Kraft in der sekundären Spule auf. In der That ist die elektromotorische Kraft in der letzteren Spule in irgend einem Augenblick gleich der Anzahl der Windungen dieser Spule, multipliziert mit dem auf die Sekunde bezogenen Zuwachs der Induktion. Dieser sekundliche Zuwachs von J ist aber das, was wir als Differentialquotient der Induktion J nach der Zeit bezeichnen.

Freilich ist L nur dann konstant, wenn entweder gar kein Eisen vorhanden ist, oder wenn die Induktion im Eisen nur gering ist; denn die genauere Gleichung ist:

$$V = RC + N\frac{dJ}{dt}. \tag{2}$$

Indessen hat man gefunden, dafs für die Praxis die Formel (1) mit konstantem L fast für alle Anwendungen ausreicht. (Vgl. Artikel 183.)

28. Ist $\boldsymbol{y = ax^n}$, und soll $\frac{dy}{dx}$ berechnet werden, so mufs ich leider voraussetzen, dafs der Leser den **binomischen Lehrsatz** kennt, wie er zum Ausdruck kommt in der Formel:

$$(x+b)^n = x^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}b^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3x^{n-3} + \cdots.$$



Man findet leicht durch direkte Ausrechnung, dafs diese Formel für $n = 2, 3, 4, 5$ thatsächlich richtig ist. Nimmt man jedoch $n = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ oder gleich einem anderen Bruche, oder ist n eine negative Zahl, so thut der Leser vielleicht besser, einfach meiner Versicherung zu glauben, dafs die angegebene Formel des Binomialsatzes, solange nur $\frac{b}{x}$ ein *echter* Bruch ist, in Gültigkeit bleibt.

Immerhin ist es gut, die Bedeutung dieses Theorems durch Bearbeitung einiger Beispiele sich klar zu machen. Man wähle erstlich $n = 2$, dann $n = 3$, $n = 4$ u. s. w. und verifiziere die Formel direkt durch Ausmultiplizieren. Hierauf setze man $n = -1$; um zu sehen, ob die in diesem Falle von der rechten Seite unserer Gleichung gelieferte Reihe wirklich zutreffend ist, erinnere man sich, dafs $(x + b)^{-1} = \frac{1}{x + b}$ ist, und dividiere einfach nach der Regel der Elementarmathematik mit $x + b$ in 1. Die entspringende Reihe ist für die vorhin angegebene Bedingung $-1 < \frac{b}{x} < +1$ in der That eine konvergente.

Wir wollen nun mit unserer neuen Funktion ax^n genau so operieren, wie oben mit ax^2.

Liefert die Zunahme $\varDelta x$ von x für die Funktion y den Zuwachs $\varDelta y$, so finden wir auf Grund des binomischen Lehrsatzes:

$$y + \varDelta y = a(x + \varDelta x)^n =$$
$$a\left[x^n + n \cdot \varDelta x \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (\varDelta x)^2 \cdot x^{n-2} + \cdots\right],$$

wo die ausgelassenen Glieder höhere Potenzen von $\varDelta x$ enthalten. Durch Subtraktion von $y = ax^n$ und Division durch $\varDelta x$ findet man weiter:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = a\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(\varDelta x)x^{n-2} + \cdots\right].$$

Nimmt nun $\varDelta x$ ohne Ende gegen Null ab, so behält nur das erste Glied rechter Hand einen von Null verschiedenen Wert, während die übrigen Glieder, die die Faktoren $\varDelta x$, $\varDelta x^2$, $\varDelta x^3$, ... aufweisen, die Grenze Null besitzen. Auf diese Weise folgt*):

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}}.$$

*) Ich bin von verschiedenen Seiten darauf aufmerksam gemacht worden, dafs ich einen Beweis der im Texte abgeleiteten Regel ohne Benutzung des binomischen Lehrsatzes hätte geben und den letzteren Lehrsatz dann einfach späterhin als Spezialfall der Taylorschen Reihe hätte bringen sollen. Bei aller

So ist der Differentialquotient von x^6 gleich $6x^5$, derjenige von $x^{2\frac{1}{2}}$ ist $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}$, derjenige von $x^{-\frac{3}{2}}$ aber $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$.

Die Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion heifst *Differentiation* derselben. Ist dagegen $\frac{dy}{dx}$ gegeben, so heifst der Übergang zu y *Integration*. Die Worterklärung dieser Benennungen „*Diffe-*

Hochachtung vor der Erfahrung meiner Kritiker glaube ich doch, dafs meine Methode die bessere ist; wenn mir auch bewufst ist, dafs der Leser meistens den Beweis des binomischen Satzes noch nicht kennt, so scheint mir doch die Annahme zulässig, dafs ihm der Inhalt dieses Satzes nicht unbekannt geblieben ist. Will man aber den binomischen Satz durchaus umgehen, so scheint mir folgender Entwicklungsgang am einfachsten:

Wir setzen:

$$y = x^n, \quad x + \varDelta x = x_1, \quad y + \varDelta y = y_1.$$

1) Es sei n eine positive ganze Zahl; alsdann gilt:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Vollziehen wir nun den Grenzübergang, dafs $\varDelta x$ unendlich klein wird, so wird x_1 schliefslich gleich x. Die linke Seite der letzten Gleichung wird $\frac{dy}{dx}$, und der Ausdruck auf der rechten Seite enthält n Glieder, die sämtlich gleich x^{n-1} werden, sodafs wir $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ erhalten.

2) Ist n ein positiver rationaler Bruch, so setze man $n = \frac{l}{m}$, wo l und m positive ganze Zahlen sind. Dann gilt:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\frac{l}{m}} - x^{\frac{l}{m}}}{x_1 - x} = \frac{z_1^l - z^l}{z_1^m - z^m},$$

falls wir $x^{\frac{1}{m}} = z$, $x_1^{\frac{1}{m}} = z_1$, $x = z^m$, $x_1 = z_1^m$ setzen. Nun wird:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{z_1^l - z^l}{z_1^m - z^m} = \lim \frac{(z_1 - z)\left(z_1^{l-1} + z_1^{l-2}z + \cdots + z^{l-1}\right)}{(z_1 - z)\left(z_1^{m-1} + z_1^{m-2}z + \cdots + z^{m-1}\right)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lz^{l-1}}{mz^{m-1}} = \frac{l}{m}z^{l-m} = nx^{\frac{l}{m}-1} = nx^{n-1}.$$

3) Ist n irgend eine negative Zahl, so schreibe man $n = -m$, wobei alsdann m wieder positiv ist. Man hat nun:

$$x_1^{-m} - x^{-m} = \frac{x^m - x_1^m}{x_1^m x^m}$$

und also:

$$\frac{x_1^{-m} - x^{-m}}{x_1 - x} = -\frac{1}{x_1^m x^m} \cdot \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}.$$

rential" und „*Integral*" dürfen wir übergehen; dieselben sind für uns einfach technische Ausdrücke.

Durch Differentiation von ax^n findet man nax^{n-1}. Integriert man somit nax^{n-1}, so folgt $ax^n + c$. Wir haben nämlich immer eine additive Konstante bei der Integration hinzuzufügen.

Häufig benutzen wir die Bezeichnungen:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1} \quad \text{und} \quad \int nax^{n-1} \cdot dx = ax^n.$$

Man beachte, dafs wir das Integralzeichen $\int$ *vor* und den Faktor dx *hinter* die Funktion setzen, welche in Bezug auf x integriert werden soll. Beide Bestandteile dürfen in den Integralformeln nie fehlen. Der Leser wolle sich an dieser Stelle noch keine Gedanken darüber machen, warum man gerade diese Symbole zur Bezeichnung der Integration braucht*).

Der Leser wird noch selber die Erfahrung machen, dafs es nicht schwer ist, eine gegebene Funktion zu differenzieren, und dafs sich die hierzu nötigen Regeln leicht erlernen lassen. Demgegenüber ist man beim Integrieren zunächst aufs Raten angewiesen, und hierbei

---

Der zweite Quotient rechter Hand liefert zufolge 1) oder 2) beim Grenzübergang $\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = mx^{m-1}$, mag m ganz oder gebrochen sein. Also folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}} \cdot mx^{m-1} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Die Regel $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ ist hiernach in jedem Falle bewiesen, mag n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl sein.

*) Hat man in einem technischen Bureau eine grofse Anzahl einzelner Werte zusammenzuzählen (wenn z. B. ein Ingenieur die Gewichtsziffern für jeden einzelnen Bestandteil eines grofsen Auftrages summiert, um die Frachtkosten zu ermitteln), so bezeichnen wir wohl diese Summe durch das Symbol Σw, wobei w die Einzelgewichte bedeutet. Wollen wir aber eine Summe *unendlich vieler unendlich kleiner Gröfsen* bezeichnen, so wenden wir an Stelle von Σ das langgezogene S in der Gestalt $\int$ an. Daraus würde hervorgehen, dafs ein Integral als eine Summe jener Art angesehen werden kann. In der That, verstehen wir unter y die Ordinate einer Kurve, so ist $y \cdot dx$ der Flächeninhalt eines gewissen sehr schmalen Streifens von der Grundlinie dx und der Höhe y, und $\int y\,dx$ würde dann die Summe unendlich vieler solcher Streifen darstellen, welche eine gewisse endlich ausgedehnte Fläche bedecken. Oder: ist Δm die Masse irgend eines sehr kleinen Teilchens eines Körpers und r der Abstand dieses Teilchens von einer festen Axe, so stellt $\Sigma r^2 \Delta m$ oder genauer $\int r^2 dm$ das Trägheitsmoment des ganzen Körpers inbezug auf die Axe dar. Letzteres kann man auch so schreiben $\int r^2 \sigma\, dV$, wenn dV ein Volumenelement des Körpers und σ die Dichtigkeit des Körpers in jenem Elemente ist.

vermag uns, so praktisch und geschickt wir auch sein mögen, lediglich die Erfahrung zu leiten. Die *Integration* ist keine direkte Operation, für die es eine ein für allemal gültige Rechnungsregel gäbe; man mufs vielmehr immer an bereits bekannte Differentialformeln anknüpfen und diese in Integralformeln umkehren. Es liegt hier in dieser Hinsicht ähnlich wie bei der direkten Operation der Potenzierung und der dazu entgegengesetzten indirekten Operation der Wurzelausziehung. Zum Glück braucht der Techniker nur sehr wenige Integrale und zumal nur solche, die wohlbekannt sind. Schliefslich kann er sich ja auch eine ausführliche Tabelle der Integrale anlegen und sich dann immer auf diese beziehen; besser ist es freilich, wenn er die Integrationen selber ausführen kann.

Dafs man übrigens gerade den Ausdruck nax^{n-1} integrieren soll, kommt nicht häufig vor. Derselbe war zunächst für die Integration besonders geeignet gewählt. Für gewöhnlich hat man bx^m zu integrieren. Ich behaupte nun, dafs:

(1) $$\int bx^m dx = \frac{bx^{m+1}}{m+1}$$

zutrifft. Wie kann man das beweisen? Ich differenziere einfach die in (1) rechts stehende Funktion und gewinne bx^m, sodafs jene Funktion thatsächlich das Integral von $bx^m dx$ ist. Nur müssen wir in (1) rechter Hand noch eine Konstante hinzuaddieren, eine beliebige oder „willkürliche“ Konstante, wie wir sie nennen wollen; in der That ist ja der Differentialquotient einer solchen stets gleich 0. Der Leser wolle eine Reihe von Beispielen für die Regel (1) durchführen, so etwa folgende Funktionen x^7, bx^4, $bx^{\frac{1}{2}}$, $ax^{-\frac{1}{2}}$, $cx^{\frac{3}{2}}$, $ax^{\frac{1}{3}}$ der Integration unterwerfen. Wie in diesem Falle, so ist es überhaupt nicht praktisch, eine Tabelle von Differentialformeln einfach umgekehrt zu lesen und so als Integraltafel brauchen zu wollen; die so entspringenden Formeln sind so einfach, wie sie in praxi gewöhnlich nicht vorliegen. So ist z. B.

$$\int 4x^3 \cdot dx = x^4;$$

aber man hat nur selten gerade zu $4x^3$ das Integral zu bestimmen; viel eher kommt $3x^3$ oder $5x^3$ oder dergl. vor.

Die Differentialquotienten von x^3 oder x^2 oder x^1 oder x^0 *) sind

*) Ich nehme an, dafs der Leser die Formel $a^0 = 1$ kennt. Übrigens ist recht lehrreich, mit Hilfe von Logarithmen eine *sehr hohe Wurzel* aus irgend einer Zahl auszuziehen, um zu sehen, wie nahe der Zahlwert dieser Wurzel der Einheit 1 kommt. Eine hohe Wurzel aus a ist nun eine Potenz von a mit sehr kleinem Exponenten; je höher die Wurzel ist, um so mehr nähert sich der Potenzexponent dem Werte 0.

in der allgemeinen Formel $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ enthalten. In der That sei noch besonders hervorgehoben, dafs diese Formel auch für $n = 1$ und $n = 0$ gilt. Für $n = 1$ ergiebt sich der Differentialquotient $1 \cdot x^0$ oder 1, für $n = 0$ aber $0 \cdot x^{-1}$ oder 0. Doch haben wir kaum nötig, den schon bekannten Satz, dafs der Differentialquotient einer Konstanten gleich 0 ist, nochmals zu beweisen.

Wir wissen jetzt auch, dafs für die Funktion:

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots + gx^n$$

der Differentialquotient so lautet:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + b + 2cx + 3ex^2 + \cdots + ngx^{n-1};$$

hiermit haben wir die Mittel, wohl die Hälfte aller angeblich schwierigen Aufgaben zu behandeln, mit denen der Techniker zu thun hat.

Als die beiden wichtigsten Ergebnisse halte man folgende fest: Ist $y = ax^n$, so ist $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$; ist $\frac{dy}{dx} = bx^m$, so ist

$$y = \frac{b}{m+1} x^{m+1} + c \quad \text{oder} \quad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1} x^{m+1} + c,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist.

Ich bitte den Leser, für den ersten dieser beiden Sätze selbständig nach **Veranschaulichungen** zu suchen. Es hätte nicht viel Zweck, wenn ich selbst solche Beispiele bringen würde; sie würden mir die Sache klarer machen, weil ich sie selbst gefunden hätte, aber nicht dem Leser. Nur die folgende Rechnung möchte ich in Vorschlag bringen.

Man setze $y = x^5$, wähle $x = 1{,}02$ und berechne y durch Logarithmen. Sodann setze man $x = 1{,}03$ und berechne wieder y. Man teile den Zuwachs von y durch den Zuwachs 0,01 von x. Demnächst wähle man als zweiten Wert von x 1,021 und wiederhole den gleichen Prozefs, d. h. man ziehe von dem zugehörigen Werte y den zu $x = 1{,}02$ gehörenden Wert y ab u. s. w. Man setze ein drittes Mal 1,0201 als zweiten Wert x und verfahre wieder wie oben. Man wird finden, dafs die entstehenden Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dem genauen Werte $5 \cdot (1{,}02)^4$ des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ näher und näher kommen. Man wolle gerade so mit dem Beispiele $y = x^{0{,}7}$ verfahren.

Der Lernende braucht es nicht für Zeitverschwendung zu halten, wenn er einige Wochen an der selbständigen Durcharbeitung hierher gehöriger numerischer und graphischer Ausführungen thätig ist. Er

mufs eben den einfachen Grundsatz $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ nicht nur kennen, sondern mit demselben aufs vollständigste vertraut sein; und er mufs in derselben Weise die Formeln:

$$\int ax^s \cdot dx = \frac{a}{s+1} x^{s+1} + \text{Constans}, \int av^s \cdot dv = \frac{a}{s+1} v^{s+1} + \text{Constans}$$

beherrschen. Er übe diese Formeln ein für $s = 0{,}7$ oder 0,8 oder 1,1 oder -5 oder -8; er benutze für die Variabele auch andere Bezeichnungen als x und v.

29. Übungsaufgaben. Man berechne folgende Integrale:

$$\int x^2 dx, \quad (\text{Antwort } \tfrac{1}{3} x^3). \quad \int v^2 dv, \quad (\text{Antwort } \tfrac{1}{3} v^3).$$

$$\int v^{-s} dv, \left(\text{Antwort } \frac{1}{1-s} v^{1-s}\right). \quad \int \sqrt[3]{v^2} dv = \int v^{\frac{2}{3}} dv, \quad (\text{Antwort } \tfrac{3}{5} v^{\frac{5}{3}}).$$

$$\int t^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (\text{Antwort } 2t^{\frac{1}{2}}).$$

Die willkürlichen Konstanten sind in der Antwort immer ausgelassen.

Beim Integral $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx$ erleidet unsere bisherige Regel eine Ausnahme; sie ist für diesen Fall ungültig. Wir werden dieses Integral zunächst nur in einem einzigen Falle wirklich brauchen. Im zweiten Kapitel werden wir zeigen, dafs:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \log (x+a)$$

gilt, und dafs demnach umgekehrt aus $y = \log x$ folgen wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Schreiben wir v statt x, so würde auch $\int \frac{1}{v} dv = \log v$ folgen. Die Integrationskonstanten sind hier der Kürze halber wieder fortgelassen.

Ist $p = av^3$, so wird $\frac{dp}{dv} = 3av^2$; ist $v = mt^{-\frac{1}{2}}$, so hat man $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} mt^{-\frac{3}{2}}$.

30. Es sei $\boldsymbol{pv = Rt}$, wo R eine Konstante ist. Man rechne hier $\frac{dp}{dt}$ unter der Annahme eines konstanten v aus. Die Antwort ist $\frac{dp}{dt} = \frac{R}{v}$. Man bestimme umgekehrt $\frac{dv}{dt}$ bei konstant gedachtem p. Hier findet man $\frac{R}{p}$.

Der Leser weifs bereits, dafs die drei Variabelen p, v und t den Druck, das Volumen und die absolute Temperatur eines Gases be-

deuten. Es ist nun etwas umständlich, immer zu schreiben: „$\frac{dp}{dt}$, wenn v als konstant gilt“. Wir werden uns deswegen in diesem Falle, wo p als *Funktion der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Gröfsen v und t* aufzufassen ist, der besonderen Bezeichnung $\frac{\partial p}{\partial t}$ bedienen, welche anzeigen soll, dafs p bei konstantem v als Funktion von t allein differenziert werden soll.

Man berechne den entsprechend zu verstehenden Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial v}$. Da $p = Rt \cdot v^{-1}$ ist, so hat man $\frac{\partial p}{\partial v} = - Rtv^{-2}$, oder noch einfacher $\frac{\partial p}{\partial v} = - pv^{-1}$. Da $v = Rt \cdot p^{-1}$ gilt, so haben wir weiter $\frac{\partial v}{\partial p} = - Rt \cdot p^{-2}$, was sich zu $- vp^{-1}$ vereinfacht. Da endlich $t = \frac{v}{R} \cdot p$ ist, so gilt $\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{R}$.

Durch Multiplikation dieser Differentialquotienten entspringt übrigens die Gleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = - 1,$$

welche der Leser näher in Überlegung ziehen wolle.

Ist allgemein

$$u = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei unabhängigen Variabelen x und y, so werden wir die Bezeichnung $\frac{\partial u}{\partial x}$ gebrauchen für den Differentialquotienten von u inbezug auf x, berechnet **bei einem als konstant angesehenen** y. Die analoge Bedeutung hat natürlich $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Wir sprechen in diesem Sinne von einem **partiellen Differentialquotienten** von u nach x resp. y.

31. Hier gelangen wir nun zu einem Satze, der wegen seiner späteren Anwendung höchst wichtig ist und dieserhalb vom Studierenden an zahlreichen Beispielen eingeübt werden mufs. Man wähle irgend eine Funktion von x und y und nenne dieselbe u. Alsdann berechne man $\frac{\partial u}{\partial x}$. Das Resultat differenziere man erneut nach y, indem man x als konstant ansieht. Das Ergebnis bezeichnen wir durch $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Man findet hierbei *stets*, dafs dasselbe Schlufsresultat kommt,

wenn man in der umgekehrten Reihenfolge, d. h. erst nach y und dann nach x differenziert; es gilt also das Gesetz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}. \tag{1}$$

Es sei z. B. $u = x^3 + y^3 + ax^2y + bxy^2$, so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 0 + 2axy + by^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 0 + 0 + 2ax + 2by.$$

Andrerseits hat man:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 3y^2 + ax^2 + 2bxy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0 + 0 + 2ax + 2by,$$

was genau mit dem vorhin berechneten Ausdrucke $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ übereinstimmt.

Der Studierende darf bei Rechnungen dieser Art nicht ermüden. Er gebrauche andere Bezeichnungen als x und y und rechne selbst zahlreiche Beispiele. Der in Formel (1) zum Ausdruck kommende Satz ist von gröfster Bedeutung für die Thermodynamik sowie auch für andere technische Anwendungen der Mathematik. Ein Beweis des Satzes wird später nachgetragen; einstweilen wolle sich der Studierende mit diesem höchst wichtigen Theoreme vollständig vertraut machen.

32. Auch noch folgende Bemerkung schliefse sich hier an. Angenommen, es sei u eine Funktion von x und y, von der wir wissen, dafs:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ax^3 + by^3 + cx^2y + gxy^2$$

gilt; dann finden wir durch Integration inbezug auf x:

$$u = \tfrac{1}{4}ax^4 + by^3x + \tfrac{1}{3}cx^3y + \tfrac{1}{2}gx^2y^2 + f(y),$$

wo $f(y)$ eine unbestimmte oder willkürliche Funktion von y ist. Diese letztere müssen wir hinzufügen, da wir bei einer Integration stets eine additive willkürliche Konstante hinzuzuthun haben, und da y und also auch $f(y)$ bei der Berechnung von $\frac{\partial u}{\partial x}$ in der That für konstant gilt.

33. Wir kommen jetzt wieder auf den oben noch unbewiesen gelassenen Satz zurück, dafs der Differentialquotient von $y = \log x$ durch $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ gegeben ist. Um diesen Satz zu erläutern, wolle der



Leser für x nach einander die Werte 3; 3,001; 3,002; 3,003; ... einsetzen und jedesmal y bestimmen. Die Zuwüchse von y sind alsdann durch die entsprechenden Zuwüchse von x zu teilen; die Quotienten müssen, wenn sich die Regel $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ bestätigt, näherungsweise zu den betreffenden Werten x reciprok sein.

Man merke sich übrigens ein für alle mal, daſs wir mit dem Zeichen $\log x$ stets die Neperschen oder natürlichen Logarithmen meinen.

34. Beispiel zur Formel $\int \frac{dt}{t} = \log t + \text{Constans}$.

Aus der mechanischen Wärmetheorie ergiebt sich folgender Grundsatz: Wenn in einer Wärmekraftmaschine der arbeitende Stoff bei der Temperatur t eine Wärmemenge H aufnimmt und bei der Temperatur t_0 wieder Wärme abgiebt, so wird dabei, wenn es sich um eine „vollkommene" Wärmekraftmaschine handeln würde, das Quantum:

$$H \cdot \frac{t - t_0}{t} \quad \text{oder} \quad H\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$$

mechanischer Arbeit geleistet.

Wird ein kg Wasser von t_0 Grad auf t_1 Grad erwärmt, so nehmen wir an, daſs für die Erwärmung um je einen Grad die gleiche Wärme- resp. Arbeitsmenge erforderlich ist, nämlich in Arbeitseinheiten 424 mkg. Wie groſs ist alsdann die von der gedachten Maschine als Äquivalent aller verbrauchten Wärme geleistete Arbeit?

Um die Temperatur von t auf $t + \varDelta t$ Grad zu erhöhen, ist eine in mkg ausgedrückte Wärmemenge $424\, \varDelta t$ nötig. Dieses Produkt ist für H in den obigen Ausdruck einzutragen, sodaſs wir für die dieser Wärmemenge entsprechende Arbeitsleistung gewinnen $\varDelta W = 424\, \varDelta t \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$. Wir folgern hieraus:

$$\frac{dW}{dt} = 424 - 424 \frac{t_0}{t},$$

$$W = 424\, t - 424\, t_0 \log t + \text{Constans}.$$

Nun wird $W = 0$ für $t = t_0$ zutreffen; man hat also:

$$0 = 424\, t_0 - 424\, t_0 \log t_0 + \text{Constans},$$

woraus sich der Wert der zunächst unbestimmten Konstanten ergiebt. Tragen wir diesen Wert in die voraufgehende Gleichung ein, so ergiebt sich als die gesuchte Arbeitsleistung für die vorgeschriebenen Temperaturgrenzen von t_0 und t_1 Grad:

$$W = 424\,(t_1 - t_0) - 424\, t_0 \log \frac{t_1}{t_0}.$$

Wird jetzt das kg Wasser bei der Temperatur t_1 durch Zuführung der Wärmemenge L_1 (latente Wärme) vollständig in Dampf von der Temperatur t_1 verwandelt, so ist die Arbeit, welche aus dieser Wärmemenge durch den Kreisprozeſs gewinnbar ist, gleich $L_1\left(1 - \frac{t_0}{t_1}\right)$. Hiernach wird die Arbeitsleistung einer **vollkommenen Dampfmaschine**, berechnet pro kg Wasser, welches von t_0

auf t_1 Grad erwärmt und hernach bei der Temperatur t_1 verdampft wird, gegeben sein durch:

$$W = 424\,(t_1 - t_0) - 424\,t_0 \log \frac{t_1}{t_0} + L_1\left(1 - \frac{t_0}{t_1}\right).$$

Aufgabe. Man berechne hiernach die Arbeitsleistung W pro kg Dampf für $t_1 = 438^0$ in absoluter Temperatur oder 165^0 Celsius (entsprechend 7,2 atm.) und $t_0 = 373^0$ bez. 100^0 Celsius. Die Wärmemenge L_1 ist hier äquivalent mit 207 732 mkg.

Man findet die Arbeit W pro 1 kg Dampf zu 33 000 mkg. Der Maschinentechniker wünscht aber für gewöhnlich zu wissen, wieviel kg Dampf pro Stunde für eine indizierte Pferdekraft erforderlich ist. Nun werden w kg pro Stunde während einer Sekunde die Arbeit $\frac{33\,000}{3600} \cdot w$ mkg leisten. Setzen wir diesen Wert gleich 75, so ergiebt sich, daſs $w = 8{,}18$ kg Dampf pro Stunde für eine indizierte Pferdekraft bei einer zwischen den Temperaturgrenzen 165^0 und 100^0 Celsius arbeitenden vollkommenen Dampfmaschine erforderlich sind.

35. Übungsbeispiele. Nach einer bekannten Grundformel der Wärmetheorie hat man für die in mechanischem Maſse, und zwar in mkg ausgedrückte Schmelz- resp. Verdampfungswärme L einer Substanz, pro kg berechnet, die Darstellung:

$$L = 0{,}01 \cdot t\,(s_1 - s_0)\,\frac{dp}{dt}.$$

Hier ist s_1 das Volumen von 1 kg der Substanz im höheren, s_0 dasjenige von 1 kg im niederen Aggregatzustande, beide Volumina gemessen in Kubikcentimeter; ferner ist t die absolute Temperatur des Schmelz- bez. Siedepunktes bei einem Drucke p, gemessen in kg pro qcm, sodaſs dt die Änderung der Schmelz- bez. Siedetemperatur bedeutet, falls der Druck von p auf $p + dp$ wächst. Wird die Temperatur in Celsiusgraden θ gemessen, so gilt $t = 273 + \theta$.

I. Für schmelzendes Eis haben wir bei $t = 273$ (entsprechend 0^0 Celsius) und $p = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ für s_0 und s_1 die Werte

$$s_0 = 1090, \quad s_1 = 1000,$$

während $L = 3420$ gilt. Somit folgt $\frac{dp}{dt} = -140$.

Hiernach *erniedrigt* eine Druckerhöhung die Schmelztemperatur des Eises, d. h. Druckerhöhung wirkt im Sinne des Schmelzens. Man achte noch auf den ziemlich hohen Betrag des Quotienten $\frac{dp}{dt}$; der Schmelzpunkt wird nur um 0,1 Grad erniedrigt, falls der Druck um 14 kg pro qcm wächst.

II. Die Verdampfung des Wassers betreffend erscheint eine genaue experimentelle Bestimmung des Volumens s_1 eines kg Dampf von gegebener Temperatur fast unmöglich, während andrerseits s_0 für Wasser bekannt ist. Man berechne demnach $(s_1 - s_0)$ aus der oben



angegebenen Formel. Für einige Temperaturen haben wir nach Versuchen von Regnault folgende Zahlwerte, welche für sich selber sprechen mögen:

θ^0 Cels.	Abs. Temp. t	Druck in kg pro qcm	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$	Annahme für $\frac{dp}{dt}$	L in mkg	$s_1 - s_0$
100	373	1,03330	0,0398			
105	378	1,23236		0,0428	225848	1393200
110	383	1,46210	0,0459			

Wir haben hierbei, wie schon angegeben, für $\frac{dp}{dt}$ nur einen angenäherten Wert benutzen können. Eine genauere Methode zur Bestimmung von $\frac{dp}{dt}$ würde darin bestehen, dafs man eine gröfsere Anzahl von Werten von $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ im Quadratnetz graphisch aufträgt und alsdann $\frac{dp}{dt}$ für spezielle Temperaturen aus der entspringenden Kurve abliest.

Für $s_1 - s_0$ fanden wir bei 105° Celsius 1393200. Nun ist weiter für Wasser von niederer Temperatur $s_0 = 1000$, und die Ausdehnung des Wassers bei Erwärmung ist so gering, dafs sie kaum in Betracht kommt. Setzen wir $s_1 = 1394000$, so kommen wir dem wahren Betrage des gesuchten Zahlwertes hinreichend nahe.

Beispiel. Man bestimme s_1 für 130° Celsius. Der Wert von L ist 218343. Die Werte von t und p entnehme man aus der Tabelle:

t	388	393	398	403	408	413	418
p	1,7259	2,0275	2,3710	2,7604	3,2001	3,6949	4,2495

Beispiel. Die Formel für die Dampfspannung $p = a\theta^b$, in welcher a und b bekannte Konstanten sind und θ die von einem gewissen wohlbekannten Nullpunkt aus gemessene Temperatur bedeutet, liefert zwar keine ganz exakte, aber doch sehr brauchbare Darstellung der Regnault'schen Versuchsresultate. Man entwickele hieraus eine Formel für das Volumen s_1 von 1 kg Dampf. Wir haben andrerseits für die Verdampfungswärme die Formel $L = c - et$, wo t die absolute Temperatur bedeutet und c und e wieder bekannte Konstanten sind. Hieraus folgt für $\frac{dp}{d\theta}$ oder, was dasselbe ist, für $\frac{dp}{dt}$ der Ausdruck $ba\theta^{b-1}$, und also findet man:

$$s_1 - s_0 = \frac{c - et}{tba\theta^{b-1}}.$$

Hat man empirische Formeln mathematischen Operationen zu unterwerfen, so sollte man die von den entwickelten Gleichungen gelieferten Ergebnisse stets durch das Experiment auf ihre Genauigkeit prüfen. Die ursprüngliche Formel stellt nämlich einen wirklichen Vorgang nur angenähert dar, aber kleine und scheinbar unwesentliche Abweichungen der Formel vom wirklichen Vorgang können bei einer transformierten Gestalt der Gleichung erheblich vergröſsert werden.

36. Genauere Untersuchung von Kurven.

Ist die Gleichung einer noch unbekannten Kurve gegeben, so muſs sich der Praktiker natürlich in erster Linie darauf stützen, daſs er diese Kurve im Quadratnetz punktweise zu konstruieren vermag. Sehr häufig aber gewinnen wir gute Einsicht in den Kurvenverlauf, wenn wir für die verschiedenen Werte von x den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und damit die „Steigung“ der Kurve bestimmen.

Wissen wir, daſs der Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve liegt, und wollen wir die Gleichung der **Tangente** der Kurve in diesem Punkte aufstellen, so handelt es sich einfach um Auffindung derjenigen geraden Linie, welche durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchläuft und die gleiche Steigung hat wie die Kurve an der betrachteten Stelle. Als **Normale** der Kurve in (x_1, y_1) bezeichnen wir diejenige gerade Linie, welche durch (x_1, y_1) hindurchläuft und die Kurve und damit auch ihre Tangente ebenda senkrecht kreuzt. Nach Art. 13 ist die „Steigung“ der Normalen gleich dem negativen reciproken Werte der Steigung der Kurve an der fraglichen Stelle.

Fig. 8.

In Figur 8 sei P ein Punkt einer Kurve APB. OX und OY sind die Koordinatenaxen. Tangente und Normale der Kurve in diesem Punkte sind durch PS und PQ gegeben. Man bezeichnet auch wohl die bis zur x-Axe reichenden Strecken $\overline{PS}$ und $\overline{PQ}$ speziell als Tangente und Normale. Die Koordinaten des Punktes P sind $\overline{OR} = x$, $\overline{RP} = y$, und man hat $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \sphericalangle PSR$. Man bezeichnet die Strecke $\overline{SR}$ als **Subtangente** und beweist leicht, daſs dieselbe gleich $\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ ist. Die Strecke $\overline{RQ}$ heiſst **Subnormale**; für diese findet man offenbar den Wert $y\frac{dy}{dx}$.

Die Länge der Tangente $\overline{PS}$ wird gefunden zu $y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, diejenige der Normalen $\overline{PQ}$ ist $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Der Abschnitt $\overline{OS}$ hat die Gröfse $x - y\frac{dx}{dy}\cdot$

Beispiel 1. Man bestimme die Länge der Subtangente und Subnormale bei der Parabel $y = mx^2$. Hier ist $\frac{dy}{dx} = 2mx$, und also findet man:

$$\text{Subtangente} = \frac{mx^2}{2mx} = \tfrac{1}{2}\,x\,,$$
$$\text{Subnormale} = y \cdot 2mx = 2m^2x^3.$$

Beispiel 2. Man bestimme die Länge der Subtangente für die durch $y = mx^n$ dargestellte Kurve. Hier gilt $\frac{dy}{dx} = mnx^{n-1}$, so dafs man hat:

$$\text{Subtangente} = mx^n : mnx^{n-1} = \frac{x}{n}\cdot$$

Beispiel 3. Man ermittele, welche Kurve die Eigenschaft hat, dafs ihre Subnormale überall dieselbe Länge hat. Dieser Forderung entsprechend schreiben wir:

$$y\frac{dy}{dx} = a \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\,y.$$

Nun ist $\frac{1}{a}\,y$ der Differentialquotient von $\frac{1}{2a}\,y^2$ nach y. Nach der letzten Gleichung folgt somit:

$$x = \frac{1}{2a}\,y^2 + b,$$

wo b irgend eine Konstante bedeutet; hier haben wir also die Gleichung der gesuchten Kurve vor uns. Offenbar handelt es sich um eine Schar von Parabeln. (Man vergl. Art. 9, Beispiel I und II, wo jedoch x und y gegenüber der hier vorliegenden Gleichung ausgewechselt sind.)

Beispiel 4. Der Punkt $x = 4$, $y = 3$ liegt auf der Parabel von der Gleichung $y = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Man bestimme die Gleichung der Parabeltangente in diesem Punkte. Die Steigung ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, was für den fraglichen Punkt $(4, 3)$ den Wert $\frac{3}{8}$ ergiebt. Somit ist die Gleichung der Tangente sicher in der Gestalt enthalten $y = m + \frac{3}{8}x$. Zur Bestimmung von m setzen wir die Koordinaten des Punktes $(4, 3)$, der doch auf der Tangente liegt, in jene Gleichung ein und finden $3 = m + \frac{3}{8}\cdot 4$ und also $m = \frac{3}{2}$. Die gesuchte Gleichung ist somit $y = \frac{3}{2} + \frac{3}{8}x$.



Beispiel 5. Der Punkt (32, 3) liegt offenbar auf der durch $y = 2 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{5}}$ gegebenen Kurve. Wie lautet die Gleichung der Normalen dieser Kurve an der Stelle (32, 3)?

Es ist daselbst die Steigung der Kurve $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{160}$, und also folgt für die Steigung der Normalen -160. Die Gleichung der letzteren gestattet hiernach den Ansatz $y = m - 160x$. Da die Normale durch den Punkt (32, 3) hindurchläuft, so ist $3 = m - 160 \cdot 32$. Somit folgt $m = 5123$, und wir gewinnen als die gesuchte Gleichung der Normalen $y = 5123 - 160x$.

Beispiel 6. An welcher Stelle der Kurve $y = ax^{-n}$ hat die Steigung den Wert b?

Hier ist $\frac{dy}{dx} = -nax^{-n-1}$, so daſs die Abscisse x des gesuchten Punktes die Gleichung:

$$-nax^{-n-1} = b \quad \text{oder} \quad x = \left(-\frac{na}{b}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

befriedigen wird. Setzen wir diesen Wert x in die Gleichung der Kurve ein, so ergiebt sich das zugehörige y. —

Wir fügen hier noch eine Bemerkung über die allgemeine Gleichung der Tangente und Normale einer Kurve an. Es ist leicht zu sehen, daſs, wenn eine Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgeht und die Steigung b besitzt, die Gleichung derselben in einfachster Schreibweise diese ist:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = b.$$

Hiernach ist die Gleichung der Tangente einer Kurve im Punkte (x_1, y_1) der letzteren:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{dy_1}{dx_1},$$

wo rechter Hand die Steigung der Kurve an der fraglichen Stelle gemeint ist. In demselben Sinne haben wir als Gleichung der Normalen für die Stelle (x_1, y_1):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{dx_1}{dy_1}.$$

Aufgabe 1. Man stelle die Gleichung der Tangente der Kurve $x^m y^n = a$ im Punkte (x_1, y_1) der letzteren auf. Die Gleichung ist $\frac{m}{x_1} x + \frac{n}{y_1} y = m + n$.

Aufgabe 2. Man bestimme die Gleichung der Normalen für die nämliche Kurve an der Stelle (x_1, y_1). Dieselbe ist:

$$\frac{n}{y_1}(x - x_1) - \frac{m}{x_1}(y - y_1) = 0.$$

Aufgabe 3. Man finde die Gleichungen für Tangente und Normale der Parabel $y^2 = 4ax$ an derjenigen Stelle der Kurve, welche zu $x = a$ gehört. Die gesuchten Gleichungen sind:

$$y = x + a \quad \text{und} \quad y = 3a - x.$$

Aufgabe 4. Welches ist die Gleichung der Tangente der Kurve $y = a + bx + cx^2 + ex^3$ für die Stelle (x_1, y_1) dieser Kurve? Die Antwort ist:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = b + 2cx_1 + 3ex_1^2.$$

37. Wenn bei zunehmendem x die Funktion y zunächst gleichfalls bis zu einem bestimmten Werte wächst, darauf aber abnimmt, so wird der gedachte Wert als ein **Maximum** der Funktion y bezeichnet. Falls umgekehrt bei zunehmendem x die Funktion y zunächst abnimmt bis zu einem gewissen Werte, hernach aber zunimmt, so heifst dieser Wert ein **Minimum** der Funktion. In den elementaren Fällen ist sowohl bei einem Maximum als bei einem Minimum ein Verschwinden des Differentialquotienten zu konstatieren, $\frac{dy}{dx} = 0$. Man vergl. hierzu Art. 16 und Figur 6.

Beispiel 1. Man zerlege die Zahl 12 so in zwei Summanden, dafs das Produkt derselben ein Maximum wird. Der Geübte findet die Antwort leicht durch Probieren. Man kann dabei so verfahren: Ist x der eine Summand, so ist $12 - x$ der andere. Man setze versuchsweise $x = 0, 1, 2, \cdots$ und berechne in jedem Falle das Produkt der Summanden. So folgt:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ···
Produkt	0	11	20	27	32	35	36	35	32	27 ···

Hiernach scheint es, dafs für $x = 6$ das Produkt 36 das gesuchte Maximum darstellt. Wollen wir indessen eine exaktere Bestimmung des Maximums treffen, so werden wir uns zweckmäfsig einer graphischen Darstellung im Quadratnetz bedienen; wir nennen das Produkt y und tragen zusammengehörige Werte x, y als Koordinaten auf. Der Leser wird dies für sich selber ausführen.

Wir lernten nun soeben bereits den Satz kennen, dafs bei den gröfsten und kleinsten Werten von y die Steigung der Kurve ver-

schwindet. Somit hat man hier den oder die Punkte zu bestimmen, bei denen $\frac{dy}{dx} = 0$ zutrifft.

Soll hiernach allgemein a in zwei Summanden x und $a - x$ zerlegt werden, deren Produkt $y = x(a-x) = ax - x^2$ ein Maximum oder Minimum wird, so ist $\frac{dy}{dx} = a - 2x = 0$ zu setzen. Dies ist aber offenbar nur bei $x = \frac{1}{2}a$ der Fall.

Dem Geübteren fällt es bei derartigen Problemen nicht besonders schwer zu entscheiden, ob im einzelnen Falle ein Maximum oder Minimum vorliegt. Im obigen Falle $a = 12$ hatten wir für $x = 6$ das Produkt 36. Für $x = 5{,}999$ ist der andere Summand 6,001 und also das Produkt gleich 35,999999, so dafs $x = 6$ ein gröfseres Produkt liefert, als $x = 5{,}999$ oder $x = 6{,}001$. Demgemäfs liegt beim Werte $x = \frac{1}{2}a = 6$ ein Maximum und nicht etwa ein Minimum vor. Wir werden später (Art. 220) noch eingehendere Regeln zur Unterscheidung der Maxima und Minima kennen lernen.

Beispiel 2. Man zerlege die Zahl a in der Weise in zwei Summanden, dafs die Summe der Quadrate derselben ein Minimum wird. Die Summanden seien x und $a - x$, und es werde die Summe ihrer Quadrate durch y bezeichnet:

$$y = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 + a^2 - 2ax.$$

Die Frage ist, wann y zu einem Minimum wird. Hier ist

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 2a,$$

und dieser Ausdruck verschwindet für $x = \frac{1}{2}a$.

Beispiel 3. Wann ist die Summe einer Zahl und ihres reziproken Wertes ein Minimum? Ist die Zahl x, so handelt es sich um den kleinsten Wert von $y = x + \frac{1}{x}\cdot$

Da der Differentialquotient von $\frac{1}{x} = x^{-1}$ gleich $-x^{-2}$ ist, so haben wir $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$, und diese Differenz verschwindet, falls $x = 1$ ist.

Der Leser wolle hier wieder Einzelwerte von x heranziehen und sich der graphischen Hilfsmittel im Quadratnetz bedienen. Einige zusammengehörige Werte x, y sind hier tabellarisch zusammengestellt:

x	100	10	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
y	100,01	10,1	4,25	2,5	2	2,5	$3\frac{1}{3}$	4,25	$\cdots$

Trägt man die Werte x, y als Koordinaten auf, so ist direkt evident, daſs für $x = 1$ ein Minimum von y vorliegt.

Beispiel 4. **Die Tragkraft eines Balkens von rechteckigem Querschnitt** und gegebener Länge ist bei beliebiger Einspannung und Belastung proportional dem Produkt aus der Breite und dem Quadrat der Höhe seines Querschnitts. Es soll nun aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt des Durchmessers a ein solcher Balken von möglichst groſser Tragkraft ausgeschnitten werden.

Man bezeichne die Breite des Balkens mit x. Da der Querschnitt ein in den Kreis des Durchmessers a eingeschriebenes Rechteck ist, so wird die Höhe $\sqrt{a^2 - x^2}$ sein. Hiernach ist die Tragkraft am gröſsten, wenn die Funktion:

$$y = x(a^2 - x^2) = a^2 x - x^3$$

zu einem Maximum wird. Hier hat man:

$$\frac{dy}{dx} = a^2 - 3x^2,$$

ein Ausdruck, welcher zu 0 wird, falls $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ist. Diese Breite liefert also den tragfähigsten Balken.

Auf analogem Wege kann man den *am wenigsten biegsamen* Balken finden, der sich aus einem cylindrischen Baumstamm ausschneiden läſst; man muſs hierbei das Produkt der Breite und der dritten Potenz der Höhe zu einem Maximum machen. Doch kann der Leser die Lösung dieser Aufgabe auch bis nach der Durcharbeitung des dritten Kapitels zurückstellen.

Beispiel 5. Versuche über **Explosion von Gasgemischen** (in freier Luft) haben das näherungsweise richtige Gesetz:

$$p = 6 - 0{,}23\,x$$

ergeben*); darin bezeichnet p den gröſsten bei der Explosion eintretenden Druck und x das Volumen der neutralen Gase (Luft und Rückstände der vorigen Explosionen) pro cbm wirksamen Gases, also das Verdünnungsverhältnis. Setzt man bei einer Gaskraftmaschine die während einer einmaligen Explosion und Expansion geleistete Arbeit näherungsweise mit px proportional, so ist die Frage, für welchen Wert von x die Arbeit zu einem Maximum wird.

Die gröſste Arbeitsleistung wird eintreten, falls $(6x - 0{,}23x^2)$ zu einem Maximum wird. Dies ist der Fall, wenn $6 - 0{,}46x = 0$ ist, d. h. etwa für $x = 13$.

*) Die praktischen Versuche beziehen sich auf Werte von x, die nicht gröſser als 16 sind.

Ich kann leider die Verantwortung für die Richtigkeit des obigen Gesetzes nicht selber übernehmen, da ich dasselbe aus Versuchen des Hrn. Grover abgeleitet habe. Derselbe fand dabei als sehr bemerkenswertes Ergebnis, daſs es am günstigsten ist, wenn auf die berechneten 13 cbm 9 bis 12 cbm frische Luft kommen, während der Rest aus früheren Verbrennungsprodukten besteht.

Beispiel 6. Man beweise, daſs $x(a-x)^2$ für $x = \frac{1}{3}a$ zu einem Maximum wird.

Beispiel 7. Man zeige, daſs $x - x^3$ für $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ zu einem Maximum wird.

Beispiel 8. Der **Kubikinhalt eines cylindrischen Gefäſses**, welches oben offen ist, sei vorgeschrieben. Wie müssen die Dimensionen des Gefäſses des näheren gewählt werden, damit die Oberfläche desselben möglichst klein ausfällt?

Man verstehe unter x den Radius der Grundfläche und unter y die Höhe des Gefäſses. Ist a der vorgeschriebene Inhalt, so hat man:

(1) $$\pi x^2 y = a.$$

Die Gröſse der Oberfläche ist:

(2) $$\pi x^2 + 2\pi x y;$$

es fragt sich, wann dieser Ausdruck am kleinsten ist.

Berechnet man y aus (1) und setzt den entspringenden Wert in (2) ein, so schreibt sich die Oberfläche als Funktion von x so:

$$\pi x^2 + \frac{2a}{x}\cdot$$

Setzen wir den Differentialquotienten dieser Funktion gleich 0, so kommt:

$$2\pi x - \frac{2a}{x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^3 = \frac{a}{\pi} = \frac{\pi x^2 y}{\pi},$$

so daſs wir $x = y$ gewinnen. Der Radius der Grundfläche muſs demnach gleich der Höhe des Gefäſses sein.

Beispiel 9. Man lasse das Gefäſs auch oben geschlossen sein und berechne, wann das Minimum der Oberfläche bei gegebenem Inhalt erzielt wird.

Die Oberfläche ist jetzt durch $2\pi x^2 + 2\pi x y$ gegeben. Verfährt man im übrigen wie vorhin, so zeigt sich, daſs die Oberfläche am kleinsten ausfällt, falls der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe gewählt wird.

Beispiel 10. Es sei v die, auf die Stunde als Zeiteinheit und den Kilometer als Längeneinheit bezogene, Stromgeschwindigkeit eines

Flusses, und es werde durch x die *relative* Geschwindigkeit eines Dampfers gegen den Strom bezeichnet; für den **Verbrauch an Heizmaterial pro Stunde** gelte das Gesetz $a + bx^3$. Soll der Dampfer die Strecke m zurücklegen, so bestimme man diejenige Geschwindigkeit x, bei welcher der Gesamtverbrauch an Heizmaterial ein möglichst geringer ist.

Die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Ufer ist $x - v$, die in Stunden gemessene Zeitdauer der Fahrt ist $\frac{m}{x-v}$, und demnach wird der Materialverbrauch während der Fahrt $\frac{m(a+bx^3)}{x-v}$ sein.

Indem man die Konstanten a und b in entsprechend abgeänderter Bedeutung braucht, kann man unter $a + bx^3$ auch die pro Stunde berechneten Gesamtkosten verstehen, unter Einschlufs der Kosten für Verzinsung und Abschreibung des Dampfers, aufser denjenigen für Löhne und Provisionen.

Da die Regel für die Differentiation eines Quotienten noch nicht entwickelt ist, so wollen wir $a = 0$ annehmen und haben damit den kleinsten Wert von $\frac{x^3}{x-v}$ zu bestimmen. Zu diesem Ziele können wir auch so gelangen, dafs wir den gröfsten Wert von

$$\frac{x-v}{x^3} = x^{-2} - v\,x^{-3}$$

bestimmen. Der Differentialquotient dieser Funktion ist $-2x^{-3} + 3vx^{-4}$. Derselbe verschwindet, falls $x = \frac{3}{2}v$ ist, d. h. falls die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Flufs das Anderthalbfache der Stromgeschwindigkeit v ist.

Übrigens darf der Techniker hier und in anderen Fällen mit einer solchen Antwort noch nicht zufrieden sein. Unzweifelhaft liefert $x = \frac{3}{2}v$ die günstigste Geschwindigkeit; denn für diesen Fall wird $x^3 : (x - v)$ zum Minimum. Aber gesetzt man fahre mit einer etwas geringeren oder gröfseren Geschwindigkeit, macht das einen *grofsen* Unterschied aus? Für $v = 6$ ist der günstigste Wert x gleich 9. Aber man hat:

$$\frac{x^3}{x-6} = 243 \quad \text{für} \quad x = 9,$$

$$\frac{x^3}{x-6} = 250 \quad \text{für} \quad x = 10,$$

$$\frac{x^3}{x-6} = 256 \quad \text{für} \quad x = 8.$$

Diese Zahlen geben uns ein Urteil über den Mehraufwand, falls



die Fahrgeschwindigkeit von dem günstigsten Werte ein wenig abweicht*).

Beispiel 11. Man zerlege die Zahl a in der Weise in zwei Faktoren, dafs die Summe der Quadrate der letzteren ein Minimum wird. Ist x der eine Faktor, so ist $\frac{a}{x}$ der andere, so dafs $y = x^2 + \frac{a^2}{x^2}$ zum Minimum werden soll. Es mufs somit:

---

*) Kennt der Leser bereits die Regel zur Differentiation eines Quotienten, welche in den meisten Lehrbüchern der Differentialrechnung schon bei den Anfangsgründen entwickelt wird, so haben wir nicht nötig, wie oben, den Wert von a gleich 0 zu nehmen. Setzt man den Differentialquotienten gleich Null, so kommt jetzt:

$$(x - v)\, 3bx^2 = a + bx^3,$$

$$2bx^3 - 3bvx^2 = a. \tag{1}$$

Sind a, b und v bekannt, so findet man den zugehörigen Wert x durch Auflösung dieser Gleichung. Haben wir z. B. für die Kosten pro Stunde in Mark berechnet $30 + \frac{1}{20} x^3$, so gilt $a = 30$, $b = \frac{1}{20}$; man nehme überdies $v = 6$. Die Gleichung (1) für x nimmt dann die Gestalt an:

$$x^3 - 9x^2 - 300 = 0. \tag{2}$$

Ich finde hiernach, dafs $x = 11{,}3$ der günstigste Wert der Geschwindigkeit ist.

Es handelt sich dabei um eine kubische Gleichung, welche drei Wurzeln hat. Aber wir brauchen für den vorliegenden praktischen Zweck nur eine bestimmte unter diesen Wurzeln zu kennen, und es ist auch ausreichend, wenn wir nur einen angenäherten Wert der letzteren besitzen. **Der Ingenieur löst nun irgend eine vorgelegte Gleichung** nach einer Methode auf, die für die obige Gleichung sich folgendermafsen gestaltet.

Wir bezeichnen $x^3 - 9x^2 - 300$ kurz durch $f(x)$. Die Frage ist, für welchen Wert $f(x)$ verschwindet. Setzen wir $x = 10$, so finden wir $f(x) = -200$ an Stelle des gewünschten Wertes 0. Für $x = 8$ kommt -360, also ein noch schlechterer Wert. Versuchen wir es mit $x = 12$, so folgt $f(x) = 176$, sodafs zwischen 10 und 12 offenbar eine Wurzel x gelegen ist. Für $x = 11$ finden wir -57. Alle diese Resultate sind in der Tabelle:

x	10	8	12	11	11,3
$f(x)$	-200	-360	$+176$	-57	-6

zusammengefafst. Es ist nun der Mühe wert, im Quadratnetz des Millimeterpapiers die Kurve $y = f(x)$ im Intervall zwischen $x = 10$ und $x = 12$ zu zeichnen. Indem man weitere Prüfungen im Intervall zwischen $x = 11$ und $x = 12$ anstellt, kann man schliefslich durch Wiederholung des gleichen Prozesses eine auf jede gewünschte Anzahl von Dezimalstellen genaue Antwort gewinnen. Für den gegenwärtigen Fall ist keine grofse Genauigkeit erforderlich; wir haben dieserhalb oben bereits 11,3 als den günstigsten Wert x bezeichnet. Im Texte hatten wir im Falle $a = 0$ nur $x = 9$ gewonnen. Der Praktiker wird aus der Verschiedenheit dieser Antworten seine Schlüsse zu ziehen wissen. Rechnungen von der hier betrachteten Art wird der Kapitain eines Flufsdampfers stets auszuführen haben, wenn er sie auch nicht gerade in unserer Weise zu Papier zu bringen pflegt.



$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2a^2}{x^3} = 0$$

sein, was auf $x = \sqrt{a}$ führt.

Beispiel 12. Es sollen n **galvanische Elemente** so zu einer Batterie zusammengestellt werden, daſs bei einem äuſseren Leitungswiderstand R eine möglichst groſse Stromstärke erzielt wird.

Die elektromotorische Kraft des einzelnen Elementes sei e Volt, der innere Widerstand desselben r Ohm. Wir schalten je x Elemente hinter einander, sodaſs $\frac{n}{x}$ parallel geschaltete Reihen entstehen. Unter diesen Umständen ist die elektromotorische Kraft der Batterie xe Volt und der innere Widerstand $\frac{x^2 r}{n}$ Ohm, sodaſs die Stromstärke gegeben ist durch:

$$C = \frac{xe}{\frac{x^2 r}{n} + R} \text{ Ampère.}$$

Da der Leser einen Quotienten noch nicht differenzieren kann, so beachten wir, daſs C maximal wird, wenn

$$\frac{e}{C} = \frac{xr}{n} + \frac{R}{x}$$

zu einem Minimum wird. Setzen wir den Differentialquotienten hiervon gleich 0:

$$\frac{r}{n} - \frac{R}{x^2} = 0,$$

so folgt $R = \frac{x^2 r}{n}$, wo rechter Hand der innere Widerstand der Batterie steht.

Hieraus entspringt die Regel: Man ordne so an, daſs der innere Widerstand in der Batterie so nahe als möglich gleich dem Widerstande des äuſseren Schlieſsungskreises wird.

Beispiel 13. Ein **galvanisches Element** von der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstande r liefere einen Strom, wobei der äuſsere Stromkreis den Widerstand R besitze. Die Stromstärke ist $C = \frac{e}{r+R}$, die entwickelte elektrische Energie ist:

$$P = RC^2 = \frac{Re^2}{(r+R)^2} \text{ Watt.}$$

Wie muſs man R wählen, damit P zu einem Maximum wird?

Wir verfahren wie oben und sagen, daſs der gesuchte Wert R den Ausdruck:

$$\frac{(r+R)^2}{R} = r^2 R^{-1} + 2r + R$$

zu einem Minimum machen mufs. Differenzieren wir aber diesen Ausdruck nach R und setzen das Resultat gleich 0, so kommt:

$$-r^2 R^{-2} + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad R = r.$$

Der äufsere Widerstand mufs demnach dem inneren gerade gleich sein.

Beispiel 14. Wie grofs darf im Maximo der Inhalt einer Kiste sein, die man mit der **Packetpost** versenden will? Sei x die Höhe der Kiste, y und z aber Länge und Breite der Grundfläche. Die amtliche Vorschrift lautet (in England), dafs die Höhe vermehrt um den Umfang der Grundfläche nicht gröfser als 6 Fufs sein darf. Wollen wir somit $v = xyz$ zu einem Maximum machen, so werden wir jedenfalls die obere erlaubte Grenze $x + 2(y + z) = 6$ benutzen. Nun folgt aus Beispiel 1, dafs unter allen Kisten von gleicher Höhe und gleichem Umfang der Grundfläche diejenige mit quadratischer Grundfläche den gröfsten Inhalt hat. Wir dürfen dieserhalb von vornherein $y = z$ nehmen und haben also das Maximum von $v = xy^2$ bei $x + 4y = 6$ zu bestimmen. Ersetzen wir x durch seinen Ausdruck in y, so haben wir $v = 6y^2 - 4y^3$. Diese Funktion von y aber wird am gröfsten, falls

$$\frac{dv}{dy} = 12y - 12y^2 = 0$$

ist. Die Lösung $y = 0$ dieser Gleichung ist unbrauchbar, sodafs nur $y = 1$ übrig bleibt. Man mufs also Länge und Breite gleich 1, Höhe gleich 2 nehmen und hat dann als Maximalinhalt 2 Kubikfufs.

Man bestimme entsprechend das inhaltlich gröfste cylindrisch geformte Packet, welches bei der Packetpost zulässig ist. Ist die Höhe l, der Durchmesser der Grundfläche aber d, so wird man $l + \pi d = 6$ setzen und hat das Maximum von $\frac{\pi}{4} l d^2$ zu bestimmen. Als Antwort findet man $l = 2$, $d = \frac{4}{\pi}$ Fufs; der Inhalt ist dann $\frac{8}{\pi} = 2{,}55$ Kubikfufs.

Beispiel 15. **Schraubenfedern nach Ayrton und Perry.** Professor Ayrton und der Verfasser verfolgten die Erscheinung, dafs eine einseitig befestigte Schraubenfeder am freien Ende eine Drehung erfährt, falls sie einer axialen Kraft unterworfen wird. Es war nicht schwierig, für eine Feder von gegebenen Dimensionen eine allgemeine Beziehung zwischen der axialen Verlängerung und der Verdrehung zu gewinnen. Auf Grund dieser Formel konnten wir feststellen, welche Gestalt der Feder gegeben werden mufs, damit die in Rede stehende Drehung möglichst grofs ausfällt.

Zunächst ergab sich, dafs, wenn α der Neigungswinkel der Schraubenlinie ist, die Drehung mit $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ proportional ist. Daraus ergiebt sich sofort, dafs man eine maximale Drehung für $\alpha = 45^0$ gewinnt.

Hat nun der Draht elliptischen Querschnitt von den Hauptaxen x und y, so fanden wir die Drehung proportional mit:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^3 y^3} - \frac{8}{5 x y^3}.$$

Man mache diesen Ausdruck zu einem Maximum, unter der Voraussetzung, dafs die Fläche des Querschnittes, die zu xy proportional ist, gegeben ist. Setzt man demnach xy gleich der Konstanten s, so handelt es sich um das Maximum des Ausdrucks:

$$\frac{y^2}{s^3} - \frac{3}{5}\frac{1}{s y^2}.$$

Hier zeigt sich nun, dafs für positive endliche Werte von y überhaupt kein Maximum eintritt. Vielmehr wird die Drehung gröfser und gröfser, wenn wir entweder y grofs wählen und weiter und weiter wachsen lassen, oder wenn wir y klein wählen und weiter gegen 0 abnehmen lassen. Dabei wird im letzterem Falle die Drehungsrichtung die umgekehrte; doch soll es einerlei sein, ob die Drehung im Sinne der üblichen Windungsrichtung der Schraube geschieht oder nicht. Wir fertigten dieserhalb Spiralfedern aus dünnen Metallbändern an und wählten den Neigungswinkel der Schraubenlinie gleich 45^0. Hierdurch erzielten wir sehr bedeutende Drehungswinkel bei verhältnismäfsig geringen axialen Kräften und entsprechend geringen axialen Verlängerungen. Die Drehung der Feder kann als Mafsstab der Belastung dienen, so dafs diese Federn für viele Mafszwecke verwendbar sind. Wer sich für die praktische Anwendung der hier in Frage kommenden mathematischen Analyse interessiert, wolle die ausführlichen Rechnungen in unserer bezüglichen Abhandlung in den „Proceedings of the Royal Society“ von 1884 zur Hand nehmen.

Beispiel 16. Nach einem idealen **Indikatordiagramm** ist die von einem cbm Dampf geleistete indizierte Arbeit:

$$w = 10000\, p_1 (1 + \log r) - 10000\, r p_3 - x.$$

Hier ist p_1 der Dampfdruck am Beginn, p_3 der am Ende eines Kolbenhubes; r bedeutet den Expansionsgrad (d. h. es findet Dampfzutritt während $\frac{1}{r}$ des Hubes statt); endlich ist x ein Verlustglied, herrührend von der **Kondensation im Cylinder.** Dabei ist x als Funktion

von r anzusehen. Der Druck ist in der angegebenen Formel gemessen in kg pro qcm, die Arbeit in mkg.

1) Es soll unter der Voraussetzung, dafs $x = 0$ ist, derjenige Wert von r angegeben werden, der eine möglichst grofse indizierte Arbeitsleistung pro cbm Dampf liefert.

Man hat $\frac{dw}{dr} = 0$ zu setzen und findet $\frac{10000\,p_1}{r} - 10000\,p_3 = 0$ oder $r = \frac{p_1}{p_3}$. Soll die Bremsleistung ein Maximum pro Kubikfufs Dampf sein, so haben wir zu p_3 noch ein Glied zuzufügen, welches die Gröfse der Reibung innerhalb der Maschine darstellt.

2) Herr Willans hat durch Experimente an Maschinen ohne Kondensation gefunden, dafs für $r = \frac{p_1}{p_3 + 0{,}7}$ das Maximum der indizierten Leistung eintrat. Setzen wir aber diesen Wert in die Gleichung:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{10000\,p_1}{r} - 10000\,p_3 - \frac{dx}{dr} = 0$$

ein, so folgt:

$$\frac{dx}{dr} = \frac{10000\,p_1}{p_1}(p_3 + 0{,}7) - 10000\,p_3 = 7000.$$

Mithin ergiebt sich $x = 7000\,r + \text{const.}$ Das Willanssche experimentelle Gesetz vermittelt uns somit die Kenntnis, dafs der Arbeitsverlust x als eine lineare Funktion von r angesehen werden darf.

Die vorstehende Ausführung hat hier nur die Bedeutung eines lehrreichen Beispiels zur Theorie der Maxima und Minima. Über den praktischen Wert des ausgesprochenen Resultates läfst sich noch manches für und wider bemerken. Die Versuche lassen die Wirkung der Kondensation im *Cylinder* gleichwertig erscheinen mit einer Erhöhung der Ausströmungsspannung um 0,7 atm.

Hr. Willans fand durch Experimente an Maschinen ohne Kondensation, dafs der auf eine indizierte Pferdekraft und Stunde bezogene Überschufs des wirklich verbrauchten Dampfes über die indizierte Dampfmenge eine lineare Funktion von r ist. Vielfach wird angenommen, dafs das Verhältnis des im Cylinder kondensierten Dampfes zum indizierten mit $\log r$ proportional sei; doch stimmt die Annahme einer linearen Funktion von r mit den experimentellen Ergebnissen sehr gut überein.

Beispiel 17. **Ausflufs eines Gases durch die Öffnung eines Gefäfses.** Wenn ein Gas aus einem Gefäfse mit dem inneren Drucke p_0 durch eine Öffnung in ein anderes Gefäfs mit dem Drucke p überströmt, so erweist sich bei gegebenen Werten des Druckes p_0 und



der Temperatur die pro Sekunde überfließsende **Gewichtsmenge** als proportional mit:

$$\alpha^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}};$$

hierbei ist α der Quotient $p : p_0$ und γ bedeutet eine von der Gasart abhängige Konstante. Es fragt sich, wann das angegebene Gewicht ein gröfstes ist, d. h. also wann $\alpha^{\frac{2}{\gamma}} - \alpha^{1+\frac{1}{\gamma}}$ ein Maximum wird.

Indem man den Differentialquotienten nach α gleich 0 setzt, ergiebt sich:

$$p = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Für atmosphärische Luft ist $\gamma = 1{,}41$, so dafs man findet: $p = 0{,}527\, p_0$. Die Ausströmung der komprimierten Luft geschieht somit am schnellsten, falls der äufsere Druck ein wenig gröfser als die Hälfte des Innendruckes ist.

Beispiel 18. Die **Fortleitungskosten des elektrischen Stromes** in einem Kabel setzen sich im wesentlichen aus zwei Einzelbeträgen zusammen: 1) aus den Kosten, welche durch den Ohmschen Widerstand des Kabels bedingt sind; der Verlust beträgt $C^2 r$ Watt pro km Trace, wobei r den Widerstand eines Kilometers der Hin- und Rückleitung in Ohm, und C den Strom in Ampère bedeutet; — 2) aus den Kosten, welche durch Amortisierung und Verzinsung des Anlagekapitals entstehen. Aus den Preislisten von Kabelfabrikanten und den Forderungen von Unternehmern für die Verlegung von Leitungen fand ich, dafs in jedem Falle bei gleichartigen Kabeln und bei gleichartiger Verlegung die Kosten eines Kilometers Leitung für die Praxis ausreichend genau als eine lineare Funktion des Kupfergewichtes angenommen werden können. Statt des Kupfergewichtes können wir aber auch den reziproken Wert des Leitungswiderstandes einführen, der ja auch für die unter 1) genannten Kosten mafsgebend war. Die unter 2) erwähnten Kosten hängen somit ab von dem Preise eines Kilogramms Kupfer und von der Höhe des für Verzinsung und Amortisation festgesetzten Prozentsatzes.

Wir können diese Ausgaben in Geld pro Jahr oder pro Sekunde und den Ohmschen Verlust in Watt ausdrücken. Addieren können wir die beiden Verluste jedoch erst dann, wenn wir den Geldwert eines „Wattjahres“ oder einer „Wattsekunde“ kennen.

Den Einflufs der drei in Betracht kommenden Gröfsen (Kupferpreis, Amortisationsquote und Stromerzeugungskosten) wollen wir

nun in die eine Konstante t^2 zusammenziehen, und den Gesamtverlust lieber in Watt als in Mark pro Jahr ausdrücken. Für denselben ergiebt sich dann:

$$y = C^2 r + \frac{t^2}{r} + b.$$

Für b kann man bei Übungsbeispielen irgend welche Werte zwischen 12 und 45 einsetzen. Wir empfehlen dem Leser aber, auf eigene Hand diesen Wert nach dem Kupferpreis, dem Zinsfuſs und den Stromerzeugungskosten eines Elektrizitätswerkes zu ermitteln*).

*) 1) Das Gewicht eines Kilometers Kupferleitung von a qmm Querschnitt muſs zunächst festgestellt werden; es betrage ma kg. Ist nun p der Preis eines kg Kupfer in Mark, so kann der Preis des Kabels nahezu gleich pma plus einer Konstanten gesetzt werden. Ist R der Betrag für Verzinsung und Amortisation in Prozenten pro Jahr, so ist der durch die Kosten des Kabels veranlasste jährliche Verlust in Mark bestimmt durch den Ausdruck:

$$\frac{R}{100} p \cdot m \cdot a + \text{const.}$$

Ist nun eine Ausgabe von 1 Mark jährlich gleichwertig mit einem Verluste von w Watt, so veranlassen die Anlagekosten einen dauernden Verlust von $\left(\frac{R}{100} wpma + \text{const.}\right)$ Watt.

Man beachte, daſs diese Zahl w sorgfältig ausgemittelt werden muſs; nur, wenn das Kabel jeden Tag 24 Stunden lang einen konstanten Strom führt, ist w sehr leicht zu bestimmen.

Nun setze man $a = \frac{36}{r}$ und sieht dann, daſs unser $t^2 = 0{,}36\, Rwpm$ ist.

2) Manche Leute meinen, daſs diese Lösung der Aufgabe die rentabelste Stromdichte für jeden beliebigen Leiter unter allen Umständen angiebt. Das ist ein Irrtum; denn obwohl die oben berücksichtigten Beträge sehr wichtig sind, so können doch, besonders bei langen Leitungen, noch neue Gesichtspunkte hinzutreten. Bei Beleuchtungsanlagen muſs man z. B. darauf Rücksicht nehmen, daſs zu groſse Spannungsverluste ein schlechtes und unruhiges Licht erzeugen. Handelt es sich andrerseits z. B. um die Dimensionierung der Ankerwickelung einer Dynamo, so muſs man beachten, daſs die Vergröſserung des Kupferquerschnitts zugleich den Eisenkörper und damit die ganze Maschine gröſser und teuerer werden läſst. Es kommen hier also hinzu der geringere Preis des minderwertigen Lichtes und die Mehrkosten der gröſseren Maschine.

3) Wenn man durch bloſsen mathematischen Ausdruck die gesamten Kosten irgend eines technischen Entwurfes darstellen kann als eine Funktion der Gröſse eines oder mehrerer Teile derselben, so ist es meist leicht, die günstigsten Gröſsen zu finden; aber es ist nicht immer leicht, gegebenen Falles die betreffende Funktion zu finden. Und doch sind dieser Art die Aufgaben, die jeder tüchtige Ingenieur fortwährend lösen muſs; die Vergröſserung eines Wertes bringt stets Vorteile und Nachteile mit sich; wie weit man gehen soll, ist also eine Frage über Maxima und Minima.

4) Man beachte auch folgendes: Angenommen, wir haben einen Wert von x gefunden, welcher y zu einem Maximum macht; dann kann es immer noch möglich sein, daſs ganz andere Werte von x Werte von y geben, welche auch nicht viel von diesem Maximum verschieden sind. Der tüchtige praktische Ingenieur wird auf diesen Umstand Rücksicht nehmen und wird in solchen Fällen **nicht allzu hartnäckig darauf bestehen**, gerade jenen zuerst bestimmten Wert von x zu benutzen.



Für gegebene Stromstärke C soll nun die Bedingung gesucht werden, unter welcher der Betrag y der Gesamtkosten ein Minimum wird. Die Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Frage nach der möglichst **rentablen Bemessung eines Kabels** für eine gegebene Stromstärke.

Die letzte Gleichung ergiebt:

$$\frac{dy}{dr} = C^2 - \frac{t^2}{r^2}$$

und dieser Wert wird 0 für $r = \frac{t}{C}$.

Demnach erhalten wir z. B.:

$$\text{für } \ t = 45 \ \text{ den Wert } \ r = \frac{45}{C}.$$

Ist nun a der Querschnitt des Leiters in qmm, so ist r ungefähr gleich $\frac{36}{a}$ Ohm, so dafs $C = 1{,}25\,a$ wird; es wäre also in diesem Falle am billigsten, jedes Quadratmillimeter des Kupferquerschnittes mit 1,25 Ampère zu belasten.

Nun ist aber im allgemeinen bei einer derartigen Berechnung des rentablen Querschnittes nicht die Stromstärke vorgeschrieben, sondern die elektrische Leistung, also das Produkt aus Stromstärke und Spannung.

Wenn man nun für eine **Funktion u von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen**, z. B. von x und y, die Maxima und Minima bestimmen soll, so setzt man erst $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, wobei y für die Differentiation nach x als konstant anzunehmen ist, und dann $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, wobei x während der Differentiation inbezug auf y als konstant gelten soll.

Aus den entstehenden beiden Gleichungen erhalten wir dann durch Auflösung diejenigen Werte von x und y, bei denen u ein Maximum oder ein Minimum wird. Ob das eine oder das andere eintritt, mufs dann noch besonders untersucht werden. Auch giebt es Fälle, bei denen ein auf dem angegebenen Wege gefundenes Wertsystem x, y weder ein Maximum noch ein Minimum der Funktion u ergiebt, doch können wir hierauf nicht weiter eingehen.

Ist übrigens u eine Funktion der Gröfsen x und y, die nicht unabhängig von einander sind, sondern durch ein Gesetz mit einander verknüpft erscheinen, so gestaltet sich die Rechnung weit einfacher; dann setzt uns meist eine kurze Überlegung des gesunden Menschenverstandes in den Stand, den Fall zu behandeln. Überhaupt ist es bei allen unseren Arbeiten erforderlich, dafs man nicht blos

einer Schablone folgt: — gerade die selbständige Überlegung über seine eigenen Probleme befähigt den Ingenieur, häufig schwierige Aufgaben mit geringen mathematischen Hilfsmitteln zu lösen.

Dies gilt auch für obige Betrachtung, wo statt der Stromstärke die zu übertragende **Energie** P **vorgeschrieben** ist und für diese der **günstigste Kabelquerschnitt gesucht** wird. Die Länge der Trace betrage n km und die Leitung (Hin- und Rückleitung zusammen) habe einen Widerstand von r Ohm pro Kilometer; ferner sei V_1, die Spannung am Generator, gegeben; C bedeute die Stromstärke, und V die Spannung an der Endstation. Dann ist:

$$V_1 - V = Cnr.$$

Nun ist $P = CV$ gegeben, und wir wissen bereits, dafs die Stromfortleitungskosten pro km:

$$(1) \qquad y = C^2 r + \frac{t^2}{r} + b$$

sind, wo wir t und b kennen.

Daraus müssen sich die Bedingungen für die günstigste Bemessung des Kabels ermitteln lassen.

Sowohl C als auch r sind hier veränderliche Gröfsen; aber sie sind nicht unabhängig von einander; denn es gelten die Beziehungen:

$$(2) \qquad V = V_1 - Cnr \quad \text{und} \quad P = CV_1 - C^2 nr.$$

Durch eine einfache Umrechnung können wir also y als Funktion von C allein oder von r allein finden. Z. B. ergiebt sich aus Gleichung (2):

$$(3) \qquad r = \frac{CV_1 - P}{C^2 n}.$$

Indem wir diesen Wert in Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir

$$(4) \qquad y = \frac{CV_1 - P}{n} + \frac{t^2 C^2 n}{CV_1 - P} + b.$$

Diese Gleichung enthält aufser C nur Konstanten, so dafs wir den Wert von C finden können, bei welchem y ein Minimum wird; kennen wir aber diese Stromstärke, so finden wir den zugehörigen Widerstand aus (3).

Bis jetzt haben wir angenommen, dafs der Leser nur x^n zu differenzieren vermag; infolge dessen kann er diese Aufgabe erst dann weiter verfolgen, wenn er etwas im Kapitel III gearbeitet hat*).

---

*) Für die Differentiation von Gleichung (4) werden wir in Kapitel III eine sehr einfache Methode kennen lernen, welche folgendes Resultat ergiebt:

$$\frac{dy}{dC} = \frac{V_1}{n} + \frac{(CV_1 - P)\, 2t^2 Cn - t^2 C^2 n V_1}{(CV_1 - P)^2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, so erhalten wir den gesuchten Wert für C. Es hätte nicht viel Wert, hier in unseren Betrachtungen noch weiter zu gehen, ohne bestimmte Zahlenwerte einzusetzen. Man rechne deshalb weiter mit den Werten: $V_1 = 600$ Volt, $n = 10$ Kilometer, $P = 20000$ Watt, $t^2 = 1600$ und suche C und dann r.

Wegen weiterer interessanter Rechnungen über diesen Gegenstand verweisen wir auf das Buch von C. Hochenegg: „Anordnung und Bemessung elektrischer Leitungen“.

Besonders hervorheben möchten wir noch, dafs bei gegebenen Werten für

In meinen Vorlesungen über „Hydraulic Machinery“ leitete ich einen Ausdruck ab für den bei **hydraulischer Arbeitsübertragung** durch ein Rohr auftretenden Gesamtverlust. Dieser Wert wurde als Funktion der von der primären Maschine geleisteten Arbeit, des höchsten Druckes und des Rohrdurchmessers d dargestellt. Es war dann leicht, d so zu wählen, dafs die Gesamtkosten ein Minimum werden. Wenn man jedoch p, den Druck an der *sekundären* Station, und die *sekundär* geleistete Arbeit von vornherein als gegeben annimmt und damit auch Q, die sekundliche Wassermenge in Kubikmeter, und wenn man die Kosten der Verlegung proportional mit dem Quadrate des Durchmessers einsetzt, so ergiebt sich für die Gesamtkosten ein Ausdruck von folgender Form:

$$y = a\frac{lQ^3}{d^5} + b\frac{l^2Q^2}{d^3} + cld^2.$$

Dabei hängt der Wert der Konstanten a, b und c ab von den Erzeugungskosten der Energie, dem Zinsfufse, dem Eisenpreise etc. Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn sein Differentialquotient nach d gleich Null wird, d. h. wenn

$$2cld = 5alQ^3d^{-6} + 3bl^2Q^2d^{-4}$$

wird. Aus dieser Beziehung können wir dann den günstigsten Wert für d leicht durch Probieren ermitteln. Die Konstanten b und c werden auch mit durch die Festigkeit des Materials bedingt, und es ist also möglich, zu entscheiden, ob Schmiedeeisen oder Gufseisen geringere Gesamtkosten ergiebt. Aber auch dann ist immer noch eine Position vernachlässigt, nämlich die Kosten der Maschinen und der Pumpen.

Im Anschlufs an das letzte Beispiel wollen wir jetzt noch eine Aufgabe über elektrische Leitungen behandeln, bei der zwar kein Maximum oder Minimum zu ermitteln ist, die aber gerade hierher pafst:

Eine elektrische Verteilungsleitung gebe dauernd auf jedem Kilometer ihrer Länge eine Stromstärke von a Ampère ab. Es sei x die Entfernung irgend eines Punktes (in Kilometern) von dem der Dynamomaschine abgelegenen Ende der Linie. Ferner sei C die Stromstärke und V die Spannung an dieser Stelle, und r der Widerstand der Leitung pro Kilometer in Ohm (und zwar der Widerstand von einem Kilometer Hinleitung und einem Kilometer Rückleitung zusammen).

Der auf einer Länge Δx abgegebene Strom ist ΔC oder korrekter: $\Delta x \frac{dC}{dx}$, und die entsprechende elektrische Energie beträgt: $\Delta x \cdot V \cdot \frac{dC}{dx}$ Watt. Ist also P die an der betreffenden Stelle x pro Längeneinheit (km) abgegebene Energie, so gilt die Beziehung:

$$P = V \cdot \frac{dC}{dx}. \tag{1}$$

Nun wollen wir mit $V + \Delta V$ die Spannung bei $x + \Delta x$ bezeichnen. Dann ergiebt sich für die Stromstärke, da ja $r \cdot \Delta x$ der Widerstand des betrachteten

---

V_1, r und P die Länge der Trace nicht mehr unbeschränkt ist; vielmehr ist dann der höchste erreichbare Wert:

$$n = \frac{V_1^2}{4rP}.$$

Bei dieser Länge des Kabels wird nämlich P genau gleich dem durch den Ohmschen Widerstand des Kupfers bedingten Verlust.

Stückes ist, der Wert: $C = \frac{\varDelta V}{r \cdot \varDelta x}$ — oder genauer, da ja dieser Ausdruck nur dann korrekt wird, wenn $\varDelta x$ immer kleiner und kleiner genommen wird:

$$C = \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dx}. \tag{2}$$

Wir hatten $\frac{dC}{dx} = a$ gesetzt; ist nun $C = 0$ für $x = 0$ d. h. am Ende des Kabels, so wird $C = ax$.

Nehmen wir ferner r als konstant an, so lautet nunmehr Gleichung (2):

$$rax = \frac{dV}{dx},$$

woraus sich ergiebt:

$$V = V_0 + \tfrac{1}{2} rax^2. \tag{3}$$

Dabei bedeutet V_0 die Spannung am Ende der Strecke.

Die Gleichung (1) lautet dann:

$$P = a \cdot V_0 + \tfrac{1}{2} ra^2x^2. \tag{4}$$

Nehmen wir beispielsweise: $V_0 = 200$ Volt, $a = 25$ Ampère pro km Trace, $r = 1$ Ohm pro km, so können wir leicht nachrechnen, wie die pro km abgegebene Leistung und die Spannung sich verringern, je weiter wir uns vom Generator entfernen.

x	V	P
0	200	5000
1	212,5	5312
2	250	6250
3	312,5	7812
4	400	10000

Ist V_1 die Spannung bei der Dynamo, und ist die Linie im ganzen n km lang, so ergiebt sich aus (3):

$$V_1 = V_0 + \tfrac{1}{2} arn^2.$$

Die Leistung pro Kilometer kann im äufsersten Falle $P_0 = aV_0$ werden; sind uns nun V_1 und P_0 gegeben, und wird V_0 gesucht, so finden wir, dafs n nicht gröfser werden kann als

$$\frac{V_1}{\sqrt{2rP_0}}.$$

Dies ist also der Grenzwert für die Länge der Linie.

Wenn wir, z. B. bei einer **elektrischen Bahnanlage,** *für P auf der ganzen Strecke einen möglichst gleichmäfsigen Wert zu erzielen wünschen,* so können wir versuchen

$$C = ax - bx^c \tag{5}$$

zu setzen, worin a, b und c Konstanten sind. Dann wird $\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} = ax - bx^c$,

$$V = V_0 + \tfrac{1}{2} rax^2 - \frac{rb}{c+1} x^{c+1}. \tag{6}$$

Da nun $P = V\frac{dC}{dx}$ oder gleich $V(a - cbx^{c-1})$ ist, so können wir leicht die drei Konstanten a, b, c so bestimmen, dafs P bei drei beliebig angenommenen Punkten der Linie denselben Wert hat.

Z. B. sei: $r = 1$ Ohm, $V_0 = 100$ Volt, $P = 10000$ Watt für folgende drei Punkte: $x = 0$, $x = 1$ km, $x = 1{,}5$ km.

Dann finden wir durch Probieren, daſs

$$C = 100\,x - 14{,}75\,x^{2{,}115}$$

sein muſs, und daraus können wir dann leicht C für irgend einen beliebigen Punkt der Strecke ermitteln.

Beispiel 19. Die Anschaffungskosten einer Maschine mögen $ax + by$ Mark betragen; ihr Wert für mich sei dagegen proportional mit xy. Gesucht werden nun die günstigsten Werte von x und y, wenn für die Anschaffung eine feste Summe ausgeworfen ist; es soll also xy ein Maximum werden.

Wir setzen $c = ax + by$, sodaſs

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \quad \text{und} \quad xy = \frac{c}{b}x - \frac{a}{b}x^2$$

wird. Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn

$$\frac{c}{b} = 2\frac{a}{b}x \quad \text{oder} \quad ax = \frac{c}{2}$$

wird. Folglich giebt

$$ax = by = \frac{c}{2}$$

die günstigsten Daten für die Maschine an.

Beispiel 20. **Die elektrische Zeitkonstante** einer cylindrischen Drahtspule ist näherungsweise:

$$u = \frac{mxyz}{ax + by + cz}.$$

Darin bedeutet x den mittleren Radius, y die Differenz zwischen dem inneren und dem äuſseren Radius, z die axiale Länge der Spule; m, a, b, c sind vier Konstanten, deren Werte bekannt sind.

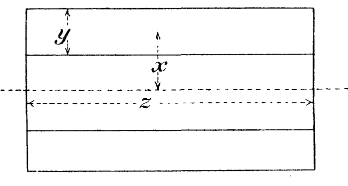


Fig. 9.

Das Volumen der Spule ist $2\pi xyz$.

Gesucht seien nun bei gegebenen Volumen der Spule diejenigen Werte von x, y und z, für welche u ein Maximum wird.

Wir setzen demnach $2\pi \cdot xyz = g$ und fragen: wann wird

$$\frac{a}{yz} + \frac{b}{xz} + \frac{c}{xy}$$

ein Minimum? Wir substituieren für z seinen Wert; dann geht unsere Frage über in die nach dem Minimum von:

$$ax + by + \frac{gc}{2\pi xy}.$$

Diesen Ausdruck wollen wir v nennen. Da nun x und y unabhängig von einander sind, so müssen wir $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ einzeln gleich Null setzen. Dann erhalten wir:

$$a + 0 - \frac{gc}{2\pi y x^2} = 0,$$

$$0 + b - \frac{gc}{2\pi x y^2} = 0,$$

$$x^2 y = \frac{gc}{a 2\pi}, \quad xy^2 = \frac{gc}{b 2\pi}.$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen ergiebt:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}; \quad y = \frac{ax}{b}, \quad x^2 \frac{ax}{b} = \frac{gc}{a 2\pi},$$

$$x^3 = \frac{bgc}{a^2 2\pi}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{bgc}{a^2 2\pi}}.$$

Daraus folgt dann

$$y = \sqrt[3]{\frac{agc}{b^2 2\pi}}$$

und

$$z = \frac{g}{2\pi xy} = \sqrt[3]{\frac{abg}{c^2 2\pi}}.$$

38. Das Drahtseil einer Hängebrücke trägt seine Last vermittelst angehängter Stangen; die so angebrachten Lasten sind für die einzelnen Hängeeisen ungefähr einander gleich und gleichmäſsig verteilt. Für die Rechnung nehmen wir an, daſs das Seil ganz gleichmäſsig belastet sei, und zwar sei das Gewicht der Last für die Längeneinheit, *horizontal* gemessen, gleich w. Ein fast horizontal verlaufender gleichförmig gebildeter Telegraphendraht genügt nahezu dieser Voraussetzung. Welche Gestalt wird das Seil annehmen?

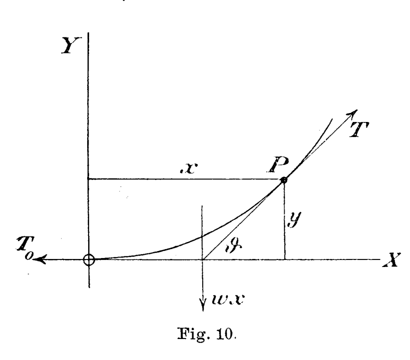


Fig. 10.

Der tiefste Punkt des Seiles (cf. Figur 10) sei der Nullpunkt O des Koordinatensystems. Die Abscissenaxe OX läuft von hier horizontal und tangential zum Seile. Die Ordinatenaxe OY steht in O vertikal. Ein beliebiger Punkt P des Seiles habe die Koordinaten x und y. Man betrachte nun die Gleichgewichtsbedingung des Teiles OP der Kurve. Derselbe ist im Gleichgewicht unter der

Wirkung erstens einer Zugkraft T_0, welche tangential in O angebracht ist, zweitens einer gegen die x-Axe geneigten und zwar tangential zur Kurve im Punkte P angebrachten Kraft T, drittens einer in Richtung der negativen Ordinatenaxe wirkenden Kraft wx, welche die Resultante der Schwerkraft für unser Kurvenstück OP ist.

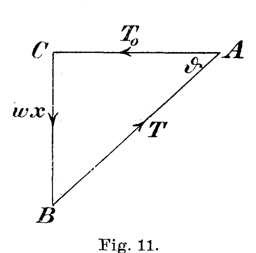


Fig. 11.

Man wende nun die Regeln über Kräfte am starren Körper an. Dabei ist als starr ein Körper zu bezeichnen, wenn die auf ihn ausgeübten Kräfte eine Veränderung seiner Gestalt nicht mehr bewirken. Ziehen wir ein Dreieck, dessen Seiten parallel den drei genannten Kräften laufen, so müssen diese Seiten den drei Kräften proportional sein. Ist ϑ die Neigung von T gegen die x-Axe (cf. Figur 11), so folgt:

(1) $$\frac{T_0}{T} = \cos\vartheta,$$

(2) $$\frac{wx}{T_0} = \operatorname{tang}\vartheta.$$

Da aber andrerseits für unsere Kurve $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\vartheta$ zutrifft, so ist

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x,$$

woraus man durch Integration gewinnt:

$$y = \frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2 + C.$$

Die Konstante C hat den Wert 0, da für $x = 0$ der Wert $y = 0$ zutrifft. Die Gleichung der Kurve ist somit:

(4) $$y = \frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2;$$

sie stellt eine Parabel dar. Hieraus folgt natürlich umgekehrt wieder:

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{w}{T_0}x, \quad \frac{1}{\cos^2\vartheta} = 1 + \frac{w^2}{T_0^{\,2}}x^2;$$

und da $T\cos\vartheta = T_0$ ist, so findet man endlich:

(5) $$T = T_0\sqrt{1 + \frac{w^2}{T_0^{\,2}}x^2}.$$

Eine Reihe sich hier anschliefsender Rechnungen ist nun leicht ausführbar. Ist z. B. für einen Telegraphendraht l die Spannweite und D der Durchhang, d. i. die Höhendifferenz des tiefsten Punktes

gegen die beiden gleich hoch angenommenen Aufhängungspunkte, so haben wir für Formel (4) zu beachten, daſs für $x = \frac{1}{2} l$ offenbar $y = D$ zutrifft. Es ist somit:

$$D = \frac{1}{2} \frac{w}{T_0} \frac{1}{4} l^2 \quad \text{oder} \quad T_0 = \frac{w l^2}{8 D},$$

und hieraus ist die Spannung T an irgend einer Stelle x nach (5) leicht zu berechnen.

Bei der Untersuchung der Gestalt eines gleichförmigen und nur mit seinem eigenen Gewichte belasteten Seiles ist die Integration nicht ganz so leicht ausführbar. Diese Entwicklung, welche die Kenntnis des dritten Kapitels voraussetzt, geben wir in einer Note*).

---

*) Das Gewicht eines Teiles OP unserer Kurve (cf. Figur 10) ist jetzt nicht mehr gleich wx, sondern gleich ws, wenn s die Bogenlänge der Kurve von O bis P ist. Die Kurve selbst trägt in diesem Falle den Namen der **Kettenlinie.** An Stelle der Gleichung (3) tritt:

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{T_0} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{s}{c},$$

falls man $T_0 = wc$ setzt. Ist ds ein Bogendifferential unserer Kurve, so ist bekanntlich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1},$$

und also folgt aus (1):

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{s}, \quad dy = \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}},$$

woraus man durch Integration gewinnt:

(2) $$y + c = \sqrt{c^2 + s^2}.$$

Hierbei ist die Integrationskonstante derart bestimmt, daſs für $y = 0$ die Bogenlänge $s = 0$ zutrifft. Aus (2) folgt:

(3) $$s^2 = y^2 + 2yc.$$

Durch Eintragung des hieraus entspringenden Wertes von s in (1) findet man weiter:

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 + 2yc}}.$$

Durch Integration folgt:

$$x = c \log \frac{y + c + \sqrt{y^2 + 2yc}}{c};$$

hier darf keine von 0 verschiedene Konstante mehr hinzugesetzt werden, da die Gleichung für $x = 0$, $y = 0$, d. h. für den Ursprung des Koordinatensystems erfüllt sein muſs.

Unter Benutzung der Exponentialfunktion läſst sich die letzte Gleichung so schreiben:

$$y + c + \sqrt{y^2 + 2yc} = c \cdot e^{\frac{x}{c}},$$

Ist das Seil so flach, daſs wir das Gewicht eines Segmentes desselben proportional seiner Horizontalprojektion setzen dürfen, so haben wir nach obigem die parabolische Gestalt.

39. Wirkungsgrad der Heizfläche eines Dampfkessels. Die Wärmemenge, welche ein Gas bei Abkühlung von der Temperatur $\theta = \theta_1$ bis auf $\theta = \theta_2$ abgiebt, sei pro kg Gas gleich $c(\theta_1 - \theta_2)$, unter c eine Konstante verstanden. [In Wahrheit trifft diese Annahme der Proportionalität zwischen abgegebener Wärme und Temperaturdifferenz, also die Annahme einer konstanten spezifischen Wärme des Gases,

---

woraus weiter leicht folgt:

$$y + c - \sqrt{y^2 + 2yc} = c \cdot e^{-\frac{x}{c}}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen entspringt:

$$y + c = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Man gehe jetzt nachträglich zu dem in Figur 12 gezeichneten Koordinatensystem über, dessen Nullpunkt in der Entfernung c senkrecht unter dem tiefsten Punkte der Kettenlinie gelegen ist. Die Ordinate y_1 im neuen System ist alsdann durch $y_1 = y + c$ gegeben, während x unverändert bleibt. Die Gleichung der Kettenlinie wird jetzt:

$$(4) \qquad y_1 = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

was man unter Gebrauch der Funktion cosh, d. h. des hyperbolischen Cosinus, auch so schreiben kann:

$$y_1 = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right).$$

Auf Grund von (1) findet man jetzt:

$$s = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

oder auch

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right).$$

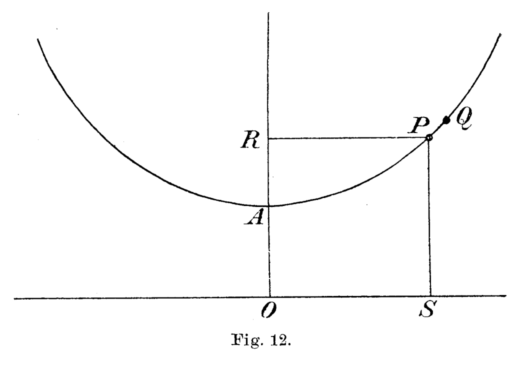


Fig. 12.

Wir bemerken, daſs über die Werte der hyperbolischen Funktionen $\sinh u$ und $\cosh u$ Tafeln publiziert sind.

Unter nochmaliger Rückkehr zu den Figuren 10 und 11 stellen wir für die Zugspannung im Punkte P die Gleichung auf:

$$\frac{T}{ws} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{ds}{dy}$$

oder, da aus (3) sich sofort $s \cdot \frac{ds}{dy} = y + c$ ergiebt,

$$\frac{T}{ws} = \frac{y+c}{s} \quad \text{oder endlich} \quad T = w(y+c) = wy_1.$$

nicht genau zu.] Als Gesetz für die Wärmetransmission der Heizfläche nehmen wir nach Versuchen von Peclet an: Die Wärmemenge, welche von dem Heizgase durch die Kesselwand in das Wasser übertritt, sei pro Stunde und qm Heizfläche $m\theta^2$, falls θ die an der betreffenden Stelle herrschende Temperaturdifferenz zwischen Gas und Wasser ist. Nun sei θ_1 der Wert von θ für das Feuerende des Zuges, und θ_2 derjenige für das Fuchsende. Dann wollen wir den an einer beliebigen Stelle des Feuerzuges vor sich gehenden Wärmeaustausch betrachten.

Die Gase mögen vom Rost bis zu einem bestimmten Punkte, an dem die Temperaturdifferenz θ zwischen Gas und Wasser herrscht, im Ganzen eine Heizfläche von S qm bestrichen haben; von dort strömen sie weiter nach einer Stelle, wo S zu $S + \varDelta S$ und θ zu $\theta + \varDelta \theta$ geworden ist. Dabei ist übrigens $\varDelta \theta$ negativ, wie wir gleich sehen werden.

Wir nehmen nun an, daſs der Beharrungszustand eingetreten sei, und daſs durch die Fläche $\varDelta S$ während jeder Stunde eine Wärmemenge $m\theta^2 \cdot \varDelta S$ von den Gasen an das Wasser abgegeben werde. Wenn dann während einer Stunde W kg der Gase an dieser Stelle vorbeiziehen, von denen jedes $-c \cdot \varDelta \theta$ Calorien abgiebt, so erhalten wir $-Wc \cdot \varDelta \theta$ als zweiten Ausdruck für die stündlich durch die Fläche $\varDelta S$ abgegebene Wärmemenge; es entspringt somit die Gleichung:

$$- Wc \cdot \varDelta \theta = m\theta^2 \cdot \varDelta S$$

oder korrekter:

$$\frac{dS}{d\theta} = -\frac{Wc}{m} \cdot \frac{1}{\theta^2}. \tag{1}$$

Durch Integration nach θ finden wir dann:

$$S = \frac{Wc}{m}\frac{1}{\theta} + a, \tag{2}$$

wobei a die Integrationskonstante ist.

Wir setzen nun für θ spezielle Werte ein; zunächst: $\theta = \theta_1$, d. i. gleich der Temperaturdifferenz am Feuerende, wo $S = 0$ ist; dann erhalten wir:

$$0 = \frac{Wc}{m}\frac{1}{\theta_1} + a, \qquad a = -\frac{Wc}{m}\frac{1}{\theta_1},$$

sodaſs (2) übergeht in:

$$S = \frac{Wc}{m}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_1}\right). \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt, wie θ mit wachsendem S vom Feuerende zum Fuchs immer mehr abnimmt, und es lohnt sich der Mühe,

eine Kurve aufzustellen, welche die Beziehung zwischen S und θ darstellt.

Ist fortan S die gesamte Heizfläche des Kessels, die zu $\theta = \theta_2$, d. i. zur Temperaturdifferenz am Fuchsende gehört, so erhalten wir:

$$S = \frac{Wc}{m}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right). \tag{4}$$

Auf dem Roste enthält jedes kg der Heizgase $c\theta_1$ abgebbare Cal.; davon giebt es an das Wasser in Wirklichkeit aber nur $c \cdot (\theta_1 - \theta_2)$ Cal. ab. Infolgedessen kann als **Wirkungsgrad der Heizfläche** der Quotient

$$E = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} \tag{5}$$

angesehen werden, den wir gemäfs Gleichung (4) auch folgendermafsen schreiben können:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{Wc}{\theta_1 m S}}.$$

Nun sei W' das Gewicht der pro Stunde verbrannten Kohle. Dann ist $W = 13\,W'$, wenn gerade soviel Luft zugelassen wird, wie zur vollständigen Verbrennung erforderlich ist. In Wahrheit wird stets mehr Luft zugeführt. So ist bei künstlichem Zuge gewöhnlicher Anordnung W etwa gleich $20\,W'$; bei Feuer mit natürlichem, durch den Kamin erzeugten, Zuge haben wir etwa mit $W = 26\,W'$ zu rechnen.

Je gröfser der (praktisch unvermeidliche) Luftüberschufs ist, desto geringer wird natürlich θ_1. Aber die Erfahrung zeigt, dafs θ_1 sich nicht umgekehrt proportional mit W ändert, wie man wohl auf den ersten Blick vermuten möchte. In welcher Weise θ_1 von dem Betrage des Luftüberschusses abhängt, wissen wir zwar nicht genau; angenähert scheint indessen Folgendes zu gelten: wenn $\frac{W'}{S}$ die pro Stunde und pro qm Heizfläche verbrannte Kohlenmenge bedeutet und wir diesen Quotienten mit w bezeichnen, so scheint ein Gesetz etwa von der Form: $E = \frac{1}{1 + aw}$ zu bestehen, wobei a von dem Betrage der überschüssigen Luft abhängt. In der Praxis hat man gefunden, dafs für natürlichen Kaminzug $a = 0{,}1$ und für künstlichen Zug $a = 0{,}06$ ziemlich zutreffende Resultate ergiebt.

Sind besondere Einrichtungen zur Vorwärmung des Speisewassers vorhanden, so kann man diese dadurch berücksichtigen, dafs man den Zähler des Bruches gröfser als 1 annimmt.

Anstatt des oben angegebenen Gesetzes, dafs die pro qm Heizfläche und pro Stunde von den Gasen abgegebene Wärmemenge proportional mit θ^2 sei, hat man vielfach — und wahrscheinlich trifft dies besser zu — auch angenommen, dafs diese Wärmeabgabe proportional mit θ ist. Dann nimmt die obige Gleichung (1) folgende Form an:

$$(1) \qquad \frac{dS}{d\theta} = -\frac{cW}{m\theta},$$

$$(2) \qquad S = -\frac{cW}{m}\log\theta + \text{const.}$$

Wir setzen nun wieder für θ zunächst den Wert θ_1, d. i. die Temperaturdifferenz am Feuerende, ein; dort ist $S = 0$, sodafs unsere Konstante gleich $\frac{cW}{m}\log\theta_1$ wird und Gleichung (2) übergeht in:

$$(3) \qquad S = \frac{cW}{m}\log\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right).$$

Ist andererseits S, wie vorhin, die gesamte Heizfläche, und θ_2 die Temperaturdifferenz am Fuchsende, so wird für diese Stelle:

$$(4) \qquad S = \frac{cW}{m}\log\frac{\theta_1}{\theta_2},$$

$$e^{\frac{Sm}{cW}} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Der Wirkungsgrad

$$(5) \qquad E = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}$$

wird dann:

$$(6) \qquad E = 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} = 1 - e^{-\frac{Sm}{cW}}.$$

Oder, wenn wir wieder mit w das Gewicht des Brennmaterials pro Stunde und qm Heizfläche bezeichnen, so geht Gleichung (6) über in:

$$(7) \qquad E = 1 - e^{-\frac{1}{aw}}.$$

40. Arbeitsleistung einer expandierenden Flüssigkeit*). Es sei in irgend einem Augenblicke p der Druck und v das Volumen einer Flüssigkeit, welche bei der Expansion bereits eine Arbeit von W mkg geleistet hat. Dann ist eine gute Definition des Druckes:

$$(1) \qquad p = \frac{dW}{dv}$$

oder in Worten: Der Druck ist gleich der pro Einheit der Volumänderung geleistete Arbeit.

*) Man beachte, dafs diese Aufgabe sehr leicht wird, sobald wir nur für p und v die Buchstaben x und y schreiben.

Anschaulicher wird uns dieser Satz durch folgende Überlegung werden: Wenn die Flüssigkeit sich um das Volumen $\varDelta v$ ausdehnt, so leistet sie dabei eine Arbeit $p \cdot \varDelta v$, welche gleich $\varDelta W$ ist; daraus folgt dann unmittelbar:

$$p = \frac{\varDelta W}{\varDelta v}.$$

Dies ist aber nur dann genau richtig, wenn $\varDelta v$ weiter und weiter gegen die Grenze 0 abnimmt, und damit kommen wir auf Gleichung (1).

Nun möge die Flüssigkeit expandieren nach dem Gesetze:

(2) $$p \cdot v^s = c,$$

wobei c eine Konstante bedeutet.

Dann ist $p = c \cdot v^{-s}$, und dies soll also der Differentialquotient von W nach v sein. Wir haben demnach zu setzen:

$$\frac{dW}{dv} = c \cdot v^{-s}.$$

Wir integrieren gemäfs der in Art. 28 besprochenen Regel und erhalten:

(3) $$W = \frac{+c}{-s+1} v^{-s+1} + C,$$

wobei C eine Konstante ist. Um den Wert derselben zu finden, setzen wir fest, dafs wir die Arbeit W von dem Werte $v = v_1$ des Volumens ab rechnen wollen; d. h. es ist $W = 0$ für $v = v_1$.

Dann gilt für diesen Zustand:

$$0 = \frac{c}{1-s} v_1^{1-s} + C,$$

und daraus folgt:

$$C = -\frac{c}{1-s} v_1^{1-s}.$$

Diesen Wert von C setzen wir nun in Gleichung (3) ein und erhalten:

(4) $$W = \frac{c}{1-s} (v^{1-s} - v_1^{1-s}).$$

Entsprechend gilt für die bei der Expansion von v_1 auf v_2 geleistete Arbeit:

(5) $$W_{12} = \frac{c}{1-s} (v_2^{1-s} - v_1^{1-s}).$$

Diese Lösung kann zweckmäfsig auch noch in andere Formen gebracht werden. Aus Gleichung (2) haben wir nämlich:

$$c = p_1 v_1^s = p_2 v_2^s.$$

Indem wir diesen Wert für c in (5) einsetzen, erhalten wir:

$$W_{12} = \frac{p_1 v_1^s}{1-s} (v_2^{1-s} - v_1^{1-s}),$$

oder

$$W_{12} = \frac{p_1 v_1}{1-s} \left\{ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-s} - 1 \right\},$$

oder endlich:

(6) $$W_{12} = \frac{p_1 v_1}{s-1} \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{s-1} \right\},$$

eine Formel, welche bei Berechnung von Gas- und Dampfmaschinen vielfach benutzt wird.

Es giebt einen Fall, bei welchem diese Lösung ihre Dienste versagt: Man versuche $s = 1$ einzusetzen; das heifst: man suche zu bestimmen, welche Arbeit eine Flüssigkeit bei der Expansion von v_1 auf v_2 leistet, wenn sie nach folgendem Gesetz expandiert:

$$p \cdot v = c.$$

(Bei einem Gase würde diese Gleichung die isothermische Expansion bezeichnen.)

Wenn man erkannt hat, dafs die Lösung mifslingt, kehre man zurück zu der Gleichung:

$$\frac{dW}{dv} = c \cdot v^{-1}. \tag{7}$$

Man wird nun allgemein finden, dafs bei der Integration von x^m die in Art. 28 angegebene Lösung unbrauchbar wird, wenn $m = -1$ ist; aber wir haben schon gesagt und werden es auch bald beweisen, dafs das Integral von x^{-1} gleich $\log x$ ist. Demnach ist das Integral von (7):

$$W = c \cdot \log v + C.$$

Wenn wir nun in derselben Weise weiter schliefsen wie vorhin, werden wir für diesen Spezialfall finden:

$$W_{12} = c \cdot \log \frac{v_2}{v_1}. \tag{8}$$

41. Vereinfachtes Dampfmaschinendiagramm. Der Dampf werde dem Cylinder mit dem konstanten Druck p_1 zugeführt, während der Dampfraum hinter dem Kolben von 0 bis v_1 anwächst. Die dabei geleistete Arbeit ist gleich $v_1 p_1$. Nun expandiere der Dampf auf das Volumen v_2 nach dem Gesetze: $p \cdot v^s = c$.

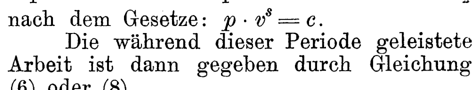


Fig. 13.

Die während dieser Periode geleistete Arbeit ist dann gegeben durch Gleichung (6) oder (8).

Der Gegendruck hinter dem Kolben sei p_3; dann ist die Arbeit, welche die Austreibung des Dampfes bei dem Rückgange des Kolbens erfordert, gleich $p_3 v_2$; die Kompression vernachlässigen wir bei diesem Diagramm.

Bezeichnen wir nun noch $\frac{v_2}{v_1}$, den Expansionsgrad, mit r, so erhalten wir als gesamte Arbeit des Dampfes pro Kolbenhub den Ausdruck:

$$p_1 v_1 + \frac{p_1 v_1}{s-1}\left\{1 - r^{1-s}\right\} - p_3 v_2.$$

Nun sei p_i der „mittlere indizierte Druck“, sodafs $p_i v_2$ gleich der eben angegebenen indizierten Arbeit wird; (p_i kann durch Planimetrieren aus dem aufgenommenen Indikatordiagramm gefunden werden). Wir setzen die beiden Ausdrücke gleich und dividieren durch v_2; dann erhalten wir nach einigen Vereinfachungen:

$$p_i = p_1 \frac{1}{r} + \frac{p_1}{s-1} \frac{1}{r} \left(1 - r^{1-s}\right) - p_3,$$

$$p_i = \frac{p_1}{s-1}\left(\frac{s}{r} - r^{-s}\right) - p_3.$$



In dem Spezialfalle, daſs $s = 1$ ist, finden wir auf dieselbe Weise:

$$p_i = p_1 \frac{1 + \log r}{r} - p_3 .$$

42. Bestimmtes Integral. *Erklärung.* Das Symbol:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bedeutet für uns folgende Rechenvorschrift: „Man berechne nach Art. 28 das unbestimmte Integral von $f(x)$, trage in dasselbe nach einander für x die Werte b und a ein und ziehe den letzteren der beiden entspringenden Werte vom ersteren ab“*). Das Resultat wird als das

---

*) Das symbolisch durch:

(1) $$\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{F(x)} u\, dy \right) dx$$

bezeichnete Integral würde nach folgender Vorschrift zu berechnen sein. Zunächst ist u, welches als Funktion von x und y angenommen ist, bei konstantem x inbezug auf y zu integrieren und zwar nach der im Texte gegebenen Vorschrift zwischen den Grenzen $f(x)$ und $F(x)$. Das Resultat ist inbezug auf x unbestimmt zu integrieren; in den entspringenden Ausdruck sind sodann für x die Grenzen b und a einzutragen und das letztere Resultat ist vom ersteren abzuziehen.

I. Ist beständig $u = 1$, so bedeutet $u\, dx\, dy = dx\, dy$ offenbar ein Flächenelement in der xy-Ebene, nämlich den Inhalt eines unendlich kleinen Rechtecks, dessen Seiten den Koordinatenaxen parallel laufen. Nach Ausführung der ersten Integration bleibt noch das weitere Integral

(2) $$\int_a^b [F(x) - f(x)]\, dx$$

zu berechnen. Ersichtlich bedeutet dasselbe den Flächeninhalt desjenigen Stückes der xy-Ebene, welches zwischen den beiden durch $y = F(x)$ und $y = f(x)$ dargestellten Kurven und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten gelegen ist (cf. Figur 14). Man wird im Anfange am besten thun, sich nur mit der Gestalt (2) des Integrals und also mit Ausmessungen von Flächeninhalten der bezeichneten Art zu beschäftigen.

II. Bedeutet etwa u das Gewicht einer auf dem beschriebenen Stücke der Ebene aufliegenden Schicht Gold pro Einheit des Flächenmaſses, so wird $u\, dx\, dy$ das Gewicht der über dem Flächenelement $dx\, dy$ gelegenen Schicht sein. Das Integral aber wird das Gewicht der ganzen über dem fraglichen Ebenenstücke gelegenen Schicht sein. —

Fig. 14.

Wünscht man allgemein anzuzeigen, daſs irgend eine von den drei Variabelen x, y, z abhängige Gröſse u über irgend einen nicht näher angegebenen Teil des Raumes integriert werden soll, so bedient man sich des dreifachen Integrals:

bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b bezeichnet. Man beachte, dafs eine willkürliche Konstante, die im Ausdruck des unbestimmten Integrals enthalten ist, bei der zur Berechnung des bestimmten Integrals erforderlichen Subtraktion einfach fortfällt.

Bei der Integration zwischen bestimmten Grenzen verfährt man zweckmäfsiger Weise so: Um z. B. $\int_a^b x^2\,dx$ zu berechnen, bestimmen wir das unbestimmte Integral $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$ und bedienen uns der Schreibweise:

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_a^b = \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{3}a^3.$$

Allgemein haben wir entsprechend, wenn das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ gleich $F(x)$ gefunden wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Offenbar ergeben sich aus der Definition des bestimmten Integrals die beiden Regeln:

$$\iiint u\,dx\,dy\,dz,$$

ebenso wie man in unbestimmter Form bei Integrationen über Bereiche in der Ebene die symbolische Bezeichnung braucht:

$$\iint v\,dx\,dy.$$

Ein solches „Flächenintegral" schreibt man auch manchmal:

$$\int v\,dS,$$

unter dS ein Flächenelement verstanden, wobei sich alsdann die durch $\int$ angedeutete Summierung auf alle Elemente des in der Ebene vorgeschriebenen Bereiches bezieht. Auch bei Integrationen über Bereiche gekrümmter Flächen benutzt man die Schreibweise:

$$\int v\,dS.$$

Diese Bezeichnung schliefst sich derjenigen eines sogenannten „Linienintegrales":

$$\int w\,ds$$

an, welches sich auf ein Stück irgend einer ebenen oder im Raume gelegenen Kurve bezieht, deren Element ds ist.

Das Linienintegral der Zugkraft, welche auf einen Eisenbahnwagen ausgeübt wird, liefert die insgesamt geleistete Arbeit. Beim Strömen einer Flüssigkeit durch eine Fläche ist, sofern v die normal gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit ist, das Flächenintegral $\int v\,dS$ einfach gleich der pro Sekunde hindurchgeströmten Flüssigkeitsmenge. Der Ingenieur hat bei seinen praktischen Arbeiten unausgesetzt mit Linien-, Flächen- und Raumintegralen zu thun, und er hat in den hier gebrauchten symbolischen Darstellungen der Integrale gar nichts weiter zu sehen, als was ihm aus der Praxis bereits vollkommen geläufig ist.



$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

43. Flächeninhaltsbestimmungen. Es sei in der xy-Ebene eine Kurve durch ihre Gleichung gegeben, und es sei PS (cf. Figur 15) ein Stück dieser Kurve. Für das in der Figur durch $MPQT$ bezeichnete Stück der Ebene soll der Inhalt bestimmt werden.

Der zu bestimmende Inhalt heiße I, und es werde gesetzt (cf. Figur 15):

$$\overline{OT} = x, \quad \overline{QT} = y,$$
$$\overline{OW} = x + \Delta x, \quad \overline{WR} = y + \Delta y.$$

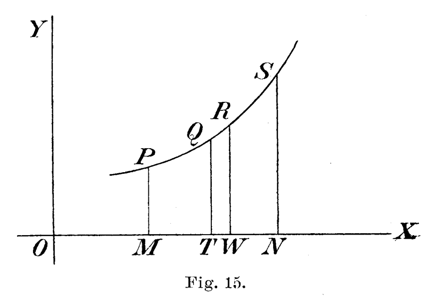


Fig. 15.

Ist entsprechend der Inhalt des Stückes $MPRW$ durch $I + \Delta I$ bezeichnet, so bedeutet offenbar ΔI den Flächeninhalt des Streifens $TQRW$.

Wäre das Stückchen QR unserer Kurve gerade, so wäre:

$$\Delta I = \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot (\overline{TQ} + \overline{RW}) = \Delta x\,(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)$$

und also:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y.$$

Nun weicht das Kurvenstück QR bei mehr und mehr abnehmendem Δx immer weniger von der Geraden QR ab; somit wird für den Grenzübergang lim. $\Delta x = 0$ die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{dI}{dx} = y$$

eintreten. Mithin ist I eine solche Funktion von x, deren Differentialquotient gleich y ist; d. h. I ist gleich dem Integral von y.

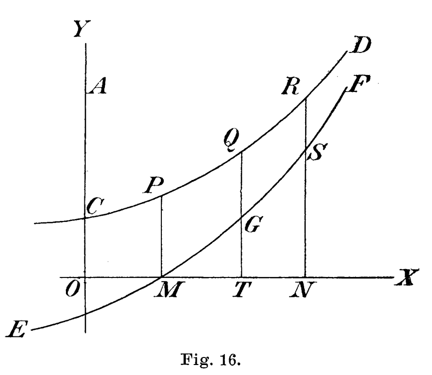


Fig. 16.

In Figur 16 möge durch CQD die durch $y = a + bx^2$ gegebene Kurve dargestellt sein, und $EMGF$ sei die Kurve von der Gleichung:

$$y_1 = c + ax + \tfrac{1}{3}bx^3,$$

sodafs y_1 das Integral von y ist. In welchem Sinne stellt y_1 das Ergebnis der Flächenberechnung bei der Kurve CD dar? Offenbar liefert die Ordinate GT der zweiten Kurve in einem bestimmten Mafsstab gemessen die Mafszahl für den Inhalt der bei der ersten Kurve auftretenden Fläche $MPQT$, wobei MP als Ausgangsordinate gewählt ist.

Umgekehrt gilt der Satz: **Die einzelne Ordinate TQ der ersteren Kurve mifst die „Steigung" der zweiten Kurve EF an der entsprechenden Stelle G.** Man beachte gleich noch, dafs, wenn wir alle Ordinaten der Kurve EF um ein und dasselbe Stück zu- oder abnehmen lassen, hierbei die Steigung der Kurve EF an keiner Stelle verändert wird; folglich wird auch die Ordinate y der zuerst gegebenen Kurve, welche allein die *Steigung* der Kurve EF mifst, hierbei nicht verändert. Zu einer gegebenen Kurve CD gehören demnach unendlich viele Kurven von der Art der Kurve EF; die einzelne unter ihnen werden wir durch die Festsetzung bestimmen, dafs der Flächeninhalt bei der gegebenen Kurve CD von einer gewissen Anfangsordinate, wie in Figur 16 von MP aus, gemessen sein soll.

Knüpfen wir die Betrachtung an das unbestimmte Integral $F(x)+c$ von y, so bleibt die Anfangsordinate für die Flächenmessung selber unbestimmt. Setzt man alsdann $x=\overline{OM}$ ein, so gewinnen wir für den Flächeninhalt von der unbestimmten Anfangsordinate bis zur Ordinate $\overline{MP}$ den Wert $F(\overline{OM})+c$. Setzen wir weiter $x=\overline{ON}$, so entspringt $F(\overline{ON})+c$ als Flächeninhalt von der gleichen Anfangsordinate bis zu $\overline{NR}$. Mithin ist der Inhalt der Fläche zwischen $\overline{MP}$ und $\overline{NR}$ einfach gleich der Differenz $F(\overline{ON})-F(\overline{OM})$ der beiden berechneten Inhalte, wobei die unbestimmte Konstante c ausfällt.

Der durch das Symbol:

$$\int_{\overline{OM}}^{\overline{ON}} y\,dx$$

dargestellte Zahlwert würde somit nach folgender Regel zu berechnen sein: Man integriere zunächst y unbestimmt, berechne den Wert des unbestimmten Integrals alsdann für $x=\overline{ON}$, endlich für $x=\overline{OM}$ und ziehe den zweiten so entspringenden Wert vom ersten ab. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist gleich dem Inhalt der wiederholt genannten Fläche zwischen den Ordinaten MP und NR.

Auch wenn die Variabele x und die von ihr abhängende Gröfse y irgend welche andere Bedeutung haben, kann es vorkommen, dafs

man solche Summen von Gliedern $y \cdot \varDelta x$ zwischen bestimmten Grenzen $x = a$ und $x = b$ für unendlich abnehmende Faktoren $\varDelta x$ zu bestimmen hat. Wir werden uns dann die Funktion y von x immer durch ihre Kurve deuten und verfahren für die Berechnung der Summe $\int\limits_a^b y\,dx$ nach der angegebenen Regel.

Beispiel. Man bestimme **die Fläche,** welche bei der in Figur 17 dargestellten **Parabel** durch die Kurve OA, die Endordinate AB und das Stück OB der Abscissenaxe eingegrenzt ist. Die Gleichung der Parabel hat die Gestalt:

(1) $$y = a x^{\frac{1}{2}}.$$

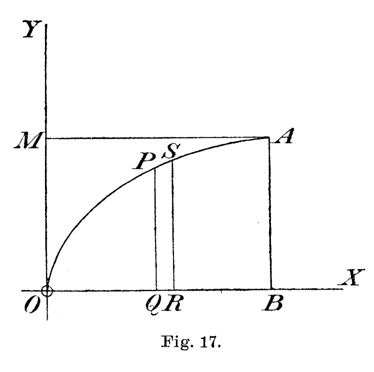


Fig. 17.

Für den Einzelwert $x = \overline{OQ}$ ist $y = \overline{PQ} = a x^{\frac{1}{2}}$. Ist $\overline{QR} = \varDelta x$ die Breite des Streifens $PQRS$, so wird der Inhalt des Streifens um so eher gleich $a x^{\frac{1}{2}} \cdot \varDelta x$ sein, je kleiner $\varDelta x$ gewählt wird. Entsprechend ist die zu bestimmende Fläche gleich:

(2) $$\int\limits_0^{\overline{OB}} a x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = a \left[\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\overline{OB}} = \tfrac{2}{3}\, a \cdot (\overline{OB})^{\frac{3}{2}}.$$

Wir können nun a durch die Abscisse $\overline{OB}$ und die zugehörige Ordinate $\overline{AB}$ ausdrücken. Aus (1) folgt nämlich:

$$\overline{AB} = a (\overline{OB})^{\frac{1}{2}} \quad \text{und also} \quad a = \frac{\overline{AB}}{(\overline{OB})^{\frac{1}{2}}}.$$

Die in (2) dargestellte Fläche ist somit gleich:

$$\tfrac{2}{3} \frac{\overline{AB}}{(\overline{OB})^{\frac{1}{2}}} (\overline{OB})^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{OB},$$

d. h. sie ist gleich zwei Dritteln des Rechtecks $OMAB$.

Der Kreis von der Gleichung

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

mit dem Radius $r = \frac{1}{2} a^2$ ist *in der Nähe des Nullpunktes,* wo für die Punkte der Peripherie x gegen y sehr klein ist und also x^2 neben y^2 vernachlässigt werden kann, näherungsweise durch die Gleichung (1) darstellbar. Kreis und Parabel zeigen demnach dicht beim Nullpunkt

nahezu denselben Verlauf, so daſs das für die Parabel soeben gewonnene Ergebnis der Flächenberechnung nahe beim Nullpunkt angenähert auch vom Kreise gilt.

Aufgabe 1. Man führe die **Flächenberechnung** bei der Kurve von der Gleichung $\boldsymbol{y = mx^{-n}}$ zwischen den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten aus.

Der gesuchte Flächeninhalt ist:

$$\int_a^b mx^{-n}\,dx = \frac{m}{1-n}\left[x^{1-n}\right]_a^b = \frac{m}{1-n}\left(b^{1-n} - a^{1-n}\right).$$

Man beachte (cf. Art. 40), daſs diese Formel für $n = 1$ nicht gilt. In diesem Ausnahmefalle $n = 1$ haben wir mit der gleichseitigen Hyperbel zu thun. Der Flächeninhalt ist alsdann gegeben durch:

$$m\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = m\left[\log x\right]_a^b = m \log\left(\frac{b}{a}\right)\cdot -$$

Ist eine Kurve von der Gleichung:

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$$

vorgelegt, so ist der vom Nullpunkt $x = 0$ an gemessene Flächeninhalt:

$$ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}ex^4 + \tfrac{1}{5}fx^5.$$

Hieraus kann man dann wieder leicht für irgend eine andere Anfangsordinate die Fläche nach obiger Regel berechnen.

Aufgabe 2. Man bestimme den Flächeninhalt bei der Kurve $y = a\sqrt[3]{x}$ zwischen den zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehörenden Ordinaten. Derselbe ist:

$$a\int_\alpha^\beta x^{\frac{1}{3}}\cdot dx = a\left[\tfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_\alpha^\beta = \frac{3a}{4}\left(\beta^{\frac{4}{3}} - \alpha^{\frac{4}{3}}\right).$$

Aufgabe 3. Man bestimme den Flächeninhalt bei der Kurve $yx^2 = a$ zwischen den zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehörenden Ordinaten. Hier findet man:

$$a\int_\alpha^\beta x^{-2}\cdot dx = a\left[-x^{-1}\right]_\alpha^\beta = a\left(\alpha^{-1} - \beta^{-1}\right).$$

44. Arbeitsleistung bei Ausdehnung einer Flüssigkeit. Bei Gebrauch eines bestimmten Integrals läſst sich der in Art. 40 bestimmte Arbeitsbetrag noch etwas kürzer darstellen. Ist $p = cv^{-s}$, so ist die bei der Ausdehnung der Flüssigkeit vom Volumen v_1 auf v_2 geleistete Arbeit:

$$\int_{v_1}^{v_2} c v^{-s} dv = c\left[\frac{1}{1-s} v^{1-s}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{c}{1-s}\left(v_2^{1-s} - v_1^{1-s}\right).$$

Doch gilt diese Formel nur für $s \gtrless 1$; für $s = 1$ tritt an ihre Stelle:

$$c\,[\log v]_{v_1}^{v_2} = c \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

45. Schwerpunkt. Eine besonders wichtige Anwendung der Integralrechnung betrifft die Berechnung des Schwerpunktes. Hat ein homogener Körper einen geometrischen Mittelpunkt, so ist dieser zugleich der Schwerpunkt. Allgemein gilt betreffs der Bestimmung des Schwerpunktes bekanntlich folgendes:

Multipliziert man ein sehr kleines Teilchen m einer vorgelegten **Masse** mit seinem Abstande x von einer festen Ebene und addiert alle für die Teilchen der Masse so gebildeten Produkte, so ist die Summe gleich der Gesamtmasse, multipliziert mit dem Abstande $\bar{x}$ des Schwerpunktes von jener Ebene. In einer Formel ausgedrückt lautet dies:

$$\Sigma m x = \bar{x} \cdot \Sigma m.$$

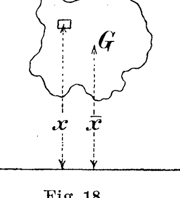


Fig. 18.

Wenn man andrerseits jedes kleine Teilchen μ einer **ebenen Schicht** (cf. Figur 18) mit seinem Abstande x von einer in der Ebene gegebenen Geraden multipliziert und alle Produkte addiert, so ist die Summe gleich der Masse der ganzen Schicht, multipliziert mit dem Abstande $\bar{x}$ des Schwerpunktes der Schicht von jener Geraden. Hierfür lautet der mathematische Ausdruck:

$$\Sigma \mu x = \bar{x} \cdot \Sigma \mu.$$

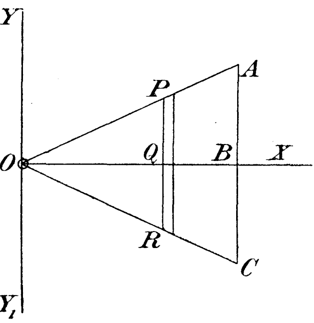


Fig. 19.

Beispiel. Es soll der Schwerpunkt eines **geraden Kreiskegels** bestimmt werden. Derselbe liegt offenbar auf der Axe OB des Kegels (cf. Figur 19), dessen Mantelfläche wir uns durch Rotation der Geraden OA um die x-Axe erzeugt denken. Zwei zur Axe des Kegels bei den Abscissen $\overline{OQ} = x$ und $x + \Delta x$ senkrecht gelegte Ebenen schneiden aus dem Kegel eine Scheibe der Dicke Δx aus. Wir fassen diese Scheibe, indem wir Δx sehr klein wählen, als Cylinder vom Radius

$$y = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\, x$$

auf und finden daraufhin als Masse der Scheibe $m\pi y^2 \Delta x$, unter m die Masse der Volumeneinheit verstanden. Wird nun Δx kleiner und kleiner, so werden alle Teilchen der betrachteten Scheibe von einer durch O senkrecht zur Kegelaxe gelegten Ebene übereinstimmend den Abstand $x = \overline{OQ}$ bekommen. Somit wird die auf alle den Kegel bildenden Scheiben bezogene Summe $\int m\pi x y^2 dx$ gleich der Gesamtmasse $\left(\frac{1}{3}\pi m \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB}\right)$ des Kegels, multipliziert mit der Abscisse $\bar{x}$ des Schwerpunktes sein. Setzen wir noch für y^2 seinen aus der letzten Gleichung hervorgehenden Wert ein, so folgt:

$$\int_0^{\overline{OB}} m\pi \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 x^3\, dx = \bar{x} \cdot \tfrac{1}{3}\pi m \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB}$$

oder nach Fortheben gemeinsamer Faktoren:

$$\int_0^{\overline{OB}} x^3 dx = \bar{x} \cdot \tfrac{1}{3}\, \overline{OB}^3.$$

Nun hat man aber:

$$\int_0^{\overline{OB}} x^3 dx = \left[\tfrac{1}{4} x^4\right]_0^{\overline{OB}} = \tfrac{1}{4}\, \overline{OB}^4,$$

und also folgt:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{4}\, \overline{OB},$$

d. h. man erreicht den Schwerpunkt, wenn man drei Viertel der Axe vom Scheitel nach der Basismitte zurückgelegt hat.

46. Wir haben hierbei die Formel für den **Rauminhalt des geraden Kreiskegels** als bekannt angesehen. Prüfen wir jetzt diese Formel!

Das Volumen einer einzelnen Scheibe von der Dicke dx wird gleich $\pi y^2 dx$ sein. Das Gesamtvolumen wird somit dargestellt durch:

$$\int_0^{\overline{OB}} \pi y^2 dx = \int_0^{\overline{OB}} \pi \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 x^2 dx = \pi \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_0^{\overline{OB}}$$

$$= \pi \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{3}\, \overline{OB}^3 = \tfrac{1}{3}\pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB}.$$

Der Rauminhalt des Kegels ist somit gleich dem dritten Teile des Volumens eines Cylinders von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Wir hätten die Formeln noch ein wenig abkürzen können, wenn wir überall $y = ax$ gesetzt hätten.

Beispiel. Man bestimme **das Volumen und den Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids** von konstanter Dichtigkeit m.

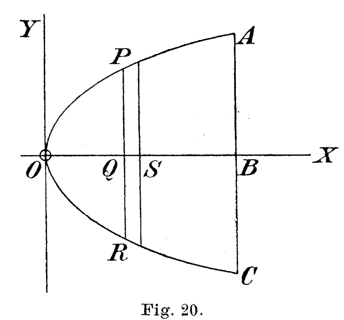


Fig. 20.

Es wird (cf. Figur 20) gesetzt:

$\overline{PQ} = y, \quad \overline{OQ} = x, \quad \overline{QS} = dx.$

Die Gleichung der in Figur 20 angegebenen Meridiankurve $CROPA$ der Umdrehungsfläche sei:

(1) $$y = ax^{\frac{1}{2}}.$$

Das Volumen der in der Figur durch $PQRS$ angedeuteten Scheibe ist $\pi y^2 dx$. Das gesuchte Volumen ist somit:

(2) $$\int_0^{\overline{OB}} \pi a^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} \pi a^2 \cdot \overline{OB}^2.$$

Was ist nun hier die Bedeutung von a? Setzt man:

$$y = \overline{AB}, \quad x = \overline{OB}$$

in die Gleichung (1) ein, so folgt:

$$\overline{AB} = a \cdot \overline{OB}^{\frac{1}{2}} \quad \text{und also} \quad a = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}.$$

Für das gesuchte Volumen ergiebt sich demnach aus (2):

(3) $$\tfrac{1}{2} \pi \frac{\overline{AB}^2}{\overline{OB}} \overline{OB}^2 = \tfrac{1}{2} \pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB},$$

d. h. das halbe Produkt aus der das Paraboloid bei AC begrenzenden Kreisfläche und der Höhe $\overline{OB}$. Das Volumen des Paraboloids ist somit gleich der Hälfte des Volumens eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe. Wir können den Satz aussprechen: Die Volumina des Cylinders, Paraboloids und Kegels mit gemeinsamer Grundfläche und gemeinsamer Höhe verhalten sich wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

Schreiten wir nun zur Bestimmung des Schwerpunktes vom Rotationsparaboloid! Derselbe wird offenbar auf der Axe liegen. An Stelle von Σmx in der Formel für die Schwerpunktsabscisse $\overline{x}$ tritt:

$$\int_0^{\overline{OB}} m\pi y^2 \cdot x\, dx \quad \text{oder} \quad \int_0^{\overline{OB}} m\pi a^2 x \cdot x\, dx.$$

Dieses Integral bestimmt sich weiter zu:

$$m\pi a^2 \int_0^{\overline{OB}} x^2 dx = m\pi a^2 \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_0^{\overline{OB}} = \tfrac{1}{3} m\pi a^2 \cdot \overline{OB}^3.$$

Setzt man für a^2 den oben bestimmten Wert $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{OB}}$ ein, so ergiebt sich als Wert des fraglichen Integrals:

$$\tfrac{1}{3} m\pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB}^2.$$

Dieser Wert ist nun gleich der Gesamtmasse, multipliziert mit der Abscisse $\overline{x}$ des Schwerpunktes, d. i. gleich

$$m \cdot \tfrac{1}{2}\pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{x},$$

sodafs sich ergiebt:

$$\overline{x} = \tfrac{2}{3}\overline{OB}.$$

Der Schwerpunkt liegt somit um $\frac{2}{3}$ der Axenlänge vom Scheitelpunkt entfernt.

Beispiel. Die durch $\boldsymbol{y = ax^n}$ gegebene Meridiankurve erzeuge durch Drehung um die x-Axe eine **Rotationsfläche.** Man bestimme das Volumen des eingeschlossenen Körpers zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = b$.

Das Volumen jedes solchen Rotationskörpers gewinnt man durch Integration von $\pi y^2 dx$. Die Lösung der vorgelegten Aufgabe wird also gegeben durch:

$$\pi \int_0^b a^2 x^{2n} dx = \frac{\pi a^2}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_0^b = \frac{\pi a^2}{2n+1} b^{2n+1}.$$

Man bestimme weiter den Schwerpunkt unter Annahme der konstanten Dichtigkeit m. Für einen beliebigen Rotationskörper haben wir hierbei $m x \pi y^2 dx$ zu integrieren und den entspringenden Wert durch die Gesamtmasse, d. i. das Integral von $m\pi y^2 dx$, zu teilen. Ist m, wie hier, konstant, so haben wir:

$$m\pi \int_0^b x a^2 x^{2n} \cdot dx = m\pi a^2 \int_0^b x^{2n+1} dx = \frac{m\pi a^2}{2n+2}\left[x^{2n+2}\right]_0^b = \frac{m\pi a^2}{2n+2} b^{2n+2}.$$

Da nun die Gesamtmasse $\frac{m\pi a^2}{2n+1} b^{2n+1}$ ist, so folgt für $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{2n+1}{2n+2} b.$$

Wir machen jetzt die **Annahme, dafs m nicht konstant sei,** sondern sich nach dem Gesetze:

$$m = m_0 + cx^s$$

ändere. Es soll dann wieder die Masse und der Schwerpunkt des eben betrachteten Rotationskörpers bestimmt werden. Das Integral im Zähler des Quotienten für $\bar{x}$ wird nunmehr:

$$\pi \int_0^b (m_0 x + cx^{s+1})\, a^2 x^{2n}\, dx = a^2 \pi \int_0^b (m_0 x^{2n+1} + cx^{2n+s+1})\, dx$$

und liefert:

$$(1) \qquad a^2 \pi \left[\frac{m_0}{2n+2}\, x^{2n+2} + \frac{c}{2n+s+2}\, x^{2n+s+2}\right]_0^b.$$

Die Masse wird geliefert vom Integral:

$$a^2 \pi \int_0^b (m_0 + cx^s)\, x^{2n}\, dx$$

und findet sich somit zu:

$$(2) \qquad a^2 \pi \left[\frac{m_0}{2n+1}\, x^{2n+1} + \frac{c}{2n+s+1}\, x^{2n+s+1}\right]_0^b.$$

Indem wir die obere Grenze b eintragen und den entspringenden Ausdruck (1) durch (2) teilen, ergiebt sich der Wert der Abscisse $\bar{x}$.

Ein geübter Leser wird sich leicht noch eine ganze Reihe weiterer Beispiele bilden können, welche nur die Integration der Funktion x^n erfordern.

Ein Bogen der durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dargestellten Ellipse rotiere um die x-Axe. Man bestimme alsdann das Volumen des entsprechenden Teiles vom entstehenden **Rotationsellipsoid.** Möge dieser Teil etwa durch die Grenzen $x = 0$ und $x = c$ festgelegt sein. Hier gilt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und also wird das Integral von $\pi y^2\, dx$:

$$\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\right]_0^c = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 c - \tfrac{1}{3} c^3).$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoids ist $\frac{4}{3}\pi b^2 a$ und dasjenige der Kugel $\frac{4}{3}\pi a^3$.

47. Berechnung **der Bogenlänge von Kurven.** Der in Fig. 21 mit P bezeichnete Punkt einer gegebenen Kurve habe die Koordinaten x, y. Diejenigen des benachbarten Punktes Q seien $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$. Nennen wir die von irgend einem festen Punkte der Kurve bis P gemessene Bogenlänge s, so ist die Zunahme Δs dieser

Länge bis zu dem mit P benachbarten Punkte Q für sehr kleines Δx angenähert gegeben durch $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, und man findet:

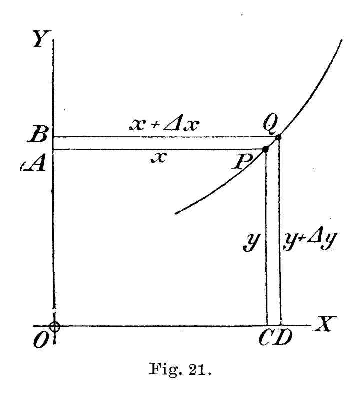


Fig. 21.

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

oder richtiger beim Grenzübergang für ohne Ende abnehmendes Δx:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Um von hier aus s zu finden, haben wir:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

zu integrieren.

Leider haben wir bisher allein erst die Integrationsregel für $\int x^n dx$ kennen gelernt und können mit dieser einstweilen noch nicht viele Beispiele von Bogenberechnungen durchführen.

Beispiel. Man bestimme die Länge der Kurve $y = a + bx$ (d. i. der geraden Linie) zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = c$. Hier ist $\frac{dy}{dx} = b$ und $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + b^2}$. Man findet:

$$s = \int_0^c \frac{ds}{dx}\, dx = \int_0^c \sqrt{1 + b^2}\, dx = \left[x\sqrt{1 + b^2}\right]_0^c = c\sqrt{1 + b^2}.$$

Aufgabe. Man bestimme die Bogenlänge für die Kurve von der „Steigung“ $\sqrt{a^2 x^n - 1}$ zwischen den Grenzen 0 und x. Es wird sich ergeben $s = \frac{2a}{n+2}\, x^{\frac{1}{2}(n+2)}$.

Weitere Beispiele über Berechnung der Bogenlänge folgen später.

48. Ausmessung der Oberflächen von Rotationskörpern. Rotiert die in Fig. 22 mit APB bezeichnete Kurve um die Axe OX, so entspringt eine Rotationsfläche mit OX als Axe. Den Rauminhalt des eingeschlossenen Körpers etwa zwischen den von ACA' und BDB' gelieferten Grenzen haben wir durch Integration von $\pi y^2 dx$ zwischen den Grenzen $\overline{OC}$ und $\overline{OD}$ gewonnen.

Man betrachte nun das unendlich schmale Flächenband auf der Oberfläche, welches bei der Rotation vom Bogenelemente $ds = \overline{PQ}$ geliefert wird. Der Flächeninhalt dieses Bandes ist durch $2\pi y\, ds$

gegeben. Um also die dem eben betrachteten Körper zugehörige Rotationsoberfläche auszumessen, haben wir das Integral zu bestimmen:

$$\int_{\overline{OC}}^{\overline{OD}} 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx.$$

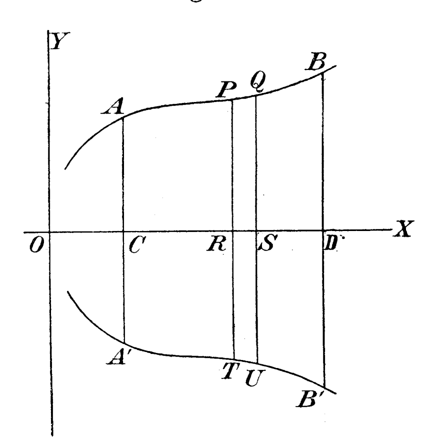


Fig. 22.

Ist das Gesetz, nach welchem die Meridiankurve gebildet ist, bekannt, so kann man y, sowie auch $y\frac{ds}{dx}$ als Funktion von x in das Integral eintragen.

Beispiel 1. Die Gerade $y = a + bx$ rotiere um die x-Axe; man bestimme die Mantelfläche des entstehenden Kegels zwischen den Grenzen 0 und c.

Hier ist $\frac{dy}{dx} = b$, so dass man das Integral:

$$2\pi\int_0^c y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\sqrt{1+b^2}\int_0^c (a+bx)\,dx$$

für die Fläche gewinnt. Dasselbe berechnet sich zu:

$$2\pi\sqrt{1+b^2}\Big[ax+\tfrac{1}{2}bx^2\Big]_0^c = 2\pi\sqrt{1+b^2}\,(ac+\tfrac{1}{2}bc^2). —$$

Die Berechnung der Kugeloberfläche betrachten wir im Beispiel 2 nur erst beiläufig. Wir setzen ja hier nur erst die Regel der Differentiation von x^n voraus, während bei der Berechnung der Kugeloberfläche bekannt sein muss, dass der Differentialquotient von y^2 nach x sich als das Produkt $2y\frac{dy}{dx}$ darstellt. Diese Regel dürfte für den selbständigeren Leser keine Schwierigkeit darbieten. Übrigens kann der Leser unter Vermeidung des genannten Satzes die Kugeloberfläche auch auf folgendem Wege bestimmen. Das Volumen V einer Kugel vom Radius r ist nach Art. 46 gleich $\frac{4\pi}{3}r^3$. Ist $V + dV$ das Volumen der Kugel vom Radius $r + dr$, so folgt:

$$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right)dr = (4\pi r^2)\,dr.$$

Ist aber S die Oberfläche einer Kugelschale von der Dicke dr, so ist

$S \cdot dr$ das Volumen dieser Schale. Man hat also $S \cdot dr = (4\pi r^2) dr$, woraus für die Oberfläche der Betrag $S = 4\pi r^2$ folgt.

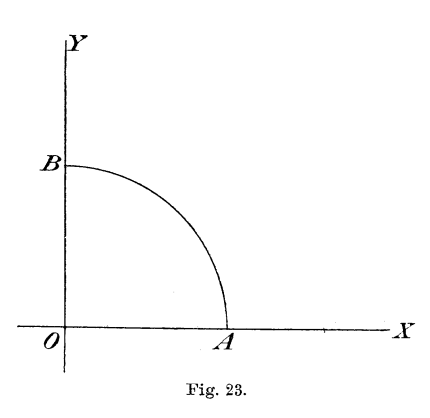


Fig. 23.

Beispiel 2. Man messe die Oberfläche einer Kugel vom Radius r aus. Wir können hierbei so vorgehen, daſs wir den in Figur 23 dargestellten Kreisquadranten AB vom Radius r um die x-Axe rotieren lassen und das Doppelte der entsprechenden Fläche nehmen. Die Gesamtoberfläche wird hiernach durch das Integral

$$4\pi \int_0^r y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

gegeben sein.

Nun liefert die Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Man findet somit bei der Differentiation:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Folglich wird:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2},$$

und wir erhalten für die Kugeloberfläche:

$$4\pi \int_0^r y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 4\pi \int_0^r r\, dx = 4\pi \Big[rx \Big]_0^r = 4\pi r^2.$$

49. Multipliziert man jedes einzelne Bogendifferential ds einer im Raume verlaufenden Kurve mit seinem Abstande x von der yz-Ebene des Koordinatensystems, bildet dann die Summe aller dieser Produkte und teilt letztere durch die gesamte Bogenlänge, so gewinnt man die Koordinate $\bar{x}$ des Schwerpunktes der Kurve*). Man wolle beachten, daſs der Schwerpunkt eines Flächenstücks im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte der Randkurve dieses Stückes zusammenfällt.

Guldin'sche Regel. I. Volumen eines Ringes.

Das in Figur 24 gezeichnete ebene Flächenstück BC möge um die in seiner Ebene gelegene Axe OO rotieren und auf diese Weise einen Ring erzeugen. Zufolge der sogenannten *„barycentrischen“* oder

*) Handelt es sich um eine Kurve in der xy-Ebene, so wird man das Bogenelement ds entsprechend mit seinem Abstande x von der y-Axe zu multiplizieren haben u. s. w.

„Guldin'schen Regel" gilt alsdann der Satz: Das Volumen dieses Ringes ist gleich dem Flächeninhalt des Querschnittes BC, multipliziert mit der Länge derjenigen Kreisperipherie, welche vom Schwerpunkt der Fläche BC beim Rotieren beschrieben wird.

Man denke sich an der Stelle P (cf. Figur 24) ein sehr kleines Stückchen vom Inhalt a auf dem Flächenstück BC markiert und nenne r den Abstand dieses Stückchens a von der Rotationsaxe. Dieses Stückchen wird alsdann einen sehr kleinen Ring vom Volumen $a \cdot 2\pi r$ erzeugen, und das Gesamtvolumen V des Ringes stellt sich als Summe solcher Glieder dar:

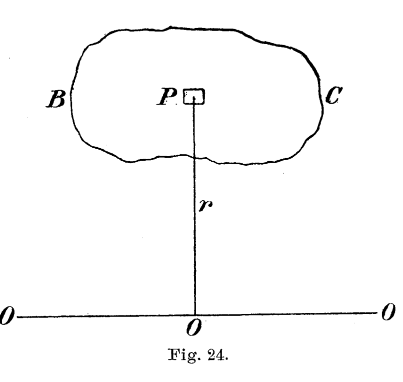


Fig. 24.

$$V = 2\pi \Sigma ar.$$

Nun setze man $\Sigma ar = \bar{r} A$, unter A den Flächeninhalt des Ebenenstückes BC verstanden. Der Leser wird sich die vorstehende Gleichung gleich selbst in Worte fassen und in $\bar{r}$ den Abstand des Schwerpunktes der Fläche BC von der Axe erkennen. Somit ist $V = 2\pi \bar{r} \cdot A$, womit die aufgestellte „Guldin'sche Regel" bewiesen ist.

II. Oberfläche des Ringes.

Weiter ergiebt die Guldin'sche Regel den Satz: Der Inhalt der Ringoberfläche ist gleich dem Umfange des Flächenstücks BC, multipliziert mit der Länge der Peripherie desjenigen Kreises, welcher vom Schwerpunkt der Randkurve der Fläche BC erzeugt wird.

Man nehme nämlich ein Bogenelement ds dieser Randkurve im Abstande r von der Axe; dasselbe erzeugt auf der Ringoberfläche einen geschlossenen Streifen vom Inhalte $ds \cdot 2\pi r$. Die ganze Oberfläche stellt sich hiernach in der Gestalt $2\pi \Sigma(ds \cdot r)$ dar. Man setze nun $\Sigma(ds \cdot r) = \bar{r} \cdot s$, wo $\bar{r}$ den Abstand des Schwerpunktes der Randkurve von der Axe bezeichnet und s die Gesamtlänge dieser Randkurve, d. h. den Umfang des Stückes BC. Es folgt, daſs die Gesamtoberfläche des Ringes in der That $2\pi \bar{r} \cdot s$ ist.

Beispiel. Man bestimme die Oberfläche eines Ringes, dessen Meridianschnitt ein Kreis des Radius a ist, wenn der Mittelpunkt dieses Kreises den Abstand R von der Rotationsaxe hat. Antwort: Der Umfang jenes Schnittes ist $2\pi a$, und der Umfang des vom Schwerpunkt beschriebenen Kreises bestimmt sich zu $2\pi R$; die Oberfläche ist somit $4\pi^2 aR$.

Aufgabe. Man berechne das Volumen und die Oberfläche eines Schwungradkranzes. Der mittlere Radius des Kranzes sei 3 m lang, sein Querschnitt sei ein Quadrat von 0,25 m Seitenlänge.

Antwort: Volumen $= (0{,}25)^2 \cdot 2\pi \cdot 3$; Oberfläche $= 4 \cdot 0{,}25 \cdot 2\pi \cdot 3$.

50. Wenn man jedes kleine Teilchen einer Masse mit dem Quadrat seines Abstandes von einer Axe multipliziert und die Summe aller dieser Produkte bildet, so gewinnt man das **Trägheitsmoment der gesamten Masse** in Bezug auf diese Axe.

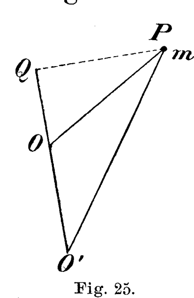


Fig. 25.

Es ist leicht zu zeigen, dafs das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Axe gleich ist dem Trägheitsmomente in Bezug auf eine parallele Axe durch den Schwerpunkt, vermehrt um das Produkt aus der Gesamtmasse und dem Quadrate des Abstandes beider Axen.

Man nehme nämlich an, dafs in Figur 25 die Axen senkrecht zur Papierebene gerichtet sind; und zwar stehe die ursprüngliche Axe in O' senkrecht auf, die durch den Schwerpunkt gehende Axe in O. Ein einzelnes Teilchen m der Masse liege an der Stelle P der Papierebene. Das gesuchte Trägheitsmoment ist alsdann eine Summe von Gliedern der Gestalt $m \cdot (\overline{O'P})^2$. Nun gilt aber:

$$(\overline{O'P})^2 = (\overline{O'O})^2 + (\overline{OP})^2 + 2(\overline{OO'})(\overline{OQ}),$$

wo Q der Fusspunkt des Lotes von P auf OO' ist, d. i. des Lotes von P auf die durch die beiden Axen festgelegte Ebene. Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$\Sigma m(\overline{O'P})^2 = J, \qquad \Sigma m(\overline{OP})^2 = J_0,$$

wo also J_0 das Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Axe ist; alsdann gilt:

$$J = (\overline{O'O})^2 \Sigma m + J_0 + 2(\overline{OO'}) \Sigma m\, \overline{OQ}.$$

In $\Sigma m\, \overline{OQ}$ haben wir nun die Summe aller Teilchen m, jedes multipliziert mit seinem Abstande von der zur Axenebene und zur Papierebene senkrechten Ebene *durch den Schwerpunkt*; diese Summe ist nach Art. 45 gleich Null. Hiermit ist aber der ausgesprochene Satz schon bewiesen. Schreiben wir für die Gesamtmasse Σm kurz M, so wird:

$$\boldsymbol{J = J_0 + M \cdot (\overline{O'O})^2}.$$

Man bestimme das **Trägheitsmoment eines Kreiscylinders** von der Höhe l bezüglich seiner Axe.

In Figur 26 liege ein axialer Schnitt vor; die Axe selber ist durch OO bezeichnet. In der Figur ist ein Streifen von der Breite dr durch $PRTQ$ angedeutet; der Flächeninhalt dieses Streifens ist $l \cdot dr$. Durch Rotation des Streifens um die Axe OO entsteht eine Cylinderschale vom inneren Radius r und äufseren Radius $r + dr$. Denkt man dr unendlich klein, so ist das Volumen dieser Schale $2\pi r \cdot l \cdot dr$ und ihre Masse $m \cdot 2\pi r l \cdot dr$, wenn m die Dichtigkeit bedeutet. Das Trägheitsmoment dieser Schale in Bezug auf die Axe OO wird

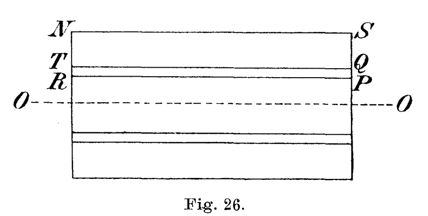


Fig. 26.

$$2\pi m l r^3 dr,$$

und dieses haben wir, um das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders zu berechnen, zwischen den Grenzen $r = 0$ und $r = R$ zu integrieren, unter R den Radius des Cylinders verstanden. Wir finden so:

$$J_0 = \int_0^R 2\pi m l r^3 dr = 2\pi m l \int_0^R r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi m l R^4.$$

Die Masse des Cylinders ist $M = m l \pi R^2$, sodass wir erhalten:

$$J_0 = \frac{MR^2}{2}.$$

Bezeichnen wir als **Trägheitsradius** diejenige Länge k, für welche $Mk^2 = J_0$ zutrifft, so gilt im vorliegenden Falle $k^2 = \frac{1}{2}R^2$ und also $k = \frac{1}{\sqrt{2}}R$.

Von hier aus finden wir als Trägheitsmoment des Cylinders bezüglich der auf seiner Oberfläche gelegenen Axe NS (cf. Figur 26):

$$J = J_0 + MR^2 = \tfrac{3}{2}MR^2;$$

für die Axe NS ist somit der Trägheitsradius $R\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

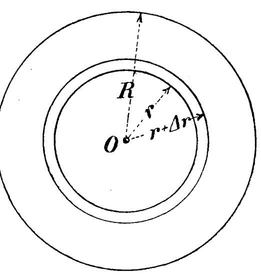


Fig. 27.

Trägheitsmoment einer **Kreisscheibe bezogen auf ihre Axe** (cf. Figur 27). Man betrachte den in der Figur gezeichneten Ring vom inneren Radius r und äufseren Radius $(r + dr)$; der Flächeninhalt dieses Ringes ist für unendlich klein gedachtes r gleich $2\pi r\, dr$, sein

Trägheitsmoment $m \cdot 2\pi r^3 dr$. Integrieren wir wieder zwischen den Grenzen 0 und R, wo R der Radius der Kreisscheibe ist, so finden wir für das gesuchte Trägheitsmoment:

$$J_0 = \int_0^R m\, 2\pi r^3 dr = m\pi \frac{R^4}{2}.$$

Da die Masse $M = m\pi R^2$ ist, so erhält man als Quadrat des Trägheitsradius $\frac{1}{2}R^2$.

In einer Ebene ziehe man durch den Punkt O zwei zu einander senkrechte Axen OX und OY. Ein Teil der Ebene sei gleichmäfsig mit einer Schicht bedeckt (cf. Figur 28), von welcher ein Element a den Abstand x von OY, y von OX und die Entfernung r von O habe. Dann gilt $ax^2 + ay^2 = ar^2$. Wenn man somit die Trägheitsmomente der Schicht in Bezug auf die Axen OX und OY addiert, so ergiebt sich das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in O auf der Schicht senkrecht aufstehende Axe. Infolge dessen ist z. B. das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe in Bezug auf einen Durchmesser gleich der Hälfte des vorhin berechneten Trägheitsmomentes, d. i. gleich $\frac{1}{4}m\pi R^4$. Das Quadrat des Trägheitsradius wird hier $\frac{1}{4}R^2$.

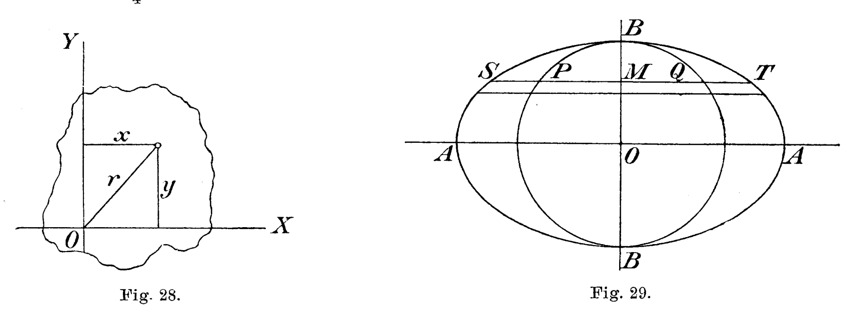


Fig. 28. Fig. 29.

Trägheitsmoment einer **elliptischen Scheibe** in Bezug auf die grofse Axe AOA (cf. Fig. 29). Man setze die Halbaxen $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ der Ellipse gleich a und b. Das Trägheitsmoment des einzelnen Streifens ST ist dann gleich dem $\frac{a}{b}$-fachen vom Trägheitsmoment des Streifens PQ vom Kreise über den Durchmesser BOB; denn der Abstand von der Axe AOA ist für beide Streifen derselbe, und es besteht die Gleichung $\frac{\overline{MT}}{\overline{MQ}} = \frac{a}{b}$. Letztere Gleichung drückt eine wohlbekannte Beziehung zwischen der gegebenen Ellipse und dem

Kreise über BOB aus. Nun ist aber, wie wir soeben gefunden haben, das Trägheitsmoment des fraglichen Kreises bezüglich der Axe AOA gleich $\frac{1}{4}m\pi b^4$. Es folgt als das gesuchte Trägheitsmoment der Ellipse $\frac{1}{4}m\pi b^3 a$. Auf ähnliche Weise findet man $\frac{1}{4}m\pi b a^3$ als Trägheitsmoment der elliptischen Scheibe in Bezug auf die kleine Axe BOB.

Die vorstehende Entwicklung beruht auf einem mathematischen Kunstgriff, welcher nicht ganz nahe liegt, und dessen Verwendung vielleicht für die alltäglichen Aufgaben des Ingenieurs nicht recht praktisch ist. Wir haben aber diesen Entwicklungsgang eingeschlagen, weil wir der Integration, welche das direkte Verfahren nötig macht, noch nicht gewachsen sind. Das Integral ist offenbar dieses: Die Fläche des oben herangezogenen Streifens von der Länge $\overline{ST} = 2x$ und der Breite dy ist $2x \cdot dy$. Aus der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{aber folgt} \quad x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Somit hat man:

$$J = 2\int_0^b my^2\, 2x\, dy = 4m\,\frac{a}{b}\int_0^b y^2\sqrt{b^2 - y^2}\, dy.$$

Wir werden Gelegenheit haben, dieses Integral im dritten Kapitel als Beispiel zu betrachten.

51. Trägheitsmoment vom Kranz eines Schwungrades. Hat der Kranz eines Schwungrades die Gestalt eines Hohlcylinders von der Breite l, dem Innenradius R_1 und dem Aufsenradius R_2, so ist sein Trägheitsmoment:

$$2\pi m l\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi m l\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2}\pi m l(R_2{}^4 - R_1{}^4).$$

Die Masse dieses Hohlcylinders ist $M = \pi(R_2{}^2 - R_1{}^2)\,lm$, sodass für das Trägheitsmoment die Gleichung gilt:

$$J = \frac{1}{2}M(R_2{}^2 + R_1{}^2);$$

als Trägheitsradius findet man $\sqrt{\frac{1}{2}(R_2{}^2 + R_1{}^2)}$. Eine in der Praxis gebräuchliche Näherungsformel für das Trägheitsmoment des Kranzes gewinnt man, wenn man die Gesamtmasse in der Entfernung des mittleren Radius $\frac{1}{2}(R_2 + R_1)$ von der Axe annimmt. Der auf diese Weise entspringende Näherungswert des Trägheitsmomentes verhält sich zum genauen Werte wie $(R_2 + R_1)^2$ zu $2\,(R_2{}^2 + R_1{}^2)$. Setzt man $R_2 = R + a$ $R_1 = R - a$, so ist der Quotient des Näherungswertes und des genauen



Betrages von J gleich $1:\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)$, d. h. bei sehr kleinem a angenähert gleich $1-\frac{a^2}{R^2}$. Ist die Gesamtmasse des Schwungrades, unter Einschlufs der Speichen und der Nabe, gleich M, so begeht man meistens keinen grofsen Fehler, wenn man das Gesamtträgheitsmoment $J = MR^2$ annimmt.

52. In Figur 30 bedeute OR eine **Stange** von der Länge l, welche so dünn ist, dafs ihre Dicke gegenüber der Länge nicht in Betracht kommt; ihre Masse pro Längeneinheit sei m. Welches ist ihr Trägheitsmoment bezüglich einer Axe, welche am Ende O senkrecht zur Stange verläuft? Der Abstand einer beliebigen Stelle P der Stange von der Axe O sei x. Das Element PQ der Stange habe die Länge Δx und also die Masse $m\Delta x$. Das Trägheitsmoment dieses Elementes ist $mx^2\Delta x$. Das Integral des Ausdrucks mx^2dx zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=l$ liefert somit als das gesuchte Trägheitsmoment der Stange $\frac{1}{3}ml^3$. Da ml die Gesamtmasse ist, so findet man als Quadrat des Trägheitsradius $\frac{1}{3}l^2$. Daraus ergiebt sich nach einem in Art. 50 ausgesprochenen Satze als Trägheitsmoment bezüglich einer zur bisherigen parallelen Axe durch die Mitte der Stange:

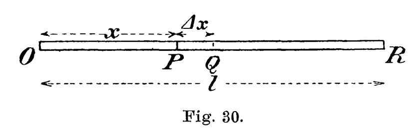


Fig. 30.

$$J_0 = \tfrac{1}{3}ml^3 - ml\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^3\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{12}ml^3.$$

Das Quadrat des *hier* zugehörigen Trägheitsradius ist $\frac{1}{12}l^2$.

Untersuchen wir jetzt, welcher Fehler der vorstehenden Entwicklung infolge der Vernachlässigung der Stangendicke anhaftet.

Die Stange habe die Gestalt eines Kreiscylinders von der Länge l und dem Radius R; die Dichtigkeit, d. i. die Masse der Volumeneinheit sei ϱ. In Figur 31 ist ein axialer Schnitt des Cylinders dargestellt; das Trägheitsmoment werde für die an einem Ende in der Papierebene senkrecht zur Cylinderaxe liegenden Axe OO berechnet. In der Entfernung $OP = x$ betrachten wir eine aus dem Cylinder herausgeschnittene Kreisscheibe von der Dicke dx (siehe Figur 31). Das Trägheitsmoment dieser Kreisscheibe des Radius R ist gleich $\pi R^2\varrho\, dx\cdot x^2$, vermehrt um das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich eines ihrer Durchmesser. Nun war der Trägheitsradius des Kreises vom Radius R bezüglich eines Durchmessers $\frac{1}{2}R$, und der Trägheitsradius unserer unendlich dünnen Scheibe ist offenbar der gleiche. Das Trägheitsmoment der Scheibe in Bezug auf einen Durchmesser ist somit:

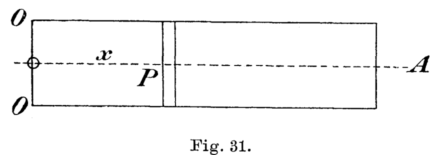


Fig. 31.

$$\tfrac{1}{4}R^2\pi R^2\varrho\, dx = \tfrac{1}{4}R^4\pi\varrho\, dx.$$

Als Trägheitsmoment der Scheibe in Bezug auf die Axe OO folgt demnach:

$$\pi R^2\varrho\left(x^2\,dx + \tfrac{1}{4}R^2\,dx\right).$$

Da die Länge $\overline{OA}$ des Cylinders gleich l sein sollte, so haben wir zwischen den Grenzen 0 und l zu integrieren; wir finden so:

$$J = \pi R^2 \varrho \left(\frac{l^3}{3} + \tfrac{1}{4} R^2 l\right).$$

Die Masse m für die Einheit der Länge des Cylinders ist $\pi R^2 \varrho$, sodaſs man gewinnt

$$J = m\left(\frac{l^3}{3} + \tfrac{1}{4} R^2 l\right) = \frac{m l^3}{3}\left(1 + \tfrac{3}{4}\frac{R^2}{l^2}\right).$$

Weiter finden wir hieraus:

$$J_0 = m\left(\frac{l^3}{12} + \tfrac{1}{4} R^2 l\right)$$

als Trägheitsmoment bezüglich einer zu OO parallelen Axe durch den Schwerpunkt. Es ist somit das Glied $\frac{m}{4} R^2 l$, welches in der oben erhaltenen Formel $J = m\frac{l^3}{12}$ vernachlässigt ist.

53. Beispiel. Man bestimme den **Schwerpunkt** des in Figur 32 durch OAC bezeichneten **Parabelsegments**, dessen Flächeninhalt nach Art. 43 gleich

$$\tfrac{2}{3}\overline{AC}\cdot\overline{OB} \quad \text{ist.}$$

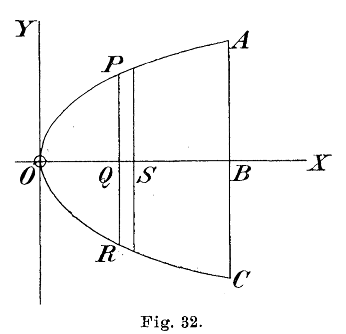


Fig. 32.

Offenbar liegt der Schwerpunkt auf der x-Axe. Der Flächeninhalt des Streifens $PQRS$ ist $2y\,dx$, sodaſs wir $2xy\,dx$ zu integrieren haben. Es ist nun:

$$y = a x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wo} \quad a = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}$$

gilt. Die Formel für die Abscisse $\bar{x}$ des Schwerpunktes liefert somit:

$$2\int_0^{\overline{OB}} x\,\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot\bar{x}.$$

Der Wert des links stehenden Integrals ist:

$$2\,\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}\left[\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\overline{OB}} = \tfrac{4}{5}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}\,\overline{OB}^{\frac{5}{2}}.$$

Es folgt hieraus:

$$\tfrac{4}{5}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}^{\frac{1}{2}}}\cdot\overline{OB}^{\frac{5}{2}} = \tfrac{4}{5}\overline{AB}\cdot\overline{OB}^2 = \tfrac{4}{3}\overline{AB}\cdot\overline{OB}\cdot\bar{x},$$

und also findet sich die gesuchte Abscisse $\bar{x}$ zu:

$$\bar{x} = \tfrac{3}{5}\overline{OB}.$$

Man bestimme den Schwerpunkt eines bezüglich der x-Axe symmetrisch gestellten Flächenstücks, welches oben und unten durch die Curven $y = + ax^n$ und $y = - ax^n$ begrenzt ist, rechts und links aber durch zwei in den Abständen $x = b$ und $x = c$ zur y-Axe parallel gezogene Gerade. Die Abscisse $\overline{x}$ findet man hier gleich dem Quotienten der Integrale:

$$2\int_b^c x \cdot ax^n dx \quad \text{und} \quad 2\int_b^c ax^n dx,$$

von denen das letztere den Inhalt des fraglichen Flächenstückes darstellt. Es ergiebt sich:

$$\overline{x} = \frac{2a\left(\frac{c^{n+2} - b^{n+2}}{n+2}\right)}{2a\left(\frac{c^{n+1} - b^{n+1}}{n+1}\right)}$$

oder

$$\overline{x} = \frac{c^{n+2} - b^{n+2}}{c^{n+1} - b^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Dieser allgemeine Ansatz schliesst eine ganze Reihe interessanter Spezialfälle ein. Bezeichnet man übrigens das betrachtete Flächenstück, wie in Figur 32, mit $APRC$, so kann man die Länge $\overline{x}$ leicht in den in der Figur sichtbaren Strecken $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$, .. ausdrücken. In der That stellt sich die berechnete Abscisse $\overline{x}$ des Schwerpunktes in jenen Strecken wie folgt dar:

$$\overline{x} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OB}^2 - \overline{PQ} \cdot \overline{OQ}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{OB} - \overline{PQ} \cdot \overline{OQ}}.$$

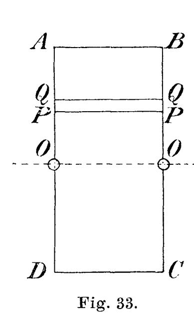


Fig. 33.

54. Trägheitsmoment eines Rechtecks. Es soll das Trägheitsmoment des in Figur 33 gezeichneten Rechtecks bezüglich der Mittellinie OO berechnet werden, welche zur Seite AB parallel läuft. Für die Länge der Rechtecksseiten benutze man die abkürzenden Bezeichnungen $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = d$.

Man betrachte den Flächenstreifen zwischen $\overline{OP} = y$ und $\overline{OQ} = y + dy$. Der Inhalt dieses Streifens ist bdy. Ist die Dichtigkeit gleich 1, so ist hiernach das Trägheitsmoment des Streifens bezüglich der Axe OO gleich by^2dy. Das Trägheitsmoment des ganzen Rechtecks bestimmt sich zu:

$$b\int_{-\frac{1}{2}d}^{+\frac{1}{2}d} y^2\,dy = b\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{1}{2}d}^{+\frac{1}{2}d} = \frac{b\,d^3}{12}.$$

Dieses Trägheitsmoment ist bei Berechnungen von Balken besonders wichtig.

55. Schwerkraft. Eine homogene Kugelschale aus einer anziehend wirkenden Masse übt keine Anziehungskraft auf einen im Innern der Schale befindlichen Massenpunkt aus. Auf einen aufserhalb gelegenen Massenpunkt aber wirkt die Kugelschale gerade so, als wenn ihre Gesamtmasse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Hiernach wird die Erde auf die Einheit der Masse an einer aufserhalb ihrer Oberfläche gelegenen Stelle P eine Anziehungskraft ausüben, welche indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung r der Stelle P vom Erdmittelpunkt ist. Befindet sich die Stelle P jedoch im Innern der Erde, so ist dortselbst die auf die Masseneinheit wirkende Anziehungskraft gleich dem Quotienten aus der Masse derjenigen Kugel, welche von einer mit der Erdoberfläche konzentrischen Kugelfläche durch P eingeschlossen ist, und dem Quadrat des Abstandes r des Punktes P vom Kugelmittelpunkte.

1) Es gelte die Annahme, dafs die Erde eine homogene Kugel sei. Ist alsdann m die Masse der Volumeneinheit und R der Erdradius, so ist die Anziehungskraft aufserhalb der Oberfläche im Centralabstande r auf die Masseneinheit:

$$\frac{4\pi}{3}\,mR^3 : r^2.$$

Die Anziehungskraft auf die innerhalb im Centralabstande r gelegene Masseneinheit ist:

$$\frac{4\pi}{3}\,mr^3 : r^2 = \frac{4\pi}{3}\,mr.$$

Multipliziert man mit dem von r unabhängigen Faktor $\frac{3}{4\pi mR}$ und nimmt dies Produkt als Mass der Anziehungskraft, so wird letztere an der Oberfläche gerade gleich 1; aufserhalb im Centralabstande r ist sie $\frac{R^2}{r^2}$, innerhalb $\frac{r}{R}$. Der Leser wolle sich die Abhängigkeit der Kraft vom Abstande r durch eine Kurve deuten.

2) Wächst die Dichtigkeit m gegen das Erdcentrum hin, etwa nach dem Gesetze $m = a - br$, so berechnet man als Masse einer Kugelschale vom Innenradius r und der Dicke dr:

$$4\pi r^2 m\,dr = 4\pi r^2(a - br)dr.$$

Als Gesamtmasse der Kugel vom Radius r hat man:

$$4\pi\int_0^r r^2(a-br)\,dr = \tfrac{4}{3}\pi a r^3 - \pi b r^4.$$

Für einen innerhalb der Erde im Centralabstande r gelegenen Angriffspunkt berechnet sich alsdann:

$$\tfrac{4}{3}\pi a r - \pi b r^2$$

als Anziehungskraft, während sich für einen aufserhalb gelegenen Punkt einstellt:

$$\left(\frac{4\pi}{3} a R^3 - \pi b R^4\right) : r^2.$$

Teilt man die Gesamtmasse der Erde durch ihr Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, so finden wir als mittlere Dichtigkeit $a - \frac{3}{4} b R$, sowie als Verhältnis der mittleren Dichtigkeit zur Dichtigkeit an der Oberfläche:

$$(4a - 3bR) : (4a - 4bR).$$

56. Festigkeit dicker Cylinder.

Im ersten Teil der folgenden Auseinandersetzungen beschränken wir unsere Betrachtungen auf die Vorgänge in der *dünnen Wandung* eines unter Druck stehenden Kessels. Um Irrtümer in der Verwendung der + und —Zeichen zu vermeiden, stellen wir uns (abweichend von den wirklich herrschenden Zuständen) vor, dafs der Flüssigkeitsdruck *aufsen gröfser* als innen ist, und dafs das Material folglich einer Druckbeanspruchung unterworfen wird.

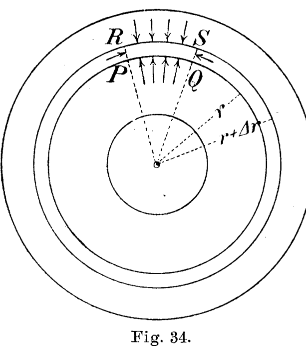


Fig. 34.

Wir betrachten nun einen dünnen Cylinder vom Radius r und von der Dicke Δr. Es sei p die Spannung innerhalb des Cylinders, $p + \Delta p$ diejenige aufserhalb desselben; die Druckspannung im Material rechtwinkelig zum Radius sei q. Wir betrachten das Ringstück $PQSR$, dessen Ausdehnung rechtwinkelig zur Papierebene 1 cm betrage.

In radialer Richtung haben wir zunächst von aufsen nach innen wirkend einen Druck von $(p + \Delta p)$ kg pro qcm. Er wirkt auf eine Fläche RS von $(r+\Delta r)\Delta\theta$ qcm Inhalt, wenn der Winkel QOP mit $\Delta\theta$ bezeichnet wird; es ist nämlich der Bogen RS gleich dem Produkt aus Radius und Winkel. Von innen nach aufsen wirkt dagegen eine Kraft $pr\Delta\theta$. Der Ausdruck $(p+\Delta p)\,(r+\Delta r)\,\Delta\theta - pr\Delta\theta$ be-

zeichnet also die gesamte von aufsen nach innen wirkende resultierende Kraft; und zwar um so genauer, je kleiner $\varDelta\theta$ angenommen war.

Dieser Kraft leisten zwei Kräfte das Gleichgewicht. Jede derselben ist gleich $q\,.\,\varDelta r$, und sie sind gegeneinander geneigt unter den Winkel $\varDelta\theta$. Genau wie auf Seite 71 konstruieren wir also ein Dreieck, dessen zwei Seiten CA und AB parallel und gleich den Kräften $q \cdot \varDelta r$ sind, so dafs der Winkel BAC gleich $\varDelta\theta$ wird; dann stellt BC die radiale Kraft dar. Wir sehen sofort, dafs diese radiale Kraft gleich $q \cdot \varDelta r \cdot \varDelta\theta$ ist, und dafs dieser Ausdruck um so genauer zutrifft, je kleiner wir $\varDelta\theta$ annehmen; folglich ist:

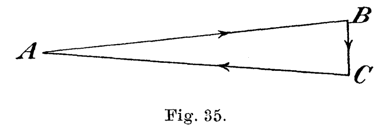


Fig. 35.

$$(p+\varDelta p)\,(r+\varDelta r)\cdot\varDelta\theta - pr\cdot\varDelta\theta = q\cdot\varDelta r\varDelta\theta,$$

oder:

$$p\varDelta r + r\varDelta p + \varDelta p\varDelta r = q\varDelta r.$$

Lassen wir jetzt $\varDelta r$ und damit $\varDelta p$ unendlich klein werden, so ergiebt sich hieraus:

(1) $$p + r\frac{dp}{dr} = q\,.$$

Wenn ein Material den Druckspannungen p und q in zwei zu einander rechtwinkeligen Richtungen unterworfen wird, welche aber beide in der Ebene des Papieres liegen, so ist die Verlängerung, welche die Dimension *senkrecht* zur Papierebene erfährt, proportional der Summe $p+q$.

Soll nun ein ebener Querschnitt auch nach der Dehnung *eben* bleiben, so müssen wir annehmen, dafs die lineare Ausdehnung der Cylinderwände von r unabhängig sei; und diese naheliegende Annahme wollen wir machen. Folglich ist die Gleichung (1) zu kombinieren mit:

(2) $$p + q = 2A,$$

worin $2A$ eine konstante Gröfse bezeichnet.

Wir setzen nun den Wert für q aus (2) in (1) ein und erhalten:

$$p + r\frac{dp}{dr} = 2A - p,$$

oder:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2A}{r} - \frac{2p}{r}.$$

Nun können wir durch Probieren finden, dafs dieser Gleichung Genüge geleistet wird durch:

(3) $$p = A + \frac{B}{r^2}\,.$$

Daraus folgt unter Zuhilfenahme von Gleichung (2):

$$q = A - \frac{B}{r^2}. \tag{4}$$

Es sind nun noch die Konstanten A und B zu bestimmen. Handelt es sich um eine Kanone oder um den Cylinder einer hydraulischen Presse, so kennen wir den Druck p_0 innen, wo r gleich r_0 sei, und wir wissen, daſs der Druck auſsen, bei $r = r_1$, gleich Null ist. Indem wir also diese Werte von p in (3) einsetzen, finden wir

$$p_0 = A + \frac{B}{r_0^2} \quad \text{und} \quad 0 = A + \frac{B}{r_1^2}.$$

Daraus folgt dann:

$$B = \frac{p_0}{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}} = p_0 \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$A = -p_0 \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2},$$

und

$$-q = \frac{p_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right).$$

Die Druckspannung q wollen wir nun durch eine Zugspannung f ersetzen. Dann gilt also:

$$f = p_0 \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{r_1^2 + r^2}{r^2}. \tag{5}$$

Der Wert für f ist am gröſsten bei $r = r_0$ und beträgt dort:

$$f_0 = p_0 \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}. \tag{6}$$

Man beachte, daſs p_0 niemals gleich der zulässigen Spannung des Materials werden darf. Ferner sehen wir aus (5), daſs f mit wachsendem r kleiner wird; und zwar ändert es sich umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, sodaſs wir mit Leichtigkeit den Wert von f durch eine Kurve darstellen können. So sollte der Leser eine Kurve ziehen unter der Voraussetzung, daſs $r_1 = 30$ mm, $r_0 = 20$ mm, $p = 100$ kg pro qcm ist, und die Werte für f von der Innenseite bis zur Auſsenseite des Rohres graphisch darstellen; dabei ergiebt sich natürlich f in denselben Einheiten wie p.

Gleichung (5) kann benutzt werden, um die Spannungsverhältnisse in einem dicken Cylinder zu ermitteln, der innerem Überdrucke zu widerstehen hat, *wenn von vornherein keine Spannung vorhanden war.* Nun wollen wir aber annehmen, daſs auch für $p = 0$ bereits Spannungen im Material herrschen; in diesem Falle addieren sich die

Spannungen, welche durch (5) gekennzeichnet sind, algebraisch zu denen, welche an jedem Punkte bereits vorher vorhanden waren. Deswegen kühlen wir einen Cylinder für eine hydraulische Presse beim Gießen von *innen* ab, und deswegen setzen wir einen Geschützlauf aus mehreren dünnen Rohren zusammen, von denen jedes das von ihm umschlossene mit fester Spannung zusammenpreßt; und zwar suchen wir solche Anfangsdruckspannungen bei $r = r_0$ und solche Anfangszugspannungen bei $r = r_1$ zu erzielen, daß, wenn die von p_0 herrührende Spannung auf das Material wirkt, und der Cylinder im Begriffe steht, zu bersten, an allen Stellen der Wandung von r_0 bis r_1 eine und dieselbe Materialbeanspruchung stattfindet.

Dünner Cylinder.

Wir setzen $r_0 = R$ und $r_1 = R + t$, wobei t im Vergleich mit R sehr klein ist. Dann ist

$$f_0 = p_0 \frac{2R^2 + 2Rt + t^2}{2Rt + t^2} = \frac{\frac{p_0 R}{t}\left(1 + \frac{t}{R} + \frac{t^2}{2R^2}\right)}{\left(1 + \frac{t}{2R}\right)}.$$

Nun wird sowohl $\frac{t}{R}$, als auch $\frac{t^2}{2R^2}$ und $\frac{t}{2R}$ immer kleiner und kleiner, je kleiner wir t werden lassen. Folglich können wir die abgekürzte Formel:

(7) $$f = \frac{pR}{t}$$

anwenden, wenn die Wandstärke außerordentlich klein ist, und:

(8) $$f = \frac{pR}{t} + \frac{p}{2}$$

als eine etwas genauere Annäherung, welche dasselbe Resultat giebt, als wenn wir in (7) den *mittleren* Radius eingesetzt hätten.

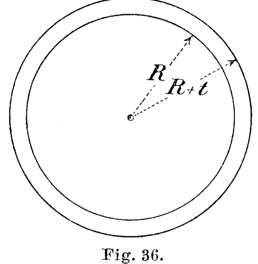


Fig. 36.

Bei einem wirklichen Dampfkessel oder einem Rohr herrscht aber schon in Bezug auf den genauen Wert von f für die äußerste zulässige Beanspruchung eine solche Unsicherheit, daß wir getrost die Korrektion vernachlässigen und mit der gewöhnlichen Formel (7) rechnen können.

57. Indikatordiagramm einer Gasmaschine.

Das Gesetz für die Zustandsänderung eines vollkommenen Gases lautet: $p \cdot v = R \cdot t$ für 1 Kilogramm des Gases. Dabei ist R eine Konstante, nämlich die Differenz $c_p - c_v$ der specifischen Wärme c_p

bei konstantem Druck und der spezifischen Wärme c_v bei konstantem Volumen. Den Quotienten $\frac{c_p}{c_v}$ bezeichnen wir weiterhin durch γ.

Wir nehmen ein für allemal an, dafs die Wärmemenge in Arbeitseinheiten ausgedrückt wird, sodafs wir die unnötige und langweilige Einführung des Koeffizienten 424 für das mechanische Wärmeäquivalent vermeiden können.

Wenn 1 kg eines vollkommenen Gases eine Zustandsänderung erfährt, bei welcher der Druck p um dp und das Volumen v um dv zunimmt, so ist die zu diesem Zwecke aufzunehmende Wärmemenge dQ nach einem bekannten Grundsatze der mechanischen Wärmetheorie gegeben durch:

$$dQ = \frac{1}{\gamma - 1} d(pv) + p\,dv \tag{1}$$

oder:

$$dQ = \frac{1}{\gamma - 1} (v\,dp + \gamma p\,dv). \tag{2}$$

Der Leser beachte, dafs dp und dv von einander unabhängig wählbar sind, und dafs folglich hierbei $\frac{dp}{dv}$ noch jedem beliebigen Werte gleich werden kann. Dies wird natürlich sofort anders, wenn wir, wie z. B. in der gleich folgenden Aufgabe, eine Beziehung zwischen p und v vorschreiben.

Aufgabe. Das Gas möge sich ausdehnen nach dem Gesetze

$$p \cdot v^s = \text{constans}. \tag{3}$$

Es soll der abgekürzt durch h zu bezeichnende Quotient $\frac{dQ}{dv}$, d. i. die pro Einheit der Volumenänderung erforderliche Wärmeaufnahme, gefunden werden.

Auflösung:

$$h = \frac{\gamma - s}{\gamma - 1} p. \tag{4}$$

Für $s = \gamma$ wird offenbar h gleich Null; und folglich erkennen wir die Gleichung: $p \cdot v^\gamma = \text{const.}$ als das Gesetz für die adiabatische Ausdehnung eines vollkommenen Gases. Übrigens ist γ gleich 1,41 für Luft und gleich 1,37 für die Gase, welche in dem Cylinder einer Gas- oder Petroleummaschine arbeiten.

Ist andrerseits s gleich 1, sodafs das Ausdehnungsgesetz lautet: $p \cdot v = \text{constans}$, so haben wir das Gesetz der isothermischen Expansion eines Gases. Wir erkennen, dafs jetzt h gleich p ist; d. h. der Betrag der aufgenommenen Wärmeenergie ist gleich dem Betrage

der geleisteten mechanischen Arbeit. In jedem Falle, wo das Gesetz der Zustandsänderung durch Gleichung (3) gegeben ist, ist h genau proportional mit p. Ist s gröfser als γ, so heifst dies, dafs das Gas nicht Wärme aufgenommen, sondern Wärme *abgegeben* hat.

Wir bemerken nun, dafs im zweiten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung (1) das Produkt $p\,dv = dW$ das Differential der mechanischen Arbeit W ist. Tragen wir dW ein, so folgt durch Integration:

$$(5) \qquad Q_{01} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_0 v_0) + W_{01}.$$

Hierin ist Q_{01} die Wärmemenge, welche einem Kilogramm des vollkommenen Gases zwischen den Zuständen p_0, v_0, t_0 und p_1, v_1, t_1 zugeführt wurde; W_{01} ist die mechanische Arbeit, welche das Gas bei der Expansion vom ersten bis zum zweiten Zustand leistete.

Dieser Ausdruck kann auch in andere Formen gebracht werden, da wir ja noch die Beziehung haben:

$$(6) \qquad p \cdot v = R \cdot t,$$

welche sich bei Berechnungen über Gasmaschinen mit Nutzen verwenden läfst.

Auch folgende Überlegung schliefst sich hier an: Bleibt das Volumen konstant, so ist $W_{01} = 0$; und die Änderung der Spannung, welche durch die Entzündung der Gase oder die Aufnahme einer bekannten Wärmemenge entsteht, kann also ermittelt werden. Bleibt andererseits die Spannung konstant, so wird $W_{01} = p(v_1 - v_0)$; und daraus ist dann die Änderung des Volumens, welche durch die Wärmeaufnahme bewirkt wurde, leicht zu bestimmen.

Eine andere fruchtbare Ausdrucksweise unseres Gesetzes ist die folgende:

$$(7) \qquad dQ = c_v\,dt + p\,dv,$$

wobei die Konstante c_v, wie bisher, die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bedeutet. Integrieren wir diese Gleichung, so finden wir:

$$(8) \qquad Q_{01} = c_v(t_1 - t_0) + W_{01}.$$

Dies Resultat stimmt genau mit dem nach der vorigen Methode gefundenen überein, und wir hätten dasselbe auch ohne weiteres direkt aus (5) durch Benutzung von (6) ableiten können. Bei dieser Formulierung sehen wir leicht ein, dafs, wenn keine äufsere Arbeit geleistet wird, die zugeführte Wärmemenge gleich $c_v(t_1 - t_0)$ ist, und andrerseits, dafs, wenn keine Temperaturänderung eintritt, die zugeführte Wärmemenge gleich der geleisteten Arbeit sein mufs.

58. Elastizität wird definiert als Änderung der Spannung, dividiert durch die zugehörige Änderung einer Dimension. Zum Beispiel erhalten wir den Elastizitätsmodul, wenn wir die Zug- oder Druckspannung (oder die Belastung pro qcm Querschnitt einer Zugstange oder einer Strebe) dividieren durch die prozentuale Längenänderung, welche der Zug oder Druck herbeiführt. Den Schubelastizitätsmodul erhalten wir, wenn wir die Schubspannung durch die eingetretene Verschiebung dividieren. Die Volumelastizität ergiebt sich bei Division des Flüssigkeitsdruckes oder der Zunahme des Flüssigkeitsdruckes durch die von demselben hervorgerufene prozentuale Verkleinerung des Volumens. Geht z. B. die Flüssigkeit von dem Zustande p und v in den Zustand $p + \Delta p$ und $v + \Delta v$ über, so ist die Zunahme des Flüssigkeitsdruckes Δp und die prozentuale Verminderung des Volumens: $-\frac{\Delta v}{v}$; folglich ist nach unserer Definition der Elastizitätsmodul:

$$e = \frac{\Delta p}{\left(-\frac{\Delta v}{v}\right)} \quad \text{oder} \quad e = -v \cdot \frac{\Delta p}{\Delta v} \cdot$$

Für eine genaue Erklärung des Moduls e ist hier indessen anzunehmen, daſs die Änderungen Δp und Δv von Spannung und Volumen unendlich klein sind; genau genommen, müssen wir also schreiben:

$$(1) \qquad e = -v \cdot \frac{dp}{dv} \cdot$$

Der Wert von $\frac{dp}{dv}$ ist übrigens nur dann eindeutig bestimmt, wenn p und v durch eine feste Relation aneinander gebunden sind. Kommen noch weitere Gröſsen, wie z. B. die Temperatur t in Betracht, so wird $\frac{dp}{dv}$ und damit e je nach den Beträgen von t und dt verschiedene Werte annehmen können. Gehen wir z. B. auf die bei einem vollkommenen Gase bestehende Gleichung:

$$pv = Rt \quad \text{oder} \quad p = Rtv^{-1}$$

zurück, so würde es am nächsten liegen, den Modul e bei konstanter Temperatur zu bestimmen. Hier ergiebt sich (cf. Art. 30):

$$\frac{dp}{dv} = -Rtv^{-2} \quad \text{und} \quad e = Rtv^{-1} = p.$$

Es ist gebräuchlich, diesen Wert von e mit e_t zu bezeichnen, und wir sehen also, daſs e_t, d. h. die Elastizität bei konstanter Tem-

peratur, gleich p ist. Diesen Wert für die Elastizität nahm Newton als allgemein zutreffend an. Indem er ihn seinen Berechnungen für die Geschwindigkeit des Schalles zu Grunde legte, erhielt er aber ein Resultat, welches von der experimentell bestimmten Schallgeschwindigkeit stark abwich. Die Temperatur der Luft bleibt nämlich während der schnellen Änderungen des Druckes keineswegs konstant.

Aufgabe. Gesucht sei die Elastizität eines vollkommenen Gases, wenn das Gas dem Gesetze folgt: $p \cdot v^\gamma = c$, worin c eine Konstante bedeutet. Dies ist das adiabatische Gesetz, welches wir schon in Artikel 57 kennen lernten, d. h. das Gesetz, welches die Beziehung der Werte p und v zu einander angiebt, wenn dem Stoffe keine Zeit bleibt, während der Druckschwankungen Wärme durch Leitung aufzunehmen oder abzugeben.

Jetzt gilt $p = c \cdot v^{-\gamma}$, folglich ist $\frac{dp}{dv} = -\gamma c v^{-\gamma-1}$ und daher:

$$e = v\gamma c v^{-\gamma-1} = \gamma c v^{-\gamma} = \gamma p.$$

Es ist gebräuchlich, diesen Wert von e mit e_Q zu bezeichnen, und wir sehen, dafs bei einem vollkommenen Gase $e_Q = \gamma \cdot e_t$ ist. Wenn dieser Wert für die Elastizität der Luft in die Newtonsche Berechnung eingesetzt wird, so stimmt das Resultat mit der experimentell gefundenen Schallgeschwindigkeit überein.

59. Reibung eines Spurzapfens. Wir betrachten einen Spurzapfen vom Radius R Meter mit einer Gesamtlast von W Kilogramm, welche über die ganze Oberfläche des Zapfens gleichmäfsig verteilt sein mag; die Belastung des Zapfens in kg pro qm ist dann: $w = \frac{W}{\pi R^2}$. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sei α. Die Last, welche auf eine Ringfläche zwischen den Radien r und $r + dr$ entfällt, ist gleich $w \cdot 2\pi r\, dr$; die Reibung beträgt also für diese Ringfläche $\mu \cdot w 2\pi r \cdot dr$ Kilogramm, wenn μ den Reibungskoeffizienten bedeutet. Die lineare Geschwindigkeit v ist gleich $\alpha r \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$, sodafs die in jeder Sekunde zur Überwindung der Reibung aufgewendete Arbeit für dieses Ringflächenelement gleich $\mu 2\pi w \alpha r^2 \cdot dr$ Meterkg. wird. Die gesamte pro Sekunde verlorene Arbeit ist demnach:

$$2\pi w \alpha \mu \int_0^R r^2 \cdot dr = \tfrac{2}{3}\pi w \alpha \mu R^3 = \tfrac{2}{3}\alpha \mu W R.$$

Bei einem *ringförmigen* Zapfen vom inneren Radius R_1 und äufseren Radius R_2 erhalten wir analog:

$$2\pi w \alpha \mu \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \tfrac{2}{3}\pi w \alpha \mu (R_2^3 - R_1^3), \quad W = \pi w (R_2^2 - R_1^2),$$

und in diesem Falle ist folglich die gesamte pro Sekunde verlorene Arbeit gleich $\frac{2}{3}\alpha\mu W \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$.

60. Aufgaben über die Biegung von Balken. Wenn das Biegungsmoment M an einem bestimmten Querschnitt des Balkens bekannt ist, so können wir die in diesem Punkte eintretende Krümmung berechnen, vorausgesetzt, dafs der Balken im unbelasteten Zustande gerade war; anderenfalls berechnen wir den *Zuwachs* der Krümmung, wenn der unbelastete Balken bereits von vornherein krumm war. Die Biegungleichung schreibt man gewöhnlich in der Form:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot J} \quad \text{beziehungsweise:} \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{E \cdot J}.$$

Darin bedeutet J das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine Linie, welche durch seinen Schwerpunkt geht und rechtwinkelig zur Biegungsebene gezogen wird; E ist der Elastizitätsmodul des Materials und r der Krümmungsradius an der betreffenden Stelle. Ist z. B. der Balkenquerschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe d, so ist $J = \frac{1}{12} b d^3$ (siehe Artikel 54); hat der Balken kreisförmigen Querschnitt, so ist $J = \frac{\pi}{4} R^4$, wenn R den Radius des Kreises bezeichnet (siehe Artikel 50). Hat der Balken elliptischen Querschnitt, so ist $J = \frac{\pi}{4} a^3 b$, wobei a und b die beiden Halbmesser des Querschnittes *in* der Biegungsebene und *senkrecht* zu derselben bedeuten (siehe Artikel 50)*).

Krümmung. Die Krümmung eines Kreises wird definiert als der reziproke Wert seines Radius; die Krümmung irgend einer Kurve an einer bestimmten Stelle ist gleich derjenigen des zu dieser Stelle gehörenden Krümmungskreises, d. i. des Kreises, welcher sich an dieser

*) Wir halten es nicht für nötig, hier noch zu bemerken, dafs die Druckspannung in irgend einem Punkte H des Balkenquerschnittes ACA (vergl. Figur 47, Art. 68) gleich $\frac{M}{J} z$ ist, wenn z den Abstand JH des betreffenden Punktes auf der Druckseite von der neutralen Linie AA bezeichnet.

Die neutrale Linie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes; ist z negativ, so bedeutet das, dafs die Spannung eine Zugspannung ist; die gröfsten Spannungen treten da auf, wo z am gröfsten ist. Balken von gleicher Sicherheit sind solche, bei denen die in den einzelnen Querschnitten auftretenden Maximalspannungen sämtlich gleich grofs sind.

Stelle der Kurve enger anschmiegt als irgend ein anderer Kreis. Die Krümmung einer Kurve kann hiernach, wie man leicht sieht, auch erklärt werden als die „Winkeländerung (in Bogenmaſs) der Kurvenrichtung pro Längeneinheit der Kurve“.

Nun wollen wir eine recht flache Kurve ziehen mit sehr geringen Werten der „Steigung“ $\frac{dy}{dx}$. Dann bemerken wir, daſs die Änderung dieser Steigung beim Fortschreiten von einem Punkte P zu einem Punkte Q fast genau die korrespondierende Winkeländerung bezeichnet.

In Wirklichkeit ist die Änderung von $\frac{dy}{dx}$ allerdings eine Änderung der *Tangente* eines bestimmten Winkels; aber wenn dieser Winkel sehr klein ist, so dürfen wir den zugehörigen Bogen, seinen Sinus und seine Tangente sämtlich einander gleich setzen.

Wenn wir also den Zuwachs von $\frac{dy}{dx}$ vom Punkte P zum Punkte Q durch die Länge der Kurve PQ dividieren, so erhalten wir die mittlere Krümmung zwischen P und Q; und wenn wir alsdann PQ immer kleiner und kleiner werden lassen, so bekommen wir immer genauer die Krümmung im Punkte P selbst. Nun sollte aber die Kurve sehr flach sein; die Länge des Bogens PQ ist demnach näherungsweise gleich der horizontalen Projektion Δx von PQ zu setzen; dann aber ist die Änderung von $\frac{dy}{dx}$ dividiert durch Δx, wenn Δx immer kleiner und kleiner wird, nichts anderes als der Differentialquotient von $\frac{dy}{dx}$ nach x, und das Symbol dafür ist $\frac{d^2y}{dx^2}$. Folglich können wir als Krümmung eines Balkens in irgend einem Punkte den Wert $\frac{d^2y}{dx^2}$ annehmen, vorausgesetzt, dass seine Biegung überall nur gering ist.

War der Balken nicht von vornherein gerade, sondern war y' seine geringe Abweichung von der geraden Linie in irgend einem Punkte, dann war $\frac{d^2y'}{dx^2}$ seine ursprüngliche Krümmung. Auch auf diesen Fall können wir die sämtlichen nachstehenden Ableitungen ohne weiteres anwenden, wenn wir nur überall $\frac{d^2(y-y')}{dx^2}$ anstatt des Ausdruckes $\frac{d^2y}{dx^2}$ einsetzen.

Es ist leicht zu zeigen, daſs ein Balken von gleicher Sicherheit, d. h. ein Balken, in dem f, die Beanspruchung der äuſsersten Faser, in jedem Querschnitte gleich groſs ist, auch überall gleiche Krümmung erfährt, vorausgesetzt, daſs seine Höhe gleichmäſsig ist.

Ist d die Höhe des Balkens, so lautet die Bedingung für die gleichmäſsige Sicherheit: $\frac{M}{J} \cdot \frac{1}{2} d = \pm f$, worin f eine Konstante ist. Nun ist aber $\frac{M}{J}$ gleich

dem Produkt des Elastizitätsmoduls und der Krümmung, folglich ist die Krümmung gleich $\pm \frac{2f}{E \cdot d}$, d. h. konstant.

Beispiel. In einem Balken von gleichmäfsiger Sicherheit sei: $d = \frac{1}{a + bx}$. Dann ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2f}{E}(a + bx)$. Durch Integrieren finden wir:

$$\frac{E}{2f} \cdot \frac{dy}{dx} = c + ax + \tfrac{1}{2}bx^2, \qquad \frac{E}{2f} \cdot y = e + cx + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{6}bx^3.$$

Darin müssen noch die Konstanten e und c durch irgend eine gegebene Bedingung festgelegt werden. Zum Beispiel sei bekannt, dafs der Balken an einem Ende horizontal *eingespannt* ist. Dann ist bei $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ und ebenso $y = 0$; daraus ergiebt sich dann: $c = 0$ und $e = 0$.

War der Balken von vornherein gerade, so können wir nunmehr die Biegungsgleichung aufstellen: Bedeutet x den von irgend einem Anfangspunkt gemessenen Abstand längs des Balkens bis zu einem gewissen Querschnitt, und bezeichnet y die Senkung des Balkens bei diesem Querschnitt, ist ferner J das Trägheitsmoment des Querschnittes, M das Biegungsmoment an dieser Stelle und E der Elastizitätsmodul des Materials, so gilt die Beziehung:

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}.$$

Wir geben dem Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein solches Vorzeichen, dafs er positiv wird, falls M positiv ist. Wenn ein positives Biegungsmoment M einen Balken nach oben konvex macht und y von oben nach unten gemessen wird, so ist also (1) in Bezug auf die Vorzeichen richtig. Ebenso würde (1) richtig sein, wenn ein positives M den Balken nach aufwärts konkav macht und y nach oben gemessen wird.

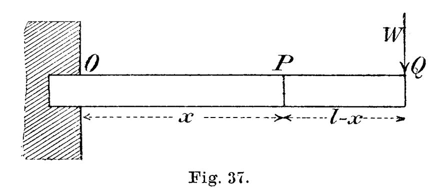


Fig. 37.

Beispiel 1. **Ein prismatischer Balken von der Länge l sei an einem Ende horizontal eingespannt,** am anderen, freien Ende mit W kg belastet. Es sei x der Abstand eines zu betrachtenden Querschnittes vom eingespannten Ende des Balkens; dann ist $M = W(l - x)$, sodafs (1) übergeht in:

(2) $$\frac{EJ}{W} \frac{d^2y}{dx^2} = l - x.$$

Durch Integration finden wir, da E und J konstante Gröfsen sind:

$$\frac{EJ}{W} \frac{dy}{dx} = lx - \tfrac{1}{2}x^2 + c.$$

Daraus können wir, falls c bekannt ist, die Neigung des Balkens gegen die Horizontale an jeder beliebigen Stelle berechnen.

Um c zu finden, müssen wir die Neigung an irgend einer Stelle kennen. Nun wissen wir, daſs am *eingespannten* Ende keine Neigung stattfinden kann, d. h. es ist bei $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$; daraus folgt aber $c = 0$. Durch nochmalige Integration erhalten wir:

$$\frac{EJ}{W} y = \tfrac{1}{2} l x^2 - \tfrac{1}{6} x^3 + C.$$

Um die neue Integrationskonstante C zu finden, beachten wir, daſs $y = 0$ wird, falls $x = 0$ ist, und finden daraus: $C = 0$. Demnach lautet die Biegungsgleichung des Balkens, d. h. die Gleichung, welche uns die Senkung y für jeden Punkt des Balkens angiebt:

(3) $$y = \frac{W}{EJ}\left(\tfrac{1}{2} l x^2 - \tfrac{1}{6} x^3\right).$$

Gewöhnlich handelt es sich darum, den Wert von y *am Ende des Balkens,* also für $x = l$ zu ermitteln; dieser Wert von y, den wir D, die Durchbiegung des Balkens, nennen wollen, ist:

(4) $$\frac{Wl^3}{3EJ}.$$

Beispiel 2. Ein Balken von der Länge l sei **an beiden Enden unterstützt und in der Mitte mit W kg belastet.** Wir denken uns, daſs die linke Hälfte des Balkens in seinem belasteten Zustande (etwa durch Umgieſsen mit Cement) vollkommen starr in ihrer Lage und Form festgehalten werde; dann kann die rechte Hälfte einfach als ein selbständiger Balken von der Länge $\frac{1}{2} l$ angesehen werden, welcher an einem Ende (der Mitte des ursprünglichen Balkens entsprechend) *eingespannt*, am anderen mit der nach oben wirkenden Kraft $\frac{1}{2} W$ belastet ist. Entsprechend unserem vorigen Beispiel ist seine Durchbiegung also:

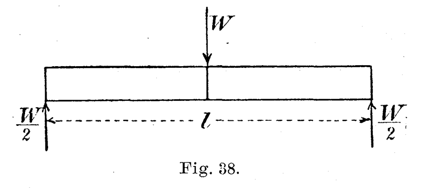


Fig. 38.

(5) $$D = \frac{\frac{1}{2} W (\frac{1}{2} l)^3}{3EJ} = \frac{Wl^3}{48EJ}.$$

Der Leser sollte selbst eine Skizze machen, um diese Methode zur Lösung der Aufgabe zu illustrieren.

Beispiel 3. **Ein an einem Ende eingespannter** Balken trage eine **gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilte Last** von w kg pro cm Balkenlänge*).

Auf den Teil PQ kommt eine Belastung $w \cdot \overline{PQ}$ oder $w(l-x)$ kg. Die Resultierende dieser Last greift in der Mitte zwischen P und Q an, sodafs wir durch Multiplikation mit dem Hebelarm $\frac{1}{2}(l-x)$ das Biegungsmoment im Punkte P finden. Dasselbe beträgt demnach:

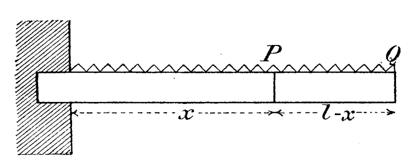


Fig. 39.

(6) $$M = \tfrac{1}{2} w (l-x)^2.$$

Indem wir diesen Wert in Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{2EJ}{w}\frac{d^2y}{dx^2} = l^2 - 2lx + x^2.$$

Die Integration ergiebt:

$$\frac{2EJ}{w}\frac{dy}{dx} = l^2x - lx^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + c.$$

Diese Gleichung zeigt uns wieder, sobald wir c bestimmt haben, die Neigung des Balkens gegen die Horizontale an jeder beliebigen Stelle. Jetzt ist aber bei $x=0$ auch $\frac{dy}{dx}=0$, weil ja der Balken dort eingespannt ist. Daraus folgt $c=0$.

Wir integrieren nun nochmals und erhalten:

$$\frac{2EJ}{w}y = \tfrac{1}{2}l^2x^2 - \tfrac{1}{3}lx^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + C;$$

da für $x=0$ auch $y=0$ zutrifft, so folgt, dafs auch $C=0$ wird. Somit lautet die Biegungsgleichung:

(7) $$y = \frac{w}{24EJ}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4).$$

Den gröfsten Wert erreicht y am Ende des Balkens bei $x=l$. Die Durchbiegung beträgt also:

(8) $$D = \frac{w}{24EJ}3l^4 = \frac{1}{8}\frac{Wl^3}{EJ},$$

worin $W = wl$ gesetzt wurde; hier bedeutet somit W die gesamte Belastung des Balkens.

*) Wir machen darauf aufmerksam, dafs man bei Berechnungen über die Biegung von Balken zweckmäfsig *alle* Längenmafse in cm ausdrückt. Die Querschnitte sind dann natürlich in qcm, die Biegungsmomente in cmkg, die Trägheitsmomente der Querschnittflächen in cm^4 zu messen.

Beispiel 4. Ein **an beiden Enden unterstützter** Balken von der Länge l sei **gleichmäfsig** mit w kg pro cm seiner Länge **belastet.**

Jeder der beiden Auflagedrucke ist gleich der halben gesamten Last. Der rechte Auflagedruck hat in Bezug auf den Punkt P einen Hebelarm $\frac{1}{2}l - x$. Der Drehsinn seines Biegungsmomentes ist gegen die Zeigerbewegung einer Uhr gerichtet, und wir wollen diese Richtung positiv nennen. Das Biegungsmoment der Last $w(\frac{1}{2}l - x)$ mit dem mittleren Abstande $\frac{1}{2}\overline{PQ}$ ist dann negativ und das gesamte resultierende Biegungsmoment im Punkte P beträgt:

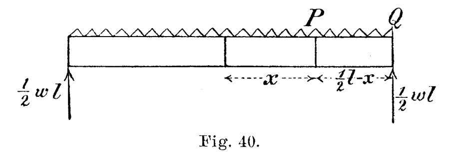


Fig. 40.

(9) $$\frac{1}{2}wl\left(\frac{1}{2}l - x\right) - \frac{1}{2}w\left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 = \frac{1}{8}wl^2 - \frac{1}{2}wx^2,$$

sodafs aus Gleichung (1) folgt:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{8}wl^2 - \frac{1}{2}wx^2\cdot$$

Darin ist y die senkrecht gemessene Höhe des Punktes P *über* der Mitte des Balkens (siehe Artikel 60). Durch Integration finden wir:

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}wl^2x - \frac{1}{6}wx^3 + c,$$

eine Formel, welche uns nach Bestimmung von c in den Stand setzt, die Neigung des Balkens gegen die Horizontale an jeder beliebigen Stelle zu ermitteln. Der Wert c ergiebt sich daraus, dafs bei $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist; hieraus folgt nämlich: $c = 0$. Eine nochmalige Integration ergiebt:

$$EJy = \frac{1}{16}wl^2x^2 - \frac{1}{24}wx^4 + C;$$

auch hier verschwindet wieder die Integrationskonstante, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist. Folglich lautet die Biegungsgleichung im vorliegenden Falle:

(10) $$y = \frac{w}{48EJ}(3l^2x^2 - 2x^4)\cdot$$

Die Senkung y ist am gröfsten bei $x = \frac{1}{2}l$ und hat dort den Wert, den wir gewöhnlich als die Durchbiegung D des Balkens bezeichnen; demnach ist $D = \frac{5Wl^3}{384EJ}$, worin $W = lw$ die gesamte Belastung des Balkens bedeutet.

61. An beiden Enden eingespannter Balken. Die an den beiden Enden des Balkens erforderlichen Einspannungsmomente, welche nötig

sind, um die Endquerschnitte in senkrechten Ebenen zu erhalten, sind gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet, wenn die Belastung symmetrisch auf die beiden Hälften des Balkens verteilt ist. Diese letztere Annahme wollen wir zunächst machen.

Da die Drehmomente gleich sind, so sind die *Auflagedrucke* genau dieselben, *als wenn der Balken nur unterstützt wäre.* Nun sei m das Biegungsmoment an einer beliebigen Stelle, welches durch die Belastung und die Auflagedrucke erzeugt würde, wenn die Enden nicht eingespannt, sondern nur gestützt wären; und zwar wollen wir es wieder positiv rechnen, wenn es den Balken nach aufwärts konkav zu gestalten sucht. Dann ist das wirklich auftretende Biegungsmoment mit Rücksicht auf die Einspannung des Balkens gleich $m - c$, weil die Einspannungsmomente c an den Enden gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet sind und die Auflagedrucke durch die Einspannung nicht verändert werden. Folglich gilt jetzt:

(1) $$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{m - c}{EJ}.$$

Wir nehmen nun an, dafs der Balken prismatisch gestaltet sei. Dann ergiebt die Integration der Gleichung (1):

(2) $$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = \int m \cdot dx - cx + \text{const.}$$

Wir messen dabei x von einem Balkenende aus. Aufserdem haben wir nun noch zwei Einspannungsbedingungen, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = l,$$

wenn l die Balkenlänge bezeichnet.

Indem wir nun in die Gleichung (2) einmal den Wert $x = l$ und sodann den Wert $x = 0$ einsetzen, sowie die im letzteren Falle entstehende Gleichung von der zuerst gebildeten abziehen, erhalten wir:

$$0 = \int_0^l m \cdot dx - cl, \quad c = \frac{1}{l} \int_0^l m \cdot dx;$$

d. h.: **c ist der Mittelwert aller Werte m längs des ganzen Balkens.** Wir haben also folgende Regel (für symmetrische Belastung) gefunden: Man konstruiere das Diagramm der Biegungsmomente m gerade so, als wenn der Balken an den Enden nur *unterstützt* wäre. Man suche die mittlere Höhe der Momentenfläche und verschiebe das Diagramm gegen die Nulllinie um diesen Betrag. Das so erhaltene Diagramm, welches an beiden Enden negativ wird, giebt dann die wahre Gröfse

der Biegungsmomente an. Der Balken ist nach oben konkav, wo das Biegungsmoment positiv ist, nach oben konvex, wo das Biegungsmoment negativ wird; aufserdem besitzt er Wendepunkte, d. h. Punkte ohne Krümmung, und zwar dort, wo kein Biegungsmoment herrscht.

Beispiel. Wir wissen bereits, dafs bei einem Balken von der Länge l, der **an beiden Enden unterstützt und in der Mitte** mit einem Gewichte W **belastet** ist, das Biegungsmoment in der Mitte gleich $\frac{1}{4}Wl$, an den Enden gleich Null wird; das Diagramm besteht demnach aus zwei geraden Linien. Wir nehmen an, dafs der Leser dieses Diagramm wirklich zeichnet (siehe auch Art. 60, Beispiel 2). Die mittlere Höhe desselben ist gleich der halben Höhe in der Mitte oder gleich $\frac{1}{8}Wl$, und so grofs ist folglich das Biegungsmoment, welches wir an jedem Ende anbringen müssen, **wenn wir den Balken horizontal einspannen wollen.** Indem wir das gesamte Diagramm um diesen Betrag erniedrigen, erhalten wir offenbar als wirkliches Biegungsmoment des eingespannten Balkens in der Mitte $\frac{1}{8}Wl$, auf halbem Wege von der Mitte nach jedem Ende hin den Wert Null, so dafs dort zwei Wendepunkte entstehen, und an jedem Ende $-\frac{1}{8}Wl$. Ein rechteckiger Balken oder ein gewalzter I-Träger oder ein Balken von irgend einem anderen *zur neutralen Achse symmetrischen Querschnitte* ist bei dieser Belastung in der Mitte dem Brechen gerade so nahe, wie an den beiden Enden.

Beispiel. **Ein prismatischer Balken** sei mit w Kilogramm pro cm Länge **gleichmäfsig belastet und an beiden Enden unterstützt;** das Diagramm für m ist eine Parabel (siehe Art. 60, Beispiel 4, wo $M = \frac{1}{8}wl^2 - \frac{1}{2}wx^2$ war); der gröfste Wert von m herrscht in der Mitte und ist gleich $\frac{1}{8}wl^2$; an beiden Enden ist $m = 0$. Nun ist der Mittelwert von m gleich $^2/_3$ seines Wertes in der Mitte (vergleiche Art. 43, Inhalt einer Parabelfläche). Folglich ist $c = \frac{1}{12}wl^2$. Dieser Mittelwert von m mufs von jedem Einzelwerte subtrahiert werden; dann erhalten wir den Wert des wirklichen Biegungsmomentes an jedem beliebigen Punkte **für den an beiden Enden eingespannten Balken.**

Hiernach ist in einem solchen an den Enden eingespannten Balken das Biegungsmoment in der Mitte gleich $\frac{1}{24}wl^2$, an den Enden gleich $-\frac{1}{12}wl^2$; das Diagramm ist natürlich parabolisch, da es ja das Diagramm für den an den Enden *unterstützten* Balken ist, das wir nur um den Betrag $\frac{1}{12}wl^2$ überall nach unten verschoben haben. Die Wendepunkte liegen näher an den Enden, als im vorigen Falle. Die Gefahr des Brechens ist an den Enden am gröfsten.

Der Leser möge auch für verschiedene andere Fälle einer sym-



metrischen Belastung Diagramme zeichnen. Immer haben wir die gewöhnliche graphische Methode zur Ermittelung von m anzuwenden und dann die gefundene Kurve um ihre mittlere Höhe zu erniedrigen.

Nun wollen wir die Bedingung, dafs der Balken überall gleichen Querschnitt besitze, fallen lassen. **Der Querschnitt des symmetrisch belasteten und an beiden Enden eingespannten Balkens sei beliebig wechselnd.** Dann ergiebt die Integration der Gleichung (1):

(3) $$E\frac{dy}{dx} = \int \frac{m}{J}\,dx - c\int\frac{dx}{J} + \text{const.}$$

Wie vorhin, ist $\frac{dy}{dx}$ gleich Null sowohl bei $x=0$ als auch bei $x=l$. Demnach ergiebt sich analog, wie oben:

$$\int_0^l \frac{m}{J}\,dx = c\int_0^l \frac{dx}{J}.$$

Um c, das Einspannungsmoment, zu finden, brauchen wir also nur 2 Diagramme zu konstruieren, von denen das eine den Wert $\frac{m}{J}$, das andere den Wert $\frac{1}{J}$ für jeden Punkt des Balkens angiebt. Von beiden Diagrammen mitteln wir die Flächen aus und dividieren den Inhalt der ersteren durch den der zweiten. Oder, was auf dasselbe hinauskommt: wir dividieren die mittlere Höhe des $\frac{m}{J}$-Diagrammes durch die mittlere Höhe des $\frac{1}{J}$-Diagrammes und haben damit c gefunden. Den Wert c subtrahieren wir nun von jedem Einzelwerte für m, und erhalten so das richtige Diagramm der Biegungsmomente des Balkens.

Die graphische Behandlung derartiger Probleme ist viel abwechselungsreicher und interessanter als die analytische, da es so einfach ist, bei gegebener Belastung graphisch die Diagramme für m zu konstruieren.

Die soeben gegebene Lösung ist anwendbar auf jeden Balken, dessen Trägheitsmomente J in den einzelnen Querschnitten vorher auf irgend eine beliebige Weise festgestellt wurden, solange nur die Werte von J und die Belastungen auf den beiden Hälften des Balkens symmetrisch sind. Wir wollen nun einmal J solche Werte geben, dafs der **Balken überall gleiche Sicherheit** besitzt. Diese Forderung wird ausgedrückt durch die Gleichung:

(4) $$\frac{M}{J}z = f_d \text{ oder } f_z;$$

dabei bedeutet z für den betreffenden Querschnitt den Abstand der äufsersten Faser von der neutralen Axe auf der Druck- oder Zugseite, und f_d und f_z sind die gröfsten Druck- resp. Zugspannungen, welche das Material in dem betreffenden Querschnitt erfährt, und welche konstant sein sollen für alle Querschnitte. Nehmen wir f_d und f_z einander gleich an und setzen $z = \frac{1}{2}d$, wobei d die Höhe des Balkens ist, so wird aus Gleichung (4):

$$\frac{M}{J} d = \pm 2f. \tag{5}$$

Darin müssen wir das + Zeichen für alle Punkte des Balkens anwenden, an denen M positiv ist, und umgekehrt. Nun sind beide Enden des Balkens horizontal gerichtet, d. h. es ist:

$$\int_0^l \frac{M}{J} dx = 0,$$

oder, unter Benutzung von Gleichung (5):

$$\int_0^l \pm \frac{2f}{d} dx = 0. \tag{6}$$

Dabei gilt das negative Zeichen von den Enden des Balkens bis zu den Wendepunkten, das positive Zeichen zwischen den beiden Wendepunkten.

Die Auffindung der Wendepunkte selbst können wir nun offenbar als rein geometrische Aufgabe behandeln: In Figur 41 stelle EFG die m-Kurve des Balkens dar, welche bei gegebener Belastung leicht aufgezeichnet werden kann. Ferner sollen die Ordinaten der Kurve $ATUC$ den Wert $\frac{1}{d}$, d. h. den reziproken Wert der Höhe des Balkens darstellen. Die Höhe kann dabei ganz beliebig gewählt werden, nur soll d immer an zwei symmetrisch zur Mitte gelegenen Punkten des Balkens gleich grofs sein.

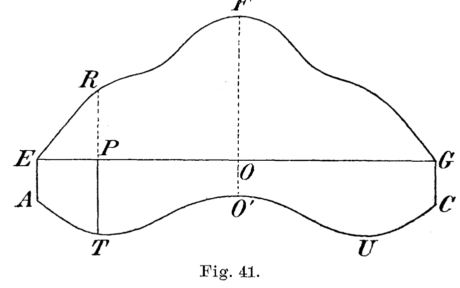


Fig. 41.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, einen Punkt P so zu ermitteln, dafs die Fläche $EPTA$ gleich der Fläche $POO'T$ wird, wenn O die Balkenmitte bedeutet. Der so gefundene Punkt P ist dann ein Punkt ohne Biegung, und $\overline{PR}$ ist der Wert, den wir vor-

hin c genannt haben. Folglich ist $m - \overline{PR}$ das wirkliche Biegungsmoment M an jeder Stelle; das Diagramm EFG mufs nach unten so weit verschoben werden, bis der Punkt R auf den Punkt P fällt; dann erhält man das Diagramm für M. Kennen wir aber M und d, so ist es ein leichtes, aus Gleichung (5) auch J zu finden.

Wenn ein solcher **Balken von gleicher Sicherheit überdies gleichmäfsige Höhe** besitzt, so liegen offenbar die Wendepunkte auf halbem Wege zwischen der Mitte und den eingespannten Enden; denn dann wird das untere Diagramm zu einem Rechteck. Balken von gleicher Sicherheit und gleicher Höhe haben überall *die gleiche Krümmung*; nur ändert dieselbe an den Wendepunkten plötzlich ihren Sinn.

Ist die **Belastung des Balkens eine ganz beliebige**, so sind die beiden **für die Einspannung erforderlichen Momente an den Enden** im allgemeinen **von einander verschieden.** Es bezeichne m_1 das gegen den Uhrzeigersinn drehende Einspannungsmoment am Ende A, m_2 das im Uhrzeigersinn drehende Einspannungsmoment im Punkte B und m das Biegungsmoment in einem beliebigen Punkte für den Fall, dafs der Balken nur *unterstützt* wäre.

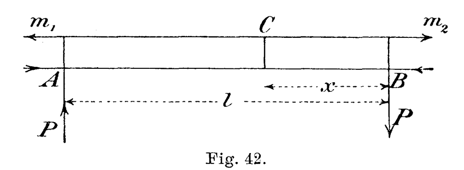


Fig. 42.

Wir betrachten zunächst einen gewichtslosen unbelasteten Balken von der gleichen Länge unter dem alleinigen Einflufs der Biegungsmomente m_1 und m_2 an seinen Enden; um den Balken im Gleichgewicht zu halten, ist es notwendig, zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Unterstützungskräfte P an den Enden anzubringen, wie sie in der Figur 42 eingetragen sind. Und zwar mufs $Pl + m_2 = m_1$ sein, wenn die Richtung der Kräfte so angenommen wird, wie Figur 42 angiebt; daraus folgt dann: $P = \frac{m_1 - m_2}{l}$.

Die beiden Biegungsmomente m_1 und m_2 müssen also aufgehoben werden durch die beiden Kräfte P; d. h.: bei B mufs eine abwärts gerichtete Kraft eingeführt werden. Das bedeutet aber, dafs der Balken bei B die Tendenz hat, sich nach oben zu bewegen; folglich ist der Auflagedruck, welcher bei blofser Unterstützung eintreten würde, in unserem Falle der Einspannung um den Betrag P zu *verringern*. Bezeichnet m für irgend eine Stelle C das Biegungsmoment, welches bei blofser Unterstützung der beiden Enden auftreten würde, so wird das Moment an derselben Stelle bei Einspannung des Balkens gleich:

$$m - m_2 - P \cdot \overline{BC}. \tag{1}$$

Will man durch möglichst einfache Überlegung zu diesem Resultate kommen, so genügt es, folgendermafsen zu schliessen: Der Balken war im Gleichgewicht, als er belastet war und an den Enden nur unterstützt wurde; das Biegungsmoment an irgend einer Stelle war m; wir haben nun eine neue Gruppe von Kräften eingeführt, welche sich unter einander aufheben; das Biegungsmoment im Punkte C, welches von diesen neuen Kräften herrührt, ist gleich

$$-(m_2 + P \cdot \overline{BC});$$

infolge dessen ist das wirkliche Biegungsmoment im Punkte C:

$$m - m_2 - P \cdot \overline{BC}.$$

Angenommen, es sei $m_2 = 0$, dann wird $P = \frac{m_1}{l}$, und das Biegungsmoment bei C wird: $m - \frac{m_1}{l}\overline{BC} = m - P \cdot \overline{BC}$.

62. Ein Balken sei am Ende A eingespannt, am Ende B nur unterstützt, wobei aber der Punkt B mit dem Punkte A genau in einer horizontalen Ebene liegen soll. Wir haben dann $m_2 = 0$ und $\overline{BC} = x$ zu setzen und erhalten also genau den zuletzt angedeuteten Fall. Die Biegungsgleichung lautet demnach:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = m - Px. \tag{2}$$

Zunächst wollen wir einen **gleichmäfsig belasteten prismatischen Balken** betrachten, wie in Beispiel 4 Artikel 60. Bei blofser Unterstützung des Balkens an beiden Enden wird das Biegungsmoment

$$m = \tfrac{1}{2}wlx - \tfrac{1}{2}wx^2\ {}^{*)}.$$

Dabei ist x vom nicht eingespannten Balkenende aus gerechnet, w bedeutet die Belastung pro cm Balkenlänge. Gleichung (2) lautet also jetzt:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}wlx - \tfrac{1}{2}wx^2 - Px, \tag{3}$$

woraus durch Integration folgt:

$$EJ\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{4}wlx^2 - \tfrac{1}{6}wx^3 - \tfrac{1}{2}Px^2 + c. \tag{4}$$

Ferner haben wir die Einspannungsbedingung, dafs bei $x = l$ für die Steigung gilt:

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5}$$

Integrieren wir zunächst die Gleichung (4) nochmals, so finden wir:

$$EJy = \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{6}Px^3 + cx. \tag{6}$$

Eine Integrationskonstante haben wir nicht hinzuzufügen, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Auch für $x = l$ wird $y = 0$. Diese Bedingung und die gleichfalls für $x = l$ gültige Gleichung (5) benutzen wir zur Umformung von (4) und (6):

$$0 = \frac{1}{12}wl^3 - \frac{1}{2}Pl^2 + c, \tag{7}$$

$$0 = \frac{1}{24}wl^4 - \frac{1}{6}Pl^3 + cl, \tag{8}$$

und daraus können wir dann leicht P und c bestimmen.

Wir dividieren zu dem Zwecke (8) durch l und subtrahieren die entstehende Gleichung von (7); so erhalten wir:

$$0 = \frac{1}{24}wl^3 - \frac{1}{3}Pl^2;\quad P = \frac{1}{8}wl.$$

Aus (7) folgt dann:

$$0 = \frac{1}{12}wl^3 - \frac{1}{16}wl^3 + c;\quad c = -\frac{1}{48}wl^3.$$

*) Die Abweichung dieser Gleichung für m von der in Art. 60 Beisp. 4 beruht auf der Wahl eines anderen Nullpunktes für x.

Das wirklich auftretende Biegungsmoment wird also gemäfs Gleichung (3)

$$\tfrac{1}{2}wlx - \tfrac{1}{2}wx^2 - \tfrac{1}{8}wlx,$$

und die Biegungsform des Balkens erhalten wir durch Einsetzen der gefundenen Werte für P und c in Gleichung (6).

63. Wenn die Belastung eine ganz beliebige ist und der Querschnitt sich ebenfalls in ganz beliebiger Weise ändert, so mufs eine graphische Methode angewandt werden, um die zweimalige Integration auszuführen.

Eine Funktion z von x sei durch eine Kurve dargestellt; dann wollen wir durch eine neue Kurve den Wert $\int z \cdot dx$ ausdrücken; d. h.: die Ordinate der neuen Kurve soll die Fläche der z-Kurve bis zu jenem Werte von x angeben, gerechnet von irgend einer festen Anfangsordinate ab. Bei dieser Ausmittelung können wir so verfahren: Wir zeichnen die zur Funktion z gehörende Kurve auf einen Bogen Millimeterpapier und zählen dann einfach die in Betracht kommende Anzahl der Quadrate aus. Oder wir können mit einem Planimeter die Fläche bis zu einzelnen, beliebig herausgegriffenen Werten von x ermitteln; an diesen Stellen tragen wir dann neue Ordinaten derart auf, dafs sie mafsstäblich den zugehörigen Flächenwert angeben. So suchen wir vielleicht 10—12 einzelne Punkte und ziehen darauf durch dieselben aus freier Hand die neue Kurve. Aber diese Methoden sind umständlich und ungenau. Man hat daher sogenannte Integraphen oder Integriermaschinen konstruiert, welche die verlangte Kurve auf mechanischem Wege unmittelbar zeichnen; so arbeitet z. B. der Integraph von Abdank-Abakanowicz (hergestellt von Coradi in Zürich) ganz besonders präzise. Leider ist der Preis eines solchen Instrumentes nicht gerade ein geringer. Ein wohlfeiler Integraph, der aber genau arbeiten müfste, würde nicht nur für die Lösung graphischer Probleme sehr wertvoll sein, sondern er würde uns auch, wenn wir ihn eifrig gebrauchten, eine vorzügliche Hülfe für das Verständnis der Integralrechnung bieten.

Wir nehmen nun an, dafs der Leser mit irgend einer Methode vertraut sei, welche den Wert von $\int_0^x z \cdot dx$ durch eine neue Kurve darzustellen ermöglicht; die Belastung des Balkens sei eine ganz beliebige, auch sei das Trägheitsmoment J nicht an allen Stellen gleich. Die Biegungsgleichung lautet für unseren zuletzt betrachteten Fall:

$$M = m - Px = EJ\frac{d^2y}{dx^2},$$

und die Integration ergiebt:

$$E\frac{dy}{dx} = \int \frac{m}{J}\,dx - P\int \frac{x}{J}\,dx + c. \tag{9}$$

Wir müssen also ein Diagramm zeichnen, dessen Ordinate in jedem Punkte gleich $\frac{m}{J}$ ist, und müssen diese Kurve integrieren. Zur Vereinfachung der Formeln wollen wir den Ausdruck $\int_0^x \frac{m}{J}\,dx$ mit dem Buchstaben μ bezeichnen; für $x = l$ wird μ gleich der gesamten Fläche der $\frac{m}{J}$-Kurve und diesen Wert wollen wir μ_1 nennen.

Aufserdem müssen wir ein Diagramm konstruieren, dessen Ordinate überall gleich $\frac{x}{J}$ ist, und auch dieses integrieren. Der Wert $\int_0^x \frac{x}{J}\,dx$ möge durch X

bezeichnet werden. Für $x = l$ wird X gleich der gesamten Fläche der $\frac{x}{J}$-Kurve, und wir wollen diesen Wert X_1 nennen. Nun ist in Gleichung (9):

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = l.$$

Daraus folgt die Beziehung:

$$0 = \mu_1 - PX_1 + c. \tag{10}$$

Jetzt integrieren wir (9) nochmals und erhalten:

$$Ey = \int \mu \cdot dx - P \int X \cdot dx + cx + C.$$

Berücksichtigen wir nun, daſs $y = 0$ wird für $x = 0$, so sehen wir, daſs $C = 0$ ist. Bezeichnen wir noch die Gesamtflächen der μ- und X-Kurven mit $\boldsymbol{M}_1$ bezw. $\boldsymbol{X}_1$ und stellen die letzte Gleichung für den Balkenpunkt $x = l$ auf, so erhalten wir:

$$0 = \boldsymbol{M}_1 - P \cdot \boldsymbol{X}_1 + cl.^{*)} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) kann P und c leicht gefunden werden, und mit Hülfe des gefundenen Wertes von P läſst sich natürlich das Biegungsmoment an jeder Stelle bestimmen. Der Wert c giebt uns die Neigung des Balkens am Punkte $x = 0$ an.

64. Beispiel. **Ein Balken von beliebig wechselndem Querschnitt sei an beiden Enden eingespannt und in irgend einer beliebigen Weise belastet.** Wir messen x von einem Ende aus, an

---

*) Wollen wir die eingeführten Buchstaben μ, X, μ_1, X_1 u. s. w. nicht benutzen, so bietet sich die folgende Ableitung dar:

$$\left[E \cdot \frac{dy}{dx}\right]_0^x = \int_0^x \frac{m}{J}\, dx - P \int_0^x \frac{x}{J}\, dx. \tag{10}$$

Hier ist die obere Grenze x variabel zu denken. Bezeichnen wir den Wert von $E\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ mit c; so können wir Gleichung (10) auch so schreiben:

$$E\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{m}{J}\, dx - P \int_0^x \frac{x}{J}\, dx + c.$$

Wir integrieren erneut und zwar zwischen den Grenzen 0 und l und erinnern uns daran, daſs y an beiden Grenzen denselben Wert hat; dann finden wir:

$$\left[E \cdot y\right]_{x=0}^{x=l} = 0 = \int_0^l \left(\int_0^x \frac{m}{J}\, dx\right) dx - P \int_0^l \left(\int_0^x \frac{x}{J}\, dx\right) dx + cl. \tag{11}$$

Wenn die Integrationen in Gleichung (10) und (11) ausgeführt sind, so können wir die Gröſsen P und c ermitteln. Das wahre Biegungsmoment ist dann, wovon wir ja ausgingen: $m - Px$.

welchem das Einspannungsmoment gleich m_2 sein mag. Genau, wie vorhin, erhalten wir:

(1) $$M = m - m_2 - Px,$$

(2) $$E\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{J} - \frac{m_2}{J} - P\frac{x}{J},$$

(3) $$E\frac{dy}{dx} = \int \frac{m}{J} \cdot dx - m_2 \int \frac{dx}{J} - P \int \frac{x}{J}\, dx + C.$$

Da der Balken bei $x = 0$ eingespannt ist, so ergiebt sich $C = 0$.

Wir führen nun wiederum einige Abkürzungen ein, nämlich:

μ für $\int \frac{m}{J}\, dx$ und μ_1 für die Gesamtfläche der $\frac{m}{J}$-Kurve,

Y für $\int \frac{dx}{J}$ und Y_1 für die Gesamtfläche der $\frac{1}{J}$-Kurve,

X für $\int \frac{x}{J}\, dx$ und X_1 für die Gesamtfläche der $\frac{x}{J}$-Kurve.

Dann ergiebt sich für den Punkt $x = l$:

(4) $$0 = \mu_1 - m_2 Y_1 - P X_1.$$

Die zweite Integration liefert:

$$Ey = \int \mu \cdot dx - m_2 \int Y \,.\, dx - P \int X \cdot dx + c,$$

wo sich durch Eintragung des speziellen Wertes $x = 0$ auch hier $c = 0$ ergiebt.

Wir bezeichnen wieder die Gesamtflächen der μ-, Y- und X-Kurven zwischen den Ordinaten 0 und l mit $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{Y_1}$ und $\boldsymbol{X_1}$ und erhalten dann für den Punkt $x = l$:

(5) $$0 = \boldsymbol{M_1} - m_2 \boldsymbol{Y_1} - P\boldsymbol{X_1}.\text{*)}$$

---

*) Wir haben die Abkürzungen μ, X, Y, μ_1, X_1, Y_1, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{Y_1}$ benutzt, weil wir fürchteten, dafs der Leser mit den Symbolen der Integralrechnung noch zu wenig vertraut sei. Vielleicht würde es jedoch besser sein, die Ableitungen ohne Benutzung der genannten abgekürzten Bezeichnungsweise durchzuführen; dadurch würden wir den Leser dazu anregen, dafs er sich an die gebräuchlichen Bezeichnungen der Integralrechnung gewöhnt, und nicht neun neue Symbole in die Rechnung einschleppen.

Wir haben alsdann folgendermafsen zu verfahren: Erstlich ergiebt sich durch Integration der Gleichung (2) zwischen den Grenzen 0 und x, mit Rücksicht auf den Umstand, dafs der Balken bei $x = 0$ eingespannt ist:

(6) $$E\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{m}{J}\, dx - m_2 \int_0^x \frac{dx}{J} - P \int_0^x \frac{x}{J}\, dx.$$

Aus (4) und (5) lassen sich leicht die Werte von m_2 und P bestimmen, die dann in (1) einzusetzen sind.

65. Graphische Lösung. Die Kurve ACB (Figur 43) stelle das Biegungsmoment m dar, bei der Annahme, daſs der Balken an beiden Enden nur unterstützt wäre; AD bezeichne das Einspannungsmoment m_1 und BE das Einspannungsmoment m_2. Wir verbinden D mit E. Dann ergiebt die Differenz zwischen den Ordinaten der Kurve ACB und denen der Geraden DE die Gröſse der wirklich auftretenden Biegungsmomente; dieselben sind also durch die senkrechten Ordinaten des Zwischenraumes zwischen der geraden Linie DE und der Kurve $AFCGB$ dargestellt. Das Biegungsmoment ist negativ von A bis H und von I bis B, positiv von H bis I. F und G sind Wendepunkte der Biegungslinie.

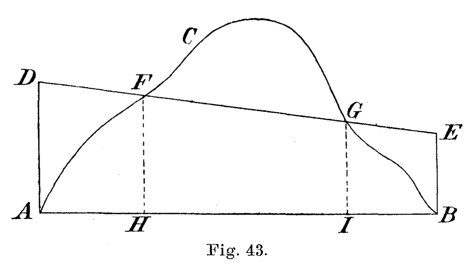


Fig. 43.

66. Nützliche Analogien für die Berechnung der Balkenbiegung. Es sei w die Belastung des Balkens in kg pro cm Länge, und M das Biegungsmoment in einem Querschnitte [dasselbe werde positiv gerechnet, wenn es den Balken nach aufwärts konvex zu machen strebt*)]. Ferner sei x der horizontale Abstand des Querschnitts von einem irgendwie gewählten Koordinatenanfangspunkte. Dann behaupten wir, daſs folgende Gleichung gilt:

$$(1) \qquad \frac{d^2 M}{dx^2} = w.$$

Integrieren wir nochmals, und zwar zwischen den Grenzen 0 und l, so folgt:

$$(7) \quad E\Big[y\Big]_{x=0}^{x=l} = 0 = \int_0^l \left(\int_0^x \frac{m}{J}\,dx\right) dx - m_2 \int_0^l \left(\int_0^x \frac{dx}{J}\right) dx - P \int_0^l \left(\int_0^x \frac{x}{J}\,dx\right) dx.$$

Wenn die in (6) und (7) angegebenen Integrationen ausgeführt sind, so können die unbekannten Gröſsen m_2 und P ausgewertet und in Gleichung (1) eingesetzt werden.

Der Leser muſs selbst ausprobieren, welcher Weg für ihn am geeignetsten ist, ob er die etwas gefährlich aussehenden, aber in Wirklichkeit doch leicht verständlichen Symbole dieser Fuſsnote verwenden, oder ob er lieber mit den neun Buchstaben rechnen will, deren Bedeutung man immer wieder vergiſst. Man vergleiche auch die vorige Note.

*) Diese letztere Bestimmung ist nur für die folgende Verallgemeinerung erforderlich.

Im Querschnitte P (Figur 44), dessen Abstand vom (weiter links angenommenen) Anfangspunkte gleich x cm ist, herrsche ein Biegungsmoment M, welches durch zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Pfeilspitzen angedeutet ist, und eine Scherkraft S, welche ebenfalls in die Skizze eingezeichnet wurde. (Wir wollen dieselbe positiv rechnen, wenn das Material rechts vom Querschnitte einen nach unten gerichteten Zug erleidet.) $\overline{PQ}$ werde mit $\varDelta x$ bezeichnet, sodafs die auf dieses Balkenstück zwischen den Querschnitten P und Q kommende Belastung gleich $w \cdot \varDelta x$ ist; das Biegungsmoment im Querschnitte Q sei $M + \varDelta M$ und die Scherspannung $S + \varDelta S$. Auf das betrachtete kleine Balkenstück wirken demnach die Kräfte, wie sie in der Skizze eingetragen sind.

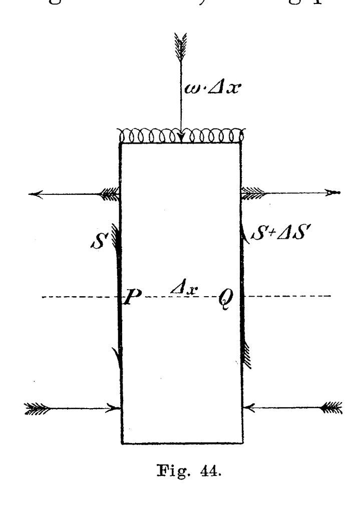


Fig. 44.

Ihre Gleichgewichtsbedingung ergiebt folgende Gleichung:

$$\varDelta S = w \cdot \varDelta x; \quad \frac{dS}{dx} = w. \tag{2}$$

Die Aufstellung der statischen Momentengleichung für den Punkt Q ergiebt:

$$M + S \cdot \varDelta x + \tfrac{1}{2} w (\varDelta x)^2 = M + \varDelta M,$$

$$\frac{\varDelta M}{\varDelta x} = S + \tfrac{1}{2} w \cdot \varDelta x;$$

wenn wir nun $\varDelta x$ immer kleiner und kleiner werden lassen, so erhalten wir als Grenzwert:

$$\frac{dM}{dx} = S, \tag{3}$$

womit Gleichung (1) bewiesen ist.

Nun wissen wir, dafs für y, die Durchbiegung eines Balkens, die Gleichung gilt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \tag{4}$$

Die augenfällige Analogie der Gleichungen (1) und (4) erlaubt uns aber, auf Gleichung (4) alle diejenigen graphischen Methoden anzuwenden, welche uns zur Lösung der Gleichung (1) längst geläufig sind. Haben wir zum Beispiel ein Diagramm, dessen Ordinate an jeder Stelle den Wert von w zeigt, also ein Belastungsdiagramm, so

können wir daraus sofort mit Hülfe der graphischen Statik ein Diagramm konstruieren, welches den Wert von M an jeder Stelle maſsstäblich angiebt; d. h. wir können die Gleichung (1) sehr leicht auf graphischem Wege lösen*).

Nun sehen wir aber aus der Gleichung (4), daſs wir auf ein Diagramm, welches den Wert $\frac{M}{EJ}$ für jede Stelle angiebt, genau dieselbe Methode anwenden können, um den zugehörigen Wert von y zu finden, d. h. um die Biegungslinie des Balkens zu konstruieren. Viele unserer Biegungsaufgaben erleichtern sich durch die Ausnutzung dieser Analogie ganz bedeutend.

Beispiel. Haben wir einen beliebigen Balken, ganz gleichgültig, ob die Enden unterstützt oder frei sind, so finden wir unter der Annahme, daſs w konstant ist, durch Integration:

$$(5) \qquad \frac{dM}{dx} = b + wx; \quad M = a + bx + \tfrac{1}{2} wx^2.$$

Bei einem bestimmten vorliegenden Falle haben wir dann immer noch Angaben, aus denen sich die Konstanten a und b ermitteln lassen.

Nehmen wir z. B. an, es handele sich um einen prismatischen und gleichmäſsig belasteten Balken, welcher an den beiden Enden nur unterstützt ist.

Wir messen y vom tiefsten Punkte des Balkens in der Mitte nach oben und x von der Mitte aus nach den beiden Enden. Dann ist $M = 0$ für die Stellen $x = \frac{1}{2} l$ und $x = -\frac{1}{2} l$.

Für diese beiden Punkte lautet also Gleichung (5):

$$0 = a + \tfrac{1}{2} bl + \tfrac{1}{8} wl^2$$

und

$$0 = a - \tfrac{1}{2} bl + \tfrac{1}{8} wl^2.$$

Folglich ist $b = 0$, $a = -\frac{1}{8} wl^2$, und aus Gleichung (5) wird nun:

$$(6) \qquad M = -\tfrac{1}{8} wl^2 + \tfrac{1}{2} wx^2.$$

Das ist genau dieselbe Gleichung, die wir auch in Beispiel 4, Art. 60, benutzten, wo wir hernach M durch EJ dividierten und dann zweimal integrierten, um y zu finden.

*) Gewöhnlich finden wir M für einen an den Enden nur unterstützten Balken, z. B. im Diagramm ACB, Figur 43 (Art. 65). Sind dagegen an den Enden noch Biegungsmomente vorhanden, welche durch die Ordinaten AD und BE dargestellt werden, so verbinden wir D mit E durch eine Gerade. Dann stellt die algebraische Summe aus den Ordinaten der beiden Diagramme das wahre Diagramm der Biegungsmomente dar.

Es möge jetzt mit i der Quotient $\frac{dy}{dx}$, d. h. die „Steigung“ des Balkens bezeichnet werden.

Nun haben wir die Beziehungen gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = i, \quad \frac{di}{dx} = \frac{M}{EJ}, \quad \frac{dM}{dx} = S, \quad \frac{dS}{dx} = w.$$

Wir haben also ein System von Kurven, welches wir durch mehrmalige Differentiation aus der gegebenen Form y der Biegungslinie ableiten können, oder welches wir durch mehrmaliges Integrieren aus den bekannten Werten von w, d. h. aus der Belastung des Balkens erhalten.

Um aus w den Wert M zu finden, haben wir nun aber eine bequeme graphische Methode; um aus $\frac{M}{EJ}$ den Wert y zu finden, können wir folglich genau denselben graphischen Weg einschlagen. Alle Überlegungen und Hülfskonstruktionen, deren Richtigkeit bei der Ermittelung von M aus w unmittelbar einleuchtet und keines besonderen mathematischen Beweises bedarf, können wir demnach ohne weiteres, ebenfalls ohne besonderen mathematischen Nachweis, aus blofsen Gründen der Analogie, anwenden, um aus $\frac{M}{EJ}$ den Wert y zu ermitteln.

So ist z. B. die Fläche der $\frac{M}{EJ}$-Kurve zwischen den Ordinaten x_1 und x_2 gleich dem Zuwachs von i zwischen den Werten x_1 und x_2; die Tangenten an die Biegungslinie des Balkens in den Punkten x_1 und x_2 schneiden sich in einem Punkte, welcher auf einer Senkrechten mit dem Schwerpunkte des fraglichen Flächenteiles der $\frac{M}{EJ}$-Kurve liegt. Ferner ist die *gesamte* Fläche der $\frac{M}{EJ}$-Kurve für eine Spannweite HI gleich der Zunahme von $\frac{dy}{dx}$ von einem Ende H des Abschnittes bis zu dem anderen I; der Schnittpunkt P der bei H und I an die Biegungslinie gelegten Tangenten befindet sich senkrecht über dem Schwerpunkte des zugehörigen Teiles der $\frac{M}{EJ}$-Kurve. Diese zwei Gesetze können als Ausgangspunkt für eine vollständige graphische Behandlung der Probleme über die Biegung von Balken benutzt werden.

Schneidet das durch den genannten Schwerpunkt und durch P gelegte Lot die Abscissenaxe im Punkte G, und bezeichnet i_H die Steigung der Tangente im Punkte H, so liegt der Punkt P um den Betrag $\overline{GH} \cdot i_H$ höher als der Punkt H; I liegt um den Betrag



$\overline{GI} \cdot i_I$ höher als der Punkt P, worin i_I die Steigung der Kurve im Punkte I bedeutet. Daraus folgt, daſs der Höhenunterschied zwischen I und H gleich $\overline{HG} \cdot i_H + \overline{GI} \cdot i_I$ ist; von dieser Beziehung kann man mit Nutzen Gebrauch machen, wenn über die relative Höhe der Unterstützungspunkte genaue Angaben vorliegen, wie es bei zusammenhängenden Balken auf mehreren Stützen der Fall ist.

67. Balken auf mehreren Stützen. Früher verbanden die Brückenbauer, anstatt für jede Spannweite einer Brücke einen einzelnen Träger zu verwenden, die einander berührenden Enden derselben mit einander, um das Aufbäumen derselben zu verhindern. Die ganze Brücke besteht dann aus einem **zusammenhängenden Träger**, der an mehreren Punkten unterstützt ist.

Wenn wir absolut sicher wären, daſs die Unterstützungspunkte der fertigen Brücke auf den Millimeter genau in der bei der Rechnung angenommenen Höhe liegen, so würde, wie sich leicht zeigen läſst, der zusammenhängende Träger wesentlich billiger sein, als einzelne Binder. Leider ändert aber eine, wenn auch nur ganz geringe, Senkung eines der Unterstützungspunkte die Verteilung der Kräfte in dem ganzen Balken vollständig.

Auch bei vielen anderen Aufgaben der angewandten Mechanik begegnen wir derselben Schwierigkeit und müssen zwischen Sparsamkeit mit einer gewissen Unsicherheit einerseits, gröſseren Kosten mit Sicherheit andererseits wählen. So bringt z. B. die starre Nietverbindung an den Knotenpunkten einer Eisenkonstruktion immer eine Abweichung der wirklich eintretenden Kräfteverteilung von der berechneten mit sich, weil sich eine Ausführung mit mathematischer Genauigkeit unmöglich erreichen läſst. Deswegen zieht man oft vor, die Knotenpunkte scharnierartig zu konstruieren, obwohl diese Anordnung bedeutende Mehrkosten verursacht.

Dem Leser, welcher sich für die Theorie der zusammenhängenden Brückenkonstruktionen näher interessiert, empfehlen wir, das Werk von Müller-Breslau *„Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen“* *) zu studieren, wo er auch graphische Methoden für die Lösung der meisten wichtigen Probleme finden kann **).

---

*) Zweite Auflage, Leipzig 1893.

**) George Wilson hat eine auſserordentlich einfache Methode für die Lösung der allgemeinsten Aufgabe über zusammenhängende Balken angegeben: Es mögen Auflagestellen bei A, B, C, D, E vorhanden sein. Dann stellen wir uns zunächst vor, daſs auſser A und E keine Auflagen existieren, und suchen die Durchbiegungen, welche unter diesen Umständen bei B, C und D

Wir wollen hier als ein gutes Beispiel für die Anwendung der Integralrechnung einen Träger von gleichmäfsigem Querschnitt betrachten, welcher auf mehreren in gleicher Höhe liegenden Unterstützungspunkten aufruht. Es sei ABC die Mittellinie des Trägers für zwei Spannweiten; der Träger sei ursprünglich gerade gewesen

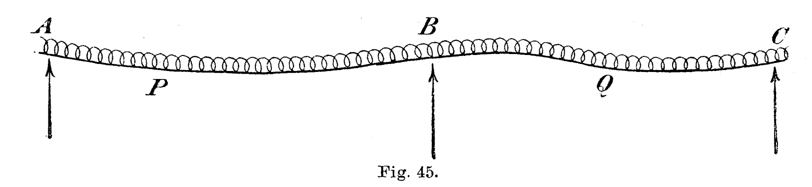


Fig. 45.

und sei in den Punkten A, B, C unterstützt; der Abstand von A bis B heifse l_1, der von B bis C: l_2. Die Belastung auf beiden Spannweiten sei eine ganz beliebige. Wir bezeichnen die Biegungsmomente in den drei Unterstützungspunkten etwa gleich selber durch A, B und C und rechnen sie positiv, wenn sie den Balken nach oben konkav zu machen suchen.

Bei dem Querschnitte P im Abstande x vom Punkte A möge m dasjenige Biegungsmoment sein, welches eintreten würde, wenn der Balken in jeder Spannweite vollkommen von den übrigen Balkenteilen unabhängig wäre. Wir haben nun bereits gesehen, dafs wir durch die Einführung von zwei neuen Biegungsmomenten m_2 und m_1 in den Punkten A und B (welche den Balken bei A und B nach oben konvex zu gestalten suchen) das wirkliche, im Punkte P auftretende Biegungsmoment finden können (Artikel 61). Unser m_2 wird gleich $-A$, $m_1 = -B$, und folglich gilt für den Punkt P:

$$(1) \qquad m + A + x\frac{B - A}{l_1} = EJ\frac{d^2y}{dx^2},$$

worin m, wie gesagt, das Biegungsmoment bezeichnet, welches bei blofser Unterstützung des Balkens eintreten würde. Gegenüber dieser Annahme wird der Auflagedruck bei A durch Einflufs der benachbarten Spannweiten vermindert um den Betrag:

$$(2) \qquad \frac{A - B}{l_1}.$$

eintreten würden. Nun nehmen wir dazu noch eine aufwärts gerichtete Belastung von beliebiger Gröfse bei B an, und suchen die dadurch bedingten nach oben gerichteten Durchbiegungen bei B, C und D. Dieselbe Rechnung führen wir für C und D durch. Dann setzen uns die gefundenen Resultate in den Stand, diejenigen nach oben gerichteten Kräfte bei B, C und D zu ermitteln, welche diese Punkte gerade in ihre wirkliche Lage zurückbringen, d. h. also die Auflagedrucke.

Wir integrieren Gleichung (1) mit Rücksicht darauf, dafs EJ als konstant angenommen wurde, und finden:

$$(3) \qquad \int m \cdot dx + Ax + \tfrac{1}{2} x^2 \frac{B-A}{l_1} + c_1 = EJ \cdot \frac{dy}{dx},$$

wo das links stehende Integral so gewählt sein soll, dafs es für $x = 0$ verschwindet.

Die nochmalige Integration von Gleichung (3) liefert weiter:

$$(4) \qquad \int \left(\int m \cdot dx \right) dx + \tfrac{1}{2} A x^2 + \tfrac{1}{6} x^3 \frac{B-A}{l_1} + c_1 x + e = EJ \cdot y,$$

und auch hier soll das an erster Stelle stehende Integral mit x verschwinden.

Im Punkte A, wo $x = 0$ ist, verschwindet auch y; also verschwindet die zweite Integrationskonstante e.

Auch im Punkte B, wo $x = l_1$ ist, wird $y = 0$. Bezeichnen wir also noch den Wert des Doppelintegrals für die ganze Spannweite mit μ_1:

$$\mu_1 = \int_0^{l_1} \left(\int_0^x m \cdot dx \right) dx,$$

so gilt für den Punkt B:

$$(5) \qquad \mu_1 + \tfrac{1}{2} A l_1^2 + \tfrac{1}{6} l_1^2 (B - A) + c_1 l_1 = 0.$$

Nun wollen wir aus (3) den Wert $EJ \frac{dy}{dx}$ für den Punkt B ermitteln. Bezeichnen wir die Fläche der m-Kurve für die ganze Spannweite mit a_1:

$$a_1 = \int_0^{l_1} m \cdot dx,$$

so wird für den Punkt B:

$$(6) \qquad EJ \frac{dy}{dx} = a_1 + A l_1 + \tfrac{1}{2} l_1 (B - A) + c_1.$$

Denselben Wert können wir aber auch noch auf einem anderen Wege bestimmen. Für irgend einen Punkt Q der zweiten Spannweite erhalten wir nämlich, wenn wir x von B aus rechnen, dieselben Gleichungen (1), (3) und (4), nur dafs wir überall B für A, C für B und c_2 für c_1 einsetzen müssen. Auf diese Weise finden wir aus (3), dafs $EJ \frac{dy}{dx}$ im Punkte B, für welchen wir jetzt $x = 0$ setzen müssen, gleich c_2 ist. Die Vergleichung mit (6) giebt also:

$$(7) \qquad c_2 - c_1 = a_1 + A l_1 + \tfrac{1}{2} l_1 (B - A).$$

Aus (5) erhalten wir in analoger Weise:

(8) $$\mu_2 + \frac{1}{2} B l_2^2 + \frac{1}{6} l_2^2 (C - B) + c_2 l_2 = 0 .$$

Wir subtrahieren (5) von (8), nachdem wir durch l_1 resp. l_2 dividiert haben:

(9) $$c_2 - c_1 = \frac{\mu_1}{l_1} - \frac{\mu_2}{l_2} + \frac{1}{2} A l_1 - \frac{1}{2} B l_2 + \frac{1}{6} l_1 (B - A) - \frac{1}{6} l_2 (C - B) .$$

Die Gleichsetzung von (7) und (9) ergiebt:

(10) $$A l_1 + 2 B (l_1 + l_2) + C l_2 = 6 \left(\frac{\mu_1}{l_1} - a_1 - \frac{\mu_2}{l_2} \right) .$$

Damit haben wir nun eine Gleichung gefunden, welche die Werte A, B, C, d. h. die Biegungsmomente in den drei auf einander folgenden Unterstützungspunkten mit einander in Beziehung bringt. Hat der Balken mehr als drei Stützpunkte, so ergeben je drei auf einander folgende derselben eine der obigen analoge Gleichung. Im ganzen erhalten wir also zwei Gleichungen weniger, als Stützpunkte vorhanden sind.

Haben wir nun ausserdem noch zwei Bedingungen, z. B. die, daſs die Balkenenden nur unterstützt sind, also ein Biegungsmoment Null besitzen, so können wir die Biegungsmomente an allen Stützpunkten durch Auflösung der Gleichungen ermitteln.

Beispiel. Zwei auf einander folgende Spannweiten von der Länge l_1 resp. l_2 seien mit w_1 resp. w_2 kg per cm Länge gleichmäſsig belastet. Dann ist:

$$m = \frac{1}{2} w l x - \frac{1}{2} w x^2, \quad \int m \, dx = \frac{1}{4} w l x^2 - \frac{1}{6} w x^3,$$

folglich: $$a_1 = \frac{w_1}{12} l_1^3 .$$

Weiter wird:

$$\int \left(\int m \, dx \right) dx = \frac{1}{12} w l x^3 - \frac{1}{24} m x^4,$$

folglich: $$\mu_1 = \frac{1}{24} w_1 l_1^4, \quad \mu_2 = \frac{1}{24} w_2 l_2^4 .$$

Der in Gleichung (10) auftretende Ausdruck: $\frac{\mu_2}{l_2} + a_1 - \frac{\mu_1}{l_1}$ wird also jetzt:

$$\frac{1}{24} w_2 l_2^3 + \frac{w_1}{12} l_1^3 - \frac{1}{24} w_1 l_1^3 = \frac{1}{24} (w_2 l_2^3 + w_1 l_1^3),$$

sodass die Gleichung (10) für den vorliegenden Fall lautet:

(10) $$A l_1 + 2 B (l_1 + l_2) + C l_2 + \frac{1}{4} (w_2 l_2^3 + w_1 l_1^3) = 0.$$

Ist auch noch $l_1 = l_2$ und $w_1 = w_2$, so vereinfacht sich die Gleichung zu:

(11) $$A + 4 B + C + \frac{1}{2} w l^2 = 0.$$

Fall 1. Ein gleichförmiger, gleichmäfsig belasteter Balken ruhe ohne Einspannung auf drei Unterstützungspunkten, welche gleichen Abstand von einander haben. Dann ist $A = C = 0$ und $B = -\frac{1}{8} w l^2$. Im Punkte P mit dem Abstande x von A herrscht demnach ein Biegungsmoment:

$$\frac{1}{2} w\,(lx - x^2) + 0 - \frac{x}{l}\,\frac{1}{8} w l^2.$$

Der Auflagedruck bei A wird kleiner, als wenn der Balken bei B abgeschnitten wäre, und zwar um den in Gleichung (2) angegebenen Betrag $\frac{A-B}{l_1}$ oder $\frac{1}{8} w l$. Der Auflagedruck würde im angedeuteten Falle $\frac{1}{2} w l$ gewesen sein; folglich wird er jetzt nur $\frac{3}{8} w l$ an jedem der beiden Endpunkte. Da nun die gesamte Last gleich $2 w l$ ist, so bleibt für den mittleren Unterstützungspunkt noch $\frac{10}{8} w l$ übrig.

Fall 2. Ein gleichförmiger, gleichmäfsig belasteter Balken ruhe auf vier gleich weit von einander entfernten Unterstützungspunkten auf; die Biegungsmomente an diesen vier Stellen seien A, B, C, D. Jetzt ist $A = D = 0$, und aus Symmetriegründen $B = C$. Folglich giebt die Gleichung (11):

$$0 + 5B + \frac{1}{2} w l^2 = 0; \quad B = C = -\frac{1}{10} w l^2.$$

Wäre die Spannweite AB vom übrigen Balken abgetrennt, so würde der erste Auflagedruck gleich $\frac{1}{2} w l$ gewesen sein, folglich wird er jetzt $\frac{1}{2} w l - \frac{1}{10} w l$, das ist $\frac{4}{10} w l$. Der Auflagedruck bei D ist natürlich ebenso grofs. Die anderen zwei Stützpunkte teilen sich in den Rest der Last, welche im ganzen $3 w l$ beträgt, und so erhält folglich jeder derselben $\frac{11}{10} w l$. Die Auflagedrucke sind also:

$$\frac{4}{10} w l,\ \frac{11}{10} w l,\ \frac{11}{10} w l \text{ und } \frac{4}{10} w l.$$

68. Scherspannungen im Balken. Der Abstand von irgend einem Querschnitte des Balkens, z. B. vom Querschnitte O (Figur 46)

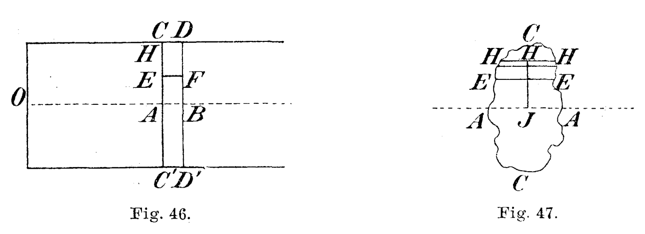


Fig. 46. Fig. 47.

bis zum Querschnitte bei A, werde mit x bezeichnet, der Abstand OB dementsprechend mit $x + \Delta x$. Das Biegungsmoment bei $C'AC$ sei

M, und dasjenige bei $D'BD$ sei $M + \varDelta M$. Die Linien OAB (Figur 46) und AA (Figur 47) stellen die neutrale Fläche des Balkens in der Projektion dar. Es soll die Tangential- oder Scherspannung in der Ebene CAC', und zwar im Abstande AE von der Neutralen bestimmt werden.

Nach einem bekannten Satze ist diese Scherspannung gleich derjenigen in der Ebene EF, welche rechtwinkelig zur Papierebene und parallel zur neutralen Fläche AB liegt. Wir stellen die Gleichgewichtsbedingung für das Balkenstückchen $ECDF$ auf, welches in Figur 48 noch einmal in gröfserem Mafsstabe und in Figur 47 im Querschnitt dargestellt ist. Eingezeichnet sind nur diejenigen Kräfte, welche parallel der neutralen Fläche, d. i. rechtwinkelig zu den Querschnitten wirken. *Der Gesamtdruck auf DF ist gröfser als der Gesamtdruck auf CE, und die Tangentialkräfte auf der Fläche EF gleichen den Unterschied aus.* Wenn wir diese Überlegung mathematisch formulieren, haben wir unsere Aufgabe schon gelöst.

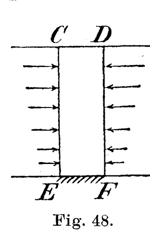


Fig. 48.

An einer Stelle H in der Ebene CAC' in einem Abstande y von der neutralen Fläche ist die Druckspannung bekanntermafsen $p = \frac{M}{J}y$. Ist nun b die Breite des Querschnittes an dieser Stelle, welche sich in Figur 47 als HH darstellt, so beträgt der Gesamtdruck auf die Fläche ECE:

$$(1) \qquad P = \int_{\overline{AE}}^{\overline{AC}} b\,\frac{M}{J}\,y \cdot dy = \frac{M}{J}\int_{\overline{AE}}^{\overline{AC}} by \cdot dy.$$

Ist b nicht überall gleich grofs, so mufs es uns als Funktion von y gegeben sein, damit wir das Integral auswerten können. Behalten wir die Bezeichnung P für den gesamten auf der Fläche EC lastenden Druck bei, so ist $P + \varDelta x \frac{dP}{dx}$ der Druck auf die Fläche DF. Die Tangentialkraft in EF ist: f mal Fläche EF oder gleich $f \cdot \varDelta x \cdot \overline{EE}$, und folglich gilt:

$$(2) \qquad f \cdot \varDelta x \cdot \overline{EE} = \varDelta x \cdot \frac{dP}{dx}, \qquad f = \frac{1}{\overline{EE}} \cdot \frac{dP}{dx}.$$

Beispiel. **Der Balken habe einen gleichmäfsigen rechteckigen Querschnitt** von konstanter Breite b und konstanter Höhe d. Dann ergiebt Gleichung (1):

$$P = \frac{12\,M b}{b\,d^3} \int\limits_{\overline{AE}}^{\frac{1}{2}d} y \cdot dy = \frac{12\,M}{d^3} \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{\overline{AE}}^{\frac{1}{2}d},$$

$$P = \frac{6\,M}{d^3} \left(\tfrac{1}{4} d^2 - \overline{AE}^2 \right).$$

Aus Gleichung (2) folgt weiter:

(3) $$f = \frac{1}{b} \frac{6}{d^3} \left(\tfrac{1}{4} d^2 - \overline{AE}^2 \right) \frac{dM}{dx},$$

sodaſs wir f berechnen können, sobald wir M kennen.

In Bezug auf M wollen wir nun eine bestimmte Annahme machen; z. B. setzen wir voraus, daſs der **Balken an den Enden unterstützt und gleichmäſsig mit w kg pro cm Länge belastet** sei. Wir sahen, daſs in diesem Falle $M = \frac{1}{8} w l^2 - \frac{1}{2} w x^2$ ist, worin x die Entfernung von der Balkenmitte bedeutet. Folglich ist $\frac{dM}{dx} = -wx$, sodaſs Gleichung (3) übergeht in:

(4) $$f = -\frac{6}{b\,d^3} \left(\tfrac{1}{4} d^2 - \overline{AE}^2 \right) w x.$$

Es empfiehlt sich jetzt, den Buchstaben y für die Entfernung $\overline{AE}$ einzuführen; wir erhalten dann als Scherspannung für irgend einen Punkt des Balkens, welcher x cm in horizontaler Richtung von der Balkenmitte nach rechts entfernt und y cm oberhalb der neutralen Linie liegt, den Wert:

(5) $$f = -\frac{6\,w}{b\,d^3} \left(\tfrac{1}{4} d^2 - y^2 \right) x.$$

Das Minuszeichen bedeutet, daſs das Material unterhalb EF auf das Material über EF im umgekehrten Sinne wirkt, wie die Pfeilspitzen bei EF in Figur 48 angeben.

Wir sehen, daſs (innerhalb desselben Querschnittes) bei $y = 0$, d. h. an den Punkten der neutralen Linie, die Scherspannung gröſser ist, als in irgend einem anderen Punkte. Bei C ist die Scherspannung gleich Null. Von den *verschiedenen* Querschnitten des Balkens haben die *Endquerschnitte* die gröſste Scherbeanspruchung. Noch mancherlei weitere Betrachtungen lassen sich an das Resultat der Gleichung (5) anknüpfen. So ist es z. B. eine interessante Aufgabe, Richtung und Gröſse der Hauptspannungen für jeden Punkt des Balkens zu bestimmen, d. h. der Spannungen in den drei zu einander senkrecht stehenden Querschnitten, in welchen nur Normalspannungen und keine Tangentialspannungen auftreten.

Wir haben soeben einen Balken mit rechteckigem Querschnitt betrachtet. Der Leser sollte auch mit anderen Querschnitten Übungen vornehmen, sobald er im Stande ist, den Ausdruck by in Gleichung (1) nach y zu integrieren, wenn b irgend eine Funktion von y ist. Er beachte, dafs $\int_{AE}^{AC} by \cdot dy$ gleich dem Produkte aus dem Inhalt der Fläche $EHCHE$ (Figur 47) und dem Abstande ihres Schwerpunktes von AA ist.

Bei einem Querschnitt, der aus einem Steg und zwei Flanschen zusammengesetzt ist, werden wir finden, dafs f in den Flanschen nur klein ist, im Stege dagegen gröfser wird. Schon bei einem rechteckigen Querschnitt nimmt der Wert f von der neutralen Axe nach aufsen hin schnell ab; beim Flanschenträger aber müssen wir, um f an den einzelnen Stellen zu erhalten, noch durch die Breite des Querschnittes dividieren; diese ist aber in den Gurten so grofs, dafs dort die Scherspannung nur ganz gering werden kann. Von Bedeutung ist sie nur im Stege, und zwar variiert sie innerhalb des Steges nur wenig. Jedem Praktiker ist daher die Regel geläufig, bei Berechnung der Flanschen oder der Gurtung nur die Biegungsspannung, bei Berechnung des Steges oder der Diagonalverstrebung dagegen nur die Scherkraft zu berücksichtigen.

Unsere Gleichungen zeigen uns ferner, dafs die Tangentialspannung nur da grofs ist, wo $\frac{dM}{dx}$ oder vielmehr $\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{J}\right)$ einen hohen Wert hat. Das wird uns nicht mehr überraschen; denn schon in Art. 66 sahen wir, dafs $\frac{dM}{dx} = S$, der gesamten Scherkraft des betreffenden Querschnittes ist.

In einem gleichmäfsig belasteten Balken ist $\frac{dM}{dx}$ an den Enden am gröfsten; nach der Mitte zu wird es kleiner und kleiner, und wechselt dann sein Zeichen. Daher darf die Querverstrebung eines nur mit seinem Eigengewicht belasteten Trägers in der Mitte wesentlich schwächer sein, als an den Enden.

Biegungsarbeit. Wenn ein Biegungsmoment M an einem Balkenquerschnitte wirkt, so speichert sich in jedem gebogenen Balkenstück eine potentielle Energie auf, welche gleich dem halben Produkte aus dem Biegungsmomente und dem Biegungswinkel ist. Ein Teil von der Länge Δx nimmt folglich die Biegungsarbeit $\frac{1}{2}\frac{M^2 \Delta x}{EJ}$ auf, weil $M\frac{\Delta x}{EJ}$ sein Biegungswinkel ist (siehe Artikel 26). Daher ist die gesamte in einem Balken von dem Biegungsmomente M geleistete Biegungsarbeit:

(6) $$\frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{J} \cdot dx.$$

Ist f eine Scherspannung, so ist ihre Deformationsarbeit pro Volumeneinheit gleich

$$\frac{f^2}{2N}, \tag{7}$$

wenn N den Gleitmodul bezeichnet, d. h. den (für ein bestimmtes Material konstanten) Quotienten aus der Scherspannung und der Gleitung.

Durch Summieren beider Ausdrücke erhalten wir den gesamten Betrag der Formänderungsarbeit für den Balken.

Indem wir diese durch (5) und (6) ausgedrückte potentielle Energie gleich dem Produkte aus der Belastung und der halben von ihr erzeugten Senkung setzen, erhalten wir interessante Beziehungen. So wollen wir z. B. den Fall betrachten, daſs ein Balken von der Länge l und von rechteckigem Querschnitte an einem Ende eingespannt, am anderen Ende mit W Kilogramm belastet sei. Im Abstande x vom freien Ende ist das Biegungsmoment $M = Wx$, die Biegungsarbeit für den ganzen Balken wird also gemäſs Gleichung (6):

$$\frac{1}{2E}\int_0^l \frac{W^2x^2}{J}\cdot dx = \frac{W^2l^3}{6EJ}. \tag{8}$$

Der obige Ausdruck (3) ergiebt für die Scherspannung den Wert:

$$f = \frac{1}{b}\,\frac{6}{d^3}\left(\tfrac{1}{4}d^2 - y^2\right)W. \tag{9}$$

Die infolge der Scherspannung auftretende Formänderungsarbeit in dem unendlich kleinen Teilchen $b\cdot dx\cdot dy$ ist gemäſs (7): $\frac{b\cdot dx\cdot dy}{2N}f^2$. Durch Integration nach y zwischen den Grenzen $-\tfrac{1}{2}d$ und $+\tfrac{1}{2}d$ finden wir die Arbeit für das Scheibchen zwischen den beiden benachbarten Querschnitten:

$$\frac{3W^2\cdot dx}{5Nbd},$$

sodaſs die von der Scherkraft geleistete Formänderungsarbeit für den ganzen Balken folgende ist:

$$\frac{3W^2l}{5Nbd}. \tag{10}$$

Bringt nun die Belastung W eine Senkung z am Ende des Balkens hervor, so hat die Last die Arbeit:

$$\tfrac{1}{2}Wz \tag{11}$$

geleistet.

Indem wir diesen Wert mit der Summe von (8) und (10) gleichsetzen, finden wir:

$$z = \frac{Wl^3}{3EJ} + \tfrac{6}{5}\cdot\frac{Wl}{Nbd}. \tag{12}$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes, welcher von der Biegungsspannung herrührt, ist derselbe, den wir schon in Artikel 60, Beispiel 1, für die Durchbiegung gefunden haben. Der andere Teil dagegen, welcher von der Scherspannung herrührt, ist unseres Wissens früher noch nicht berechnet. Bezeichnen wir den von der Biegungsspannung erzeugten Anteil von z mit z_1, den von der Scherspannung erzeugten mit z_2, so erhalten wir:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10Nl^2}{3Ed^2}.$$

Wir setzen nun $N = \frac{2}{5}E$, was ungefähr für jedes Material zutrifft; dann folgt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4l^2}{3d^2}.$$

Für einen Balken von 10 cm Höhe und 8,65 cm Länge werden nun z_1 und z_2 gleich grofs; bei $l = 86{,}5$ cm wird $z_1 = 100 z_2$; beträgt die Länge dagegen nur 0,865 cm, so ist die Biegungssenkung nur der 100ste Teil der Schersenkung. Wahrscheinlich verlieren aber unsere Biegungsgesetze für so kurze Balken ihre Gültigkeit.

69. Gebogene Federn. Figur 49 zeigt die Mittellinie einer im Punkte A festgespannten Feder, welche bei B durch eine kleine Last W in der angegebenen Richtung beansprucht wird. Gesucht wird der Betrag, um welchen B unter dem Einflufs dieser Belastung nachgiebt. Die Last, und infolge dessen auch die Deformation, werden als sehr klein angenommen. Wir betrachten das Federstück, welches durch die Querschnitte P und Q begrenzt ist. Wir setzen $\widehat{PQ} = \Delta s$, während die Länge der Feder zwischen B und P mit s bezeichnet werde.

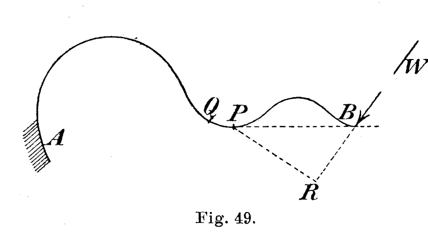


Fig. 49.

Das Biegungsmoment bei P ist gleich $W \cdot \overline{PR}$ oder gleich Wx, wo x die Länge des von P auf die Richtung von W gefällten Lotes bedeutet; $\overline{BR}$ bezeichnen wir mit y. Betrachten wir nun zunächst den Teil der Bewegung des Punktes B, welcher durch die Formänderung des Stückes QP *allein* hervorgerufen wird: zu dem Zwecke denken wir uns das ganze Stück AQ als vollkommen fest eingespannt und PB als *starren Zeiger*, dann ist die Winkeländerung, welche der Querschnitt P infolge der Biegung erleidet, gleich Δs mal der Änderung der Krümmung an dieser Stelle, d. h. gleich $\Delta s \cdot \frac{M}{EJ}$ oder gleich

$$\frac{\Delta s \cdot Wx}{EJ}. \tag{1}$$

Darin bedeutet E wieder den Elastizitätsmodul und J das Trägheitsmoment des Querschnittes. Die durch diese Formänderung von PQ hervorgerufene Lagenänderung von B ist genau dieselbe, als wenn PB ein *gerader* Zeiger wäre. In der That macht der Zeiger PB diese Winkeländerung mit, und die Bewegung von B ist gleich dem Produkt aus diesem Winkel und dem geraden Abstand PB, oder gleich:

$$\frac{\Delta s \cdot Wx}{EJ} \cdot \overline{PB}. \tag{2}$$

Nun wollen wir feststellen, wieviel von dieser Bewegung des Punktes B in die Richtung der Kraft W fällt. Diesen Betrag erhalten wir offenbar aus seiner gesamten Bewegung durch Multiplikation mit dem Quotienten $\frac{\overline{PR}}{\overline{PB}}$ oder $\frac{x}{\overline{PB}}$; die Bewegung des Punktes B in der Richtung von W ist also:

(3) $$\frac{\Delta s \cdot Wx^2}{EJ}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich die Bewegung von B rechtwinklig zur Richtung von W, nämlich:

(4) $$\frac{\Delta s \cdot W \cdot xy}{EJ}.$$

Es ist immer leicht, die Integrale von (3) und (4) durch graphische Methoden ausfindig zu machen. Zu dem Zwecke teilen wir die gesamte Länge der Feder von B bis A in eine gröſsere Anzahl gleicher Teile, sodaſs für alle der Wert Δs gleich groſs ist. Wenn nun s die gesamte Länge der Feder ist, so haben wir offenbar nur $\frac{sW}{E}$ mit dem *Mittelwert* von $\frac{x^2}{J}$ resp. $\frac{xy}{J}$ zu multiplizieren.

Von einer richtig gebauten Feder verlangt man, daſs sie bei der Beanspruchung an jedem Punkte dem Brechen gleich nahe ist. Es sei b die Breite eines Blattes rechtwinklig zur Papierebene und t seine Dicke, sodaſs das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{12} b t^3$ wird; dann muſs also $\frac{6\,Wx}{bt^2} = f$ ein konstanter Wert sein und die Ausdrücke (3) und (4) gehen über in:

$$\frac{2f \cdot \Delta s}{E} \frac{x}{t} \text{ und } \frac{2f \cdot \Delta s}{E} \frac{y}{t}.$$

Hat nun, wie es meistens der Fall ist, das Federblatt gleichmäſsige Stärke, während sich nur seine Breite proportional mit x ändert, so lauten die Ausdrücke (3) und (4) so:

(3a) $$\frac{2f \cdot \Delta s}{Et} x,$$

(4a) $$\frac{2f \cdot \Delta s}{Et} y.$$

Bezeichnen wir mit $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die zum Schwerpunkt der Kurve gehörigen Werte von x und y (siehe Artikel 48), so wird:

$$\frac{2f \cdot s\overline{x}}{Et}$$

die gesamte Verschiebung des Punktes B parallel mit W, und:

$$\frac{2f \cdot s\bar{y}}{Et}$$

die Gesamtverschiebung rechtwinklig zu W.

70. Übungsaufgaben. Das Krümmungsmaſs oder die Krümmung einer Kurve ist gegeben durch:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(vergl. Artikel 224).}$$

Ist uns nun die Gleichung der Kurve gegeben, so können wir aus derselben $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ermitteln und damit den Wert $\frac{1}{r}$ bestimmen; r selber bedeutet den Radius des Krümmungskreises. Es handelt sich hier nur um eine Übungsaufgabe, bei der wir die Formel für die Krümmung benutzen wollen, obwohl wir diese Formel erst später beweisen werden.

1) Man bestimme die Krümmung der Parabel $y = ax^2$ im Punkte $x = 0$, $y = 0$.

2) Die Biegungslinie eines Balkens, welcher gleichförmig belastet und an den Enden unterstützt ist, lautet:

$$y = \frac{w}{48EJ}(3l^2x^2 - 2x^4)$$

(vergl. Artikel 60), wobei die Abscissenwerte von der Mitte des Balkens aus gemessen sind; l ist die gesamte Länge des Balkens, w die Belastung pro cm Länge; E ist der Elastizitätsmodul des Materials, und J das Trägheitsmoment des Querschnittes. Man nehme beispielsweise: $l = 300$ cm, $w = 5\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$, $E = 120\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$ (Holz), $J = 5625\ \text{cm}^4 \left(\frac{20 \cdot 15^3}{12}\right)$, und suche die Krümmung im Punkte $x = 0$. Man überzeuge sich, daſs in diesem Falle $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ im Vergleich mit 1 vernachlässigt werden kann, und daſs also in der That die Krümmung durch den Quotienten $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ausreichend genau angegeben wird. Man zeige, daſs die Krümmung des oben betrachteten Balkens

$$\frac{1}{r} = \frac{w}{8EJ}(l^2 - 4x^2)$$

ist, und daſs dieser Wert in der Mitte des Balkens am gröſsten wird.

3) Man suche die Krümmung der Kurve $y = a \log x + bx + c$ in dem Punkte $x = x_1$.

71. Druck einer Flüssigkeit auf die Wandungen des Gefäfses.

Aufgabe 1. Es ist zu beweisen, dafs bei einem *konstanten* Flüssigkeitsdrucke von p kg pro qm der *resultierende Gesamtdruck* auf eine ebene Fläche von A qm gleich Ap kg ist und *durch den Schwerpunkt der Fläche geht.*

Aufgabe 2. Der hydrostatische Druck in einer Tiefe von h Metern unter dem Flüssigkeitsspiegel beträgt $w \cdot h \frac{\text{kg}}{\text{qm}}$, wobei w das Gewicht eines Kubikmeters der Flüssigkeit bedeutet. Gesucht sei der gesamte von der Flüssigkeit herrührende Druck auf irgend eine ebene Wandfläche.

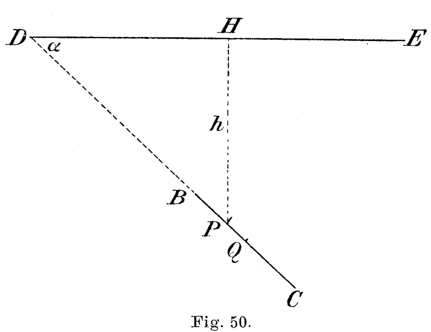


Fig. 50.

Die Linie DE (Fig. 50) stelle die Oberfläche dar, von welcher aus die Tiefe h gemessen wird, und in welcher der Druck gleich 0 ist. BC ist ein Schnitt der Wandfläche. Dieselbe liege senkrecht zur Papierebene, sodafs ihre Ebene den Wasserspiegel DC in der Linie D schneidet; der Winkel CDE werde mit α bezeichnet. Der Abstand $\overline{DP}$ heifse x, sodafs wir folgerichtig $\overline{DQ}$ mit $x + \Delta x$ bezeichnen müssen. Die Breite der Fläche bei P, rechtwinklig zur Papierebene, sei z Meter.

Auf den Flächenstreifen $z \cdot \Delta x$ wird dann ein Gesamtdruck von $z \Delta x \cdot w \cdot h$ kg kommen, wenn h die Länge des Lotes $\overline{PH}$, d. h. die Tiefe des Punktes P (in Metern) bedeutet. Nun ist $h = x \sin \alpha$, sodafs wir den Druck auf das Flächenelement auch in folgender Form schreiben können:

$$w \cdot x \cdot \sin \alpha \cdot z \cdot \Delta x.$$

Der Druck auf die ganze Fläche ergiebt sich dann in kg gemessen zu:

$$(1) \qquad F = w \cdot \sin \alpha \cdot \int_{\overline{DB}}^{\overline{DC}} x \cdot z \cdot dx.$$

Nun haben wir noch den *Angriffspunkt dieses Gesamtdruckes* zu suchen; seine Entfernung von D werde mit X bezeichnet. Wir

stellen die Momentengleichung für D als Drehkante auf und erhalten:

$$(2) \qquad FX = w \sin\alpha \int_{\overline{DB}}^{\overline{DC}} x^2 \cdot z \cdot dx.$$

Nun beachten wir, dafs $\int_{\overline{DB}}^{\overline{DC}} x \cdot z \cdot dx = A\bar{x}$ ist, wenn $\bar{x}$ den Abstand des Schwerpunktes der betrachteten Fläche von D bezeichnet und A der Inhalt jener Fläche ist. Diese Beziehung ergiebt sich aus der Definition des Schwerpunktes in Art. 45. Wenden wir sie auf Gleichung (1) an, so erhalten wir das Gesetz, dafs **der mittlere Druck auf der ganzen Fläche gleich dem Druck im Schwerpunkt der Fläche** ist.

Ferner beachten wir, dafs der in Gleichung (2) enthaltene Ausdruck $\int_{\overline{DB}}^{\overline{DC}} x^2 \cdot z \cdot dx$ gleich J, dem Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Axe D ist. Setzen wir $J = k^2 A$, worin k der Trägheitsradius der Fläche in Bezug auf D genannt wird, so sehen wir, dafs

$$F = w \sin\alpha \cdot A\bar{x}, \qquad FX = w \sin\alpha \cdot Ak^2$$

wird.

Daraus folgt dann:

$$(3) \qquad X = \frac{k^2}{\bar{x}}$$

oder in Worten: **Die Ordinate des Angriffspunktes finden wir, indem wir das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Linie D dividieren durch das statische Moment in Bezug auf dieselbe Linie.**

Beispiel. Es sei $\overline{DB} = 0$ und die Fläche ein Rechteck von der konstanten Breite b; dann ist

$$J = b \int_0^{\overline{DC}} x^2 \cdot dx = \frac{b}{3} \overline{DC}^3,$$

und

$$A = b \cdot \overline{DC},$$

sodafs $k^2 = \frac{1}{3}\overline{DC}^2$ wird. Ferner ist $\bar{x} = \frac{1}{2}\overline{DC}$, folglich $X = \frac{2}{3}\overline{DC}$;

d. h.: Die resultierende Kraft greift bei $\frac{2}{3}$ des Weges DC an und der mittlere Druck ist gleich dem Drucke bei der Hälfte des Weges.

Zwischen diesen Resultaten und einem ganz anderen physikalischen Gesetze besteht eine interessante Analogie. Bezeichnen wir nämlich bei einem *physischen Pendel* mit k den Trägheitsradius, mit $\bar{x}$ den Abstand zwischen Schneide und Schwerpunkt und mit X seine Schwingungslänge, so gilt auch hier die Gleichung (3). Unter Schwingungslänge verstehen wir dabei die Länge eines *synchron* schwingenden *mathematischen* Pendels. — Diese Analogie ist indessen nur als mathematisches Hilfsmittel für das Gedächtnis von Wert; denn aufser der Ähnlichkeit ihrer mathematischen Behandlung haben die beiden Probleme keine Beziehungen zu einander.

72. Rotierende Flüssigkeit. Eine Flüssigkeitsmenge rotiere, gleichwie ein starrer Körper, um eine Axe OO mit der Winkelgeschwindigkeit α; P sei ein Flüssigkeitsteilchen vom Gewichte w Kilogramm; $\overline{OP}$ werde mit x bezeichnet. Die Centrifugalkraft irgend einer Masse in kg ergiebt sich durch Multiplikation der Masse mit dem Quadrat ihrer Winkelgeschwindigkeit und mit dem Bewegungsradius. In diesem Falle ist die Masse gleich $\frac{w}{g}$ und die Centrifugalkraft folglich gleich $\frac{w}{g}\alpha^2 x$.

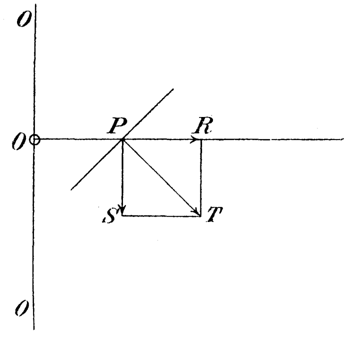


Fig. 51.

Es möge $\overline{PR}$ diesen Wert nach Richtung und Gröfse darstellen, während $\overline{PS}$ das Gewicht des Teilchens im gleichen Mafsstabe bezeichne; dann ist die durch $\overline{PT}$ angedeutete resultierende Kraft leicht zu finden und ebenso der Winkel RPT, den $\overline{PT}$ mit der Horizontalen bildet. Es ist nämlich:

$$\text{tang } RPT = \frac{w}{\frac{w}{g}\cdot\alpha^2 x} = \frac{g}{\alpha^2 x}\cdot$$

Wie man sieht, ist dieser Winkel vollständig *unabhängig von w*; wir können deswegen unsere Resultate auch auf solche Gemische von Flüssigkeiten anwenden, deren einzelne Bestandteile verschiedenes spezifisches Gewicht besitzen.

Es sei y die Höhe des Punktes P über einer gegebenen horizontalen Fläche Nun denken wir uns eine Kurve durch P gelegt, für

welche PT die Tangente in P ist; und zwar soll diese Kurve so laufen, dafs ihre Richtung (d. i. die Richtung ihrer Tangente) nicht nur in P, sondern an *allen ihren Punkten* mit der Richtung der resultierenden Kraft zusammenfällt. Die „Steigung“ dieser Kurve ist dann offenbar $\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{\alpha^2 x}$, und ihre Gleichung wird somit:

$$y = -\frac{g}{\alpha^2} \log x + \text{constans}. \tag{1}$$

Der Wert der Konstanten ist bedingt durch die Lage der horizontalen Fläche, von welcher y gemessen wird. Eine solche Kurve nennen wir eine Kraftlinie; ihre Richtung an irgend einer Stelle giebt die Richtung der an diesem Orte wirkenden Gesamtkraft an. Wir sehen, dafs es eine logarithmische Kurve ist.

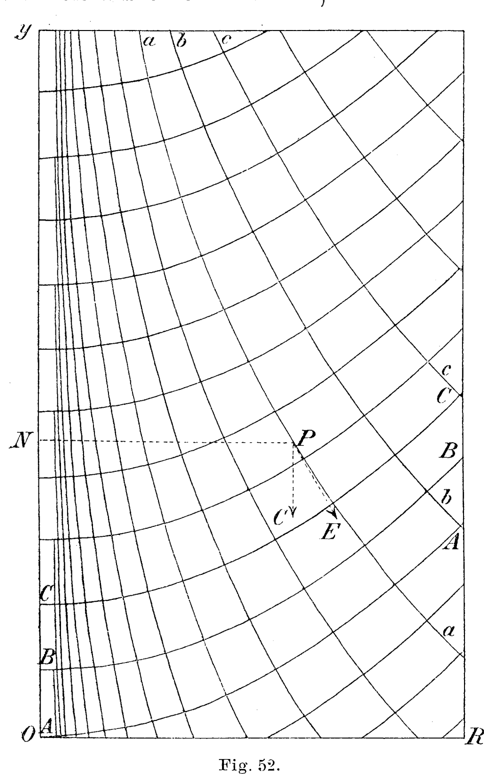


Fig. 52.

Niveauflächen. Wir denken uns nun eine zweite Kurve, zu welcher PT in jedem Punkte P eine Normale bildet. Die „Steigung“ dieser Kurve ist offenbar positiv, nämlich $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha^2}{g} x$, sodafs ihre Gleichung lautet:

$$y = \frac{\alpha^2}{2g} x^2 + \text{constans}; \tag{2}$$

dabei hängt die Konstante davon ab, von welcher Horizontalebene aus wir y messen. Die Kurve ist eine Parabel, und wenn wir sie um ihre Axe rotieren lassen, so erhalten wir ein Rotationsparaboloid. Eine Fläche, welche überall rechtwinkelig zur wirkenden Kraft steht, nennen wir eine *Niveaufläche*; und wir sehen also, dafs die Niveauflächen im vorliegenden Falle Rotationsparaboloide sind.

Die Niveauflächen werden auch zuweilen *Flächen gleichen Potentials* genannt. Es ist nämlich leicht zu beweisen, dafs der Druck auf einer solchen Niveaufläche überall konstant ist, und dafs es eine

Fläche gleicher Dichtigkeit sein mufs. Haben wir z. B. ein Gemisch von Quecksilber, Öl, Wasser und Luft in einem rotierenden Gefäfse, so bilden die Trennungsflächen zwischen den einzelnen Flüssigkeiten stets Rotationsparaboloide.

Der Leser möge eine Kraftlinie konstruieren, und danach eine Schablone aus dünnem Blech ausschneiden, derart, dafs die Linie Oy eine Kante der Schablone bildet. Indem er diese Kante längs der Linie Oy gleiten läfst, kann er beliebig viele Kraftlinien zeichnen. Nun schneide er ebenso eine Schablone für die Parabel aus und zeichne damit eine Reihe von Niveauflächen. Die zwei Kurvenscharen schneiden einander überall rechtwinkelig. Figur 52 zeigt das erhaltene Resultat, wobei aa, bb, cc die logarithmischen Kraftlinien und AA, BB, CC die parabolischen Niveaukurven sind.

73. Allgemeine Bewegung von Flüssigkeiten. Es sei AB ein Flüssigkeitsfaden innerhalb der senkrecht gedachten Papierebene; wir betrachten die Flüssigkeitsmasse zwischen den zwei Querschnitten P und Q, von der Länge Δs Meter in der Richtung der Bewegung und vom Querschnitte a qm, wobei wir a und Δs hernach unendlich klein werden lassen wollen. Der Druck im Punkte P betrage p kg pro qm, die Geschwindigkeit v Meter pro Sekunde; die vertikale Höhe des Punktes P über einer angenommenen Nullebene sei h Meter. Bei Q mögen $p+\Delta p$, $v+\Delta v$, $h+\Delta h$ die entsprechenden Werte sein, das spezifische Gewicht sei w (kg pro cbm). Gesucht werden die Kräfte, welche auf die Masse PQ in der Richtung der Bewegung wirken, d. h. die Kräfte parallel zur Stromrichtung bei PQ

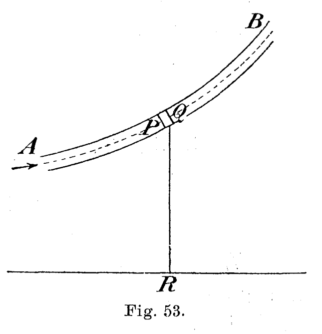


Fig. 53.

Auf der einen Seite, bei P, wirkt die Kraft ap beschleunigend in der Richtung der Bewegung, während auf der anderen Seite, bei Q, die Kraft $a(p+\Delta p)$ kg verzögert. Das Gewicht des Teilchens zwischen P und Q ist $a \cdot \Delta s \cdot w$ Kilogramm; da aber die Schwerkraft mit der Bewegungsrichtung einen Winkel bildet, so ist ihre verzögernde Komponente wie bei einer schiefen Ebene nur:

$$\text{Gewicht} \cdot \frac{\text{Höhe der Ebene}}{\text{Länge der Ebene}} = a \cdot \Delta s \cdot w \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s}.$$

Folglich haben wir insgesamt als beschleunigende Kraft in der Richtung von P nach Q:

$$pa - (p+\Delta p)\,a - a\Delta s \cdot w \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s}.$$

Nun ist $\frac{a \cdot \varDelta s \cdot w}{g}$ die Masse des betrachteten Teilchens, und $\frac{dv}{dt}$ seine Beschleunigung. Wir setzen die treibende Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, d. h. gleich $\frac{a \cdot \varDelta s \cdot w}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$ und erhalten so, indem wir noch durch a dividieren, die Gleichung:

$$-\varDelta p - \varDelta s \cdot w \frac{\varDelta h}{\varDelta s} = \frac{\varDelta s \cdot w}{g} \frac{dv}{dt}.$$

Nun bezeichne $\varDelta t$ die Zeit, welche das Teilchen für den Weg von P nach Q gebraucht; dann ist $v = \frac{\varDelta s}{\varDelta t}$ mit um so gröſserer Genauigkeit, je kleiner $\varDelta s$ genommen wird; ebenso wird der Wert $\frac{\varDelta v}{\varDelta t}$ dann immer mehr und mehr mit der Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ zusammenfallen. (Diese Folgerung sich gründlich klar zu machen, ist für die weiteren Schlüsse wichtiger, als man nach dem ersten Anschein glauben möchte.)

Ist nun $\varDelta s$ sehr klein geworden, so wird

$$\varDelta s \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\varDelta s}{\varDelta t} \cdot \varDelta v = v \cdot \varDelta v,$$

sodaſs wir die Gleichung erhalten:

$$\varDelta p + w \cdot \varDelta h + \frac{w}{g} v \cdot \varDelta v = 0. \tag{1}$$

Wollen wir noch besonders hervorheben, daſs diese Gleichung um so genauer richtig ist, je kleiner $\varDelta s$ wird, so können wir sie auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{dp}{w} + dh + \frac{v}{g} \cdot dv = 0 \tag{2}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$h + \frac{v^2}{2g} + \int \frac{dp}{w} = \text{constans}. \tag{2a}$$

Wir lassen das Integrationszeichen vor dem Quotienten $\frac{dp}{w}$ stehen, weil w veränderlich sein kann. Bei einer Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht konstant ist, vereinfacht sich indessen die Gleichung folgendermaſsen:

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{w} = \text{constans}. \tag{3}$$

Diese Gleichungen lassen sich in allen Fällen anwenden, in denen die Viskosität der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann, und bilden für jeden Wasserbauingenieur eine wichtige Grundlage vieler Berechnungen.

74. Bewegung eines Gases. Bei einem Gase ist, wie wir wissen, das spezifische Gewicht w proportional dem Drucke p, wenn die Temperatur konstant gehalten werden kann; für die adiabatische Zustandsänderung haben wir dagegen das Gesetz: w ist proportional $p^{\frac{1}{\gamma}}$, worin γ den wohlbekannten Quotienten der beiden spezifischen Wärmen bezeichnet. In beiden Fällen ist es leicht, den Wert $\int \frac{dp}{w}$ auszumitteln und also das Bewegungsgesetz niederzuschreiben.

So ist z. B. im Falle der adiabatischen Bewegung: $w = c \cdot p^{\frac{1}{\gamma}}$; das Integral von $\frac{dp}{w}$ wird daher:

$$\int \frac{dp}{w} = \frac{1}{c} \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{1}{c} \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{1-\frac{1}{\gamma}},$$

und folglich haben wir, wenn wir noch s für $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$ einsetzen:

$$h + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{cs} p^s = \text{constans.} \tag{4}$$

Bei vielen Aufgaben ist die Änderung des Niveaus nur geringfügig, und wir können für Gase daher oft das Gesetz:

$$v^2 + \frac{2g}{cs} p^s = \text{constans} \tag{4a}$$

benutzen. Als Beispiel wollen wir die Ausströmung eines Gases aus einem Gefäſse betrachten: Ist p_0 der Druck und w_0 das Gewicht von 1 cbm Gas innerhalb des Gefäſses an denjenigen Stellen, an welchen keine merkbare Bewegung stattfindet, und herrscht auſserhalb der Mündung der Druck p, so wird die Konstante in (4a) offenbar gleich $0 + \frac{2g}{cs} p_0^s$; folglich gilt für die äuſsere Mündung der Ausströmungsöffnung die Gleichung:

$$v^2 = \frac{2g}{cs} (p_0^s - p^s). \tag{5}$$

Nun ist $c = w_0 p^{-\frac{1}{\gamma}}$, und somit können wir leicht die mannigfaltigsten Berechnungen über die Menge des pro Sekunde ausflieſsenden Gases anstellen.

Ist der Druck p nur wenig kleiner als p_0, so können wir die Näherungsformel $(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha n)$ anwenden, welche für kleine Werte von α gilt; dann finden wir:

$$v^2 = \frac{2g}{w_0} (p_0 - p), \tag{6}$$

ein einfaches Gesetz, dessen man sich mit Nutzen bei der Berechnung von Ventilatoren und Windmühlen bedienen kann. Bei einer Aktionsturbine ist die Geschwindigkeit des Radkranzes gleich derjenigen Fallgeschwindigkeit, welche dem *halben* nutzbaren Druck entspricht; ebenso entspricht bei einem Windrad, wenn es sich nicht um grofse Druckunterschiede handelt, die Geschwindigkeit des Radkranzes der halben Druckdifferenz.

Ist z. B. der Druck an der Zuflufsseite einer Luftturbine $p_0 = 30000$ kg pro qm und derjenige an der Abflufsseite $p = 29200$ kg pro qm, und setzen wir das spezifische Gewicht w_0 der Luft bei diesem Drucke gleich 3,6 kg pro kbm, so wird die Umfangsgeschwindigkeit der Ventilatorflügel:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{3,6} \cdot \frac{30000 - 29200}{2}} = 46,7 \text{ Meter pro Sekunde.}$$

Kehren wir nun noch einmal zu der Gleichung (5) zurück! Wir vernachlässigen die Reibung und nehmen an, dafs die austretende Luft so zu der Öffnung vom Querschnitte A qm hingeleitet werde, dafs ihre einzelnen Fäden sämtlich parallel zu einander fliefsen. Es sei Q das pro Sekunde austretende Volumen. Dann ist $Q = vA$, und wenn der Druck an der Austrittsstelle gleich p gesetzt wird, so ist das in der Sekunde austretende Luftgewicht:

$$W = v \cdot A \cdot w$$

oder, da $w = c \cdot p^{\frac{1}{\gamma}}$ und $w_0 = c \cdot p_0^{\frac{1}{\gamma}}$ ist,

$$W = v \cdot A \cdot w_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Setzen wir nun noch den Wert für v aus Gleichung (5) ein und bezeichnen den Quotienten $\frac{p}{p_0}$ mit a, so erhalten wir:

$$W = A a^{\frac{1}{\gamma}} p_0 \sqrt{\frac{2g\gamma}{\gamma - 1} \frac{w_0}{p_0} \left(1 - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \tag{7}$$

Aufgabe. Es soll derjenige Wert für p, d. i. für den Druck aufserhalb des Gefäfses, gefunden werden, für welchen bei einem gegebenen Innendruck das *Gewicht* der sekundlich austretenden Luft ein Maximum wird.

Es ist klar, dafs, wenn wir p immer kleiner und kleiner werden lassen, v, die Geschwindigkeit der austretenden Luft, sich mehr und mehr vergröfsert, und ebenso Q, ihr Volumen. Aber ein hoher Wert von Q bedeutet nicht notwendigerweise eine grofse *Gewichts*menge; jetzt handelt es sich darum, einen möglichst grofsen Wert von W zu erzielen. Die Frage, wann dieses Maximum für W eintritt, fällt zusammen mit der Frage, welcher Wert von a in Gleichung (7) den Ausdruck:

$$a^{\frac{2}{\gamma}}\left(1 - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \quad \text{oder} \quad a^{\frac{2}{\gamma}} - a^{1+\frac{1}{\gamma}}$$

zu einem Maximum werden läfst. Wir differenzieren also nach a und setzen den Differentialquotienten gleich 0:

$$\frac{2}{\gamma} a^{\frac{2}{\gamma}-1} - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) a^{\frac{1}{\gamma}} = 0$$

Wir dividieren nun beiderseits durch $a^{\frac{1}{\gamma}}$ und erhalten:

$$a = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

und damit:

$$p = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

So ist z. B. für Luft $\gamma = 1{,}41$, und wir erhalten also $p = 0{,}527 p_0$, d. h.: die sekundlich aus dem Gefäfse austretende Gewichtsmenge Luft wird am gröfsten, wenn der Aufsendruck reichlich halb so grofs wie der Innendruck ist.

Aufgabe. Es werde p immer mehr und mehr verringert und schliefslich verschwindend klein; wie ändert sich dann v? Antwort:

$$v = \sqrt{\frac{2g\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{w_0}}.$$

Diese Geschwindigkeit ist gröfser als die des Schalles; das Verhältnis beider beträgt nämlich $\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$, und also für Luft: 2,21.

Die höchste erreichbare Geschwindigkeit, welche bei Ausströmen der Luft in ein Vacuum eintritt, beträgt demnach $2{,}21 \cdot \sqrt{g\gamma \cdot \frac{p_0}{w_0} \frac{T}{273}} = 2{,}21 \cdot 331{,}7 \sqrt{\frac{T}{273}}$ $= 733 \sqrt{\frac{T}{273}}$ Meter pro Sekunde. Darin bezeichnet T die absolute Temperatur innerhalb des Gefäfses.

Zur Übung empfehlen wir, in ähnlicher Weise nun auch die Geschwindigkeit bei Austritt der Luft in die freie Atmosphäre zu berechnen. Bei diesen Berechnungen haben wir angenommen, dafs in den Gleichungen (2) und (4) der Wert h, als unwesentlich, vernachlässigt werden könne. Bei vielen Problemen über die Bewegung von Gasen, wie sie dem praktischen Ingenieur begegnen, trifft das zu; bei manchen physikalischen Berechnungen mufs jedoch die Niveauänderung in Betracht gezogen werden. Auf derartige Aufgaben werden wir im Kapitel II zurückkommen.

75. Übungsbeispiele. Wir könnten hier eine grofse Anzahl interessanter Aufgaben über die Anwendung der Gleichung (2) einfügen. Sie setzt uns in den Stand, den Ausflufs von Flüssigkeiten aus Öffnungen zu berechnen, erklärt uns die Wirkungsweise von Strahlpumpen, die Anziehung leichter Körper durch die schwingenden Zinken einer Stimmgabel; sie zeigt uns, weshalb manche Ventile in Wahrheit stärker gegen ihren Sitz gesaugt werden, anstatt durch den austretenden Flüssigkeitsstrom abgedrückt zu werden, und erklärt uns manche andere Erscheinungen, welche uns auf den ersten Blick in grofses Erstaunen zu setzen pflegen.

Beispiel 1. In einem flachen, runden Gefäfse befinde sich Wasser, dessen einzelne Teilchen mit sehr geringer Geschwindigkeit einem Loche in der Mitte des Bodens zufliefsen. Die Wasserteilchen

mögen sich in einer nahezu kreisförmigen Bewegung befinden, und zwar sei die Geschwindigkeit v derselben überall umgekehrt proportional dem jeweiligen Abstande von der Mitte. Wir setzen $v = \frac{a}{x}$, wobei a irgend eine Konstante und x der Radius der kreisförmigen Bahn, d. h. der Abstand von der Axe ist. Dann lautet die Gleichung (3) (Art. 73) folgendermafsen:

$$h + \frac{a^2}{2\,g x^2} + \frac{p}{w} = C.$$

Nun ist an der Oberfläche des Wassers p konstant, da hier der atmosphärische Druck herrscht, sodafs dort gilt:

$$h = c - \frac{a^2}{2\,g x^2}.$$

Diese Gleichung giebt uns die Gestalt der gekrümmten Wasseroberfläche. Nehmen wir für c und a irgend welche spezielle Werte an, so ist es ein leichtes, h für jeden beliebigen Wert von x zu berechnen und danach die Kurve zu zeichnen. Durch Drehung dieser Kurve um die Axe erhalten wir eine Rotationsfläche, welche die Wasseroberfläche darstellt.

Beispiel 2. Das Wasser fliefse in einer horizontalen Ebene spiralförmig nach dem Gesetz: $v = \frac{b}{x}$, wobei x den Abstand von einem festen Zentralpunkte bezeichnet. Es soll bewiesen werden, dafs dann die folgende Gleichung besteht:

$$p = C_1 - \tfrac{1}{2}\frac{w}{g}\frac{b^2}{x^2}.$$

Zu dem Zwecke untersuchen wir zunächst, wie sich p und v in der Richtung rechtwinklig zu den Stromfäden ändern. Wir brauchen nur die Gleichgewichtsbedingung für ein kleines Teilchen der Flüssigkeit, PQ (Figur 53, pg. 145) zu betrachten, auf welches in der Richtung senkrecht zur Bewegung der Druck p, die Zentrifugalkraft und sein Eigengewicht einwirken.

Bezeichnen wir noch mit $\frac{dp}{dr}$ die Änderung von p in der Richtung des Krümmungsradius und gerechnet vom Krümmungsmittelpunkt aus, und bezeichnen wir den $\sphericalangle\, QPR$ in Figur 53 durch α, so erhalten wir bei einer Bewegung der Wasserfäden in vertikaler Ebene die Gleichung:

(1) $$\frac{dp}{dr} = \frac{w}{g}\frac{v^2}{r} - w \sin\alpha.$$



Bei Bewegung in horizontaler Ebene fällt das letzte Glied fort, sodafs wir erhalten:

(2) $$\frac{dp}{dr} = \frac{w}{g}\frac{v^2}{r}.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Richtigkeit der vorhin aufgestellten Behauptung ohne weiteres.

Beispiel 3. Sämtliche Bewegungskurven seien Kreise innerhalb einer horizontalen Ebene, sodafs also h konstant ist. Für $v = \frac{b}{r}$, worin b eine Konstante ist, wird: $\frac{dp}{dr} = \frac{w}{g}\frac{b^2}{r^3}$ und folglich:

(3) $$p = -\tfrac{1}{2}\frac{w}{g}\frac{b^2}{r^2} + \text{constans}.$$

Wir sehen also, dafs der Spannungsabfall von innen nach aufsen genau derselbe ist wie bei dem vorigen Beispiel. Man beweise, dafs dieses Gesetz $v = \frac{b}{r}$ in Wirklichkeit zutreffen mufs, wenn die Bewegung der Flüssigkeit wirbelfrei, d. h. ohne „Quirl“ erfolgt (siehe Beispiel 5).

Beispiel 4. Die Flüssigkeit rotiere um eine Axe, als wenn sie ein starrer Körper wäre, sodafs $v = br$ ist; dann ist:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{w}{g}b^2 r,$$

$$p = \tfrac{1}{2}\frac{w}{g}b^2 r^2 + c.$$

Diese Gleichung zeigt uns die Zunahme des Druckes innerhalb des Schaufelrades einer Zentrifugalpumpe, die bei geschlossenen Ein- und Auslafsventilen läuft, aber mit Wasser gefüllt ist.

Aufgabe. Der Druck auf der Innenseite des Flügelrades einer Zentrifugalpumpe betrage 10300 $\frac{\text{kg}}{\text{qm}}$; der innere Radius sei 0,15 m, der äufsere Radius 0,3 m; die Winkelgeschwindigkeit des Rades sei $b = 30$ (c. g. s). Man berechne und zeichne nun eine Kurve, welche die Beziehung zwischen p und r von der Innenseite des Rades bis zur Aufsenseite für den Fall angiebt, dafs die Pumpe nur sehr wenig Wasser liefert. Die Saugöffnung der Pumpe soll dabei frei, die Drucköffnung fast vollständig geschlossen sein.

Jetzt gebe man die Drucköffnung frei; dann verläfst das Wasser das Rad auf spiralförmigen Linien, sodafs die Geschwindigkeit überall umgekehrt proportional r ist. Auch für diesen Fall möge man die

Kurve zeichnen, welche das Gesetz für p im Druckraum als Funktion von r angiebt.

Beispiel 5. Den Ausdruck

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{w} p + h = E,$$

welcher nach der Schluſsformel von Art. 73 längs jedes einzelnen Stromfadens konstant bleibt, sobald der Beharrungszustand eingetreten ist, wollen wir als die Gesamtenergie eines kg Wassers in dem betreffenden Stromfaden bezeichnen.

Nun ist

$$\frac{dE}{dr} = \frac{1}{g} v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{w} \frac{dp}{dr} + \frac{dh}{dr}.$$

Daraus wird aber durch Anwendung von Gleichung (1):

$$\frac{dE}{dr} = \frac{2v}{g} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr}\right).$$

Den Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr}\right)$ nennen wir die mittlere Winkelgeschwindigkeit (engl. „spin") oder den halben „**Quirl**" der Flüssigkeit. Demnach ist also:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{v}{g} \cdot \text{Quirl}.$$

Aus einem groſsen Gefäſse möge durch eine kleine Öffnung Wasser ausflieſsen. Dürfen wir nun annehmen, daſs in einiger Entfernung von der Öffnung sich die Flüssigkeit (nahezu) in Ruhe befindet, so hat offenbar E in allen Stromfäden den gleichen Wert. $\frac{dE}{dr}$ ist dann gleich 0, und ein Quirl ist also nirgends vorhanden.

Bei dem Ausflieſsen des Wassers aus der Öffnung wollen wir nun annehmen, daſs es einen Querschnitt giebt, in dem die Bewegung überall senkrecht zur Schnittfläche erfolgt und in dem der Druck überall gleich groſs ist. In diesem Falle können wir die Ausfluſsmenge berechnen. Wir müssen allerdings gestehen, daſs dies willkürliche Voraussetzungen sind, die dem wirklichen Vorgange keineswegs immer entsprechen; indessen, so unsicher die Annahmen auch sein mögen, so haben wir doch kein Bedenken, sie hier zu benutzen, wo es sich lediglich um Integrationsübungen handelt. —

Auf der ruhigen Wasseroberfläche möge also atmosphärischer Druck herrschen; ferner sei v die Geschwindigkeit in der Tiefe h und a ein Flächenelement des Austrittsquerschnittes. Dann ist die

pro Sekunde austretende Wassermenge: $Q = \Sigma a \sqrt{2gh}$; die Summation ist über die ganze Querschnittsfläche auszudehnen, wenn wir die gesamte Wassermenge erhalten wollen.

Z. B. sei der Querschnitt der Öffnung eine vertikale Ebene und habe in der Tiefe h eine horizontale Breite z; dann flieſst durch die Fläche $z \cdot \Delta h$ das Wasser mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, sodaſs $\sqrt{2gh} \cdot z\Delta h$ das durch die betrachtete Fläche pro Sekunde ausflieſsende Wasserquantum ist. Nun sei h_1 die Tiefe des höchsten und h_2 die des tiefsten Punktes der Mündung; dann ist die gesamte pro Sekunde ausflieſsende Wassermenge:

$$Q = \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} z h^{\frac{1}{2}} \cdot dh.$$

Beispiel 6. Der Querschnitt der Öffnung sei ein Rechteck von einer horizontalen Breite b. Dann ist:

$$Q = \sqrt{2g}\, b \int_{h_1}^{h_2} h^{\frac{1}{2}} \cdot dh = \tfrac{2}{3} b \sqrt{2g} \Big[h^{\frac{3}{2}}\Big]_{h_1}^{h_2} = \tfrac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

Beispiel 7. Die Ausfluſsöffnung sei ein Dreieck mit horizontaler Basis b. Die letztere liege h_2 Meter, die Spitze h_1 Meter unterhalb des Wasserspiegels.

Hier gilt innerhalb der Integrationsgrenzen:

$$z = \frac{b}{h_2 - h_1}(-h_1 + h)$$

und daraus folgt dann:

$$Q = \frac{b\sqrt{2g}}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \left(-h_1 h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}\right) dh = \frac{b\sqrt{2g}}{h_2 - h_1} \Big[\left(-\tfrac{2}{3} h_1 h^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{5} h^{\frac{5}{2}}\right)\Big]_{h_1}^{h_2}.$$

Setzen wir noch für den Quotienten $\frac{h_2}{h_1}$ den Buchstaben r ein, so erhalten wir:

$$Q = \frac{b h_1^{\frac{3}{2}}}{r-1} \frac{\sqrt{2g}}{15} \left\{6 r^{\frac{5}{2}} - 10 r^{\frac{3}{2}} + 4\right\}.$$

Wenn der Leser sich erst die Integrationsmethoden des dritten Kapitels angeeignet hat, so kann er in derselben Weise die theoretische Ausfluſsmenge durch kreisförmige, elliptische und andere Querschnitte bestimmen.

Wir kehren nun zum rechteckigen Querschnitt zurück und nehmen den Fall an, daſs $h_1 = 0$ wird (Überfall); genau genommen ist er

zwar praktisch nicht möglich, aber als mathematische Übungsaufgabe können wir ihn hier zulassen. In diesem Falle ist $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}$.

Wir nehmen weiter an, dafs die rechteckige Ausflufsöffnung durch eine Kerbe in der Wandung mit sorgfältig zugeschärften Kanten gebildet wird. Die wirklich austretende Wassermenge ist dann nur ein Bruchteil der eben berechneten Menge Q. Um dieser Thatsache Ausdruck zu geben, führen wir den sogenannten Kontraktionskoeffizienten c ein und erhalten für den fraglichen Fall:

$$Q = c \cdot \frac{2}{3} b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}.$$

Das ist die sogenannte Theorie für den Ausflufs durch einen rechteckigen scharfkantigen Überfall. Eine wirkliche Theorie wurde von Prof. James Thomson aufgebaut auf seinem Gesetze über das Strömen durch geometrisch ähnliche Öffnungen. Dies ist eines der wenigen Gesetze, welche der Ingenieur brauchen kann. Leider müssen wir gestehen, dafs fast bei allen mathematischen Gesetzen, welche über hydraulische Probleme aufgestellt sind, das theoretisch Abgeleitete mit der Wirklichkeit nur durch Einführung von Erfahrungskoeffizienten in Einklang zu bringen ist.

76. Die elektromagnetischen Grundgesetze.

Zwei Fundamentalgesetze beherrschen die gesamte Elektrizitätslehre. Dieselben betreffen den elektrischen Stromkreis und die magnetischen Kraftlinien. Beide bilden stets in sich geschlossene Kurven, die mit einander wie die Glieder einer Kette verschlungen sind.

I. Das erste der beiden Gesetze lautet: **Das Linienintegral der von einem elektrischen Strome erzeugten magnetischen Kraft längs irgend einer geschlossenen Kurve*) ist gleich der Stromstärke**, multipliziert mit 4π, wenn der Strom in sogenannten c.g.s.-Einheiten ausgedrückt wird, oder multipliziert mit $\frac{4\pi}{10}$, wenn der Strom in der gewöhnlichen Einheit, in Ampère, gemessen wird.

II. Das zweite Gesetz heifst: **Das Linienintegral der elektromotorischen Kraft längs einer geschlossenen Kurve**) ist gleich dem magnetischen „Flusse"**, d. i. gleich der zeitlichen Geschwindigkeit, mit der sich die Zahl der umschlossenen Kraftlinien ändert. Ist die magnetische Induktion in absoluten (c.g.s.)-Einheiten gegeben, so

*) Ein solches Linienintegral wird in England zu Ehren von Gaufs als „*Gaussage*" bezeichnet,

**) Dieses Linienintegral benennt man in England zu Ehren von Volta als „*Voltage*".



erhalten wir auch die Spannung in c.g.s.-Einheiten; wird dagegen die Induktion in Weber*) gemessen, so erhalten wir die Spannung in Volt.

Wir müssen uns jetzt daran erinnern, dafs eine elektromotorische Kraft **in einem nicht leitenden Medium** dielektrische Polarisation erzeugt. Ändert sich nun die elektromotorische Kraft mit der Zeit, so entsteht dadurch auch eine Änderung der Polarisation und damit ein „*Verschiebungsstrom*", welcher der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der elektrischen Kraft proportional ist. Diese Verschiebungsströme haben dieselben magnetischen Eigenschaften wie Ströme in Leitern, und wir können daher hier mit ihnen genau so wie mit Leiterströmen rechnen.

Fassen wir immer nur ein sehr kleines Flächenstückchen ins Auge, so bezeichnen wir die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit der dielektrischen bez. der magnetischen Kraft als die „*Schwellung*" derselben. Das einzelne der oben genannten Linienintegrale bezeichnen wir in diesem Falle als „*Quirl*".**)

Lassen wir den schleppenden Faktor 4π bez. $\frac{4\pi}{10}$ fort, so erhalten wir für die beiden Grundgesetze der Elektrizitätslehre in Bezug auf ein **nichtleitendes Medium** die folgende kurze Fassung:

„Die Schwellung der elektrischen Kraft ist gleich dem Quirl der magnetischen."

„Die Schwellung der magnetischen Kraft ist gleich dem negativ genommenen Quirl der elektrischen."

Indem wir diese beiden Sätze in mathematischer Formelsprache niederschreiben, erhalten wir die beiden Fundamentalgleichungen der Maxwellschen Theorie***).

Der Elekrotechniker benutzt beide Gesetze fortwährend. Wir wollen uns die Anwendung des zweiten Gesetzes für später aufsparen

---

*) Für die Gesamtzahl der durch eine Fläche tretenden Kraftlinien hat man in Deutschland keine besonders benannte Einheit. In England benutzt man dem deutschen Physiker zu Ehren die Einheit „*Weber*"; und zwar ist 1 Weber gleich 10^8 c.g.s.-Einheiten, d. i. gleich 10^8 Kraftlinien.

**) Wir sind hier der Terminologie gefolgt, welche H. Ebert in seinem Buche „*Die Theorie des Elektromagnetismus*" (Handbuch der Elektrotechnik von C. Heinke, 1. Bd., 3. Abteil., Leipzig, Hirzel, 1900) nach dem Vorgange von Wiechert benutzt. Die englische, von Maxwell eingeführte, auch in Deutschland vielfach gebrauchte Benennung für „Quirl" ist „*curl*". Aufserdem finden sich die Bezeichnungen rot. (rotation) und vort. (vortex).

***) Eine ausführliche, sehr klare Darlegung dieser Verhältnisse findet sich in dem eben genannten Buche von Ebert. Dafs das Minuszeichen dort bei dem *ersten* Gesetze erscheint, liegt an der Wahl eines anderen (rechtswendigen) Koordinatensystems.

und hier nur ein leichtes Beispiel für die Benutzung des ersten folgen lassen.

Magnetisches Feld eines geraden Leiters. Ein gerader Draht mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmeser $2a$ cm führe einen Strom von der absoluten Stärke C (oder A Amp.; sodafs $C = \frac{A}{10}$ ist).

Ist H die magnetische Feldstärke in einem Abstande r cm von der Mittellinie des Drahtes, so ist $H \cdot 2\pi r$ ihr Linienintegral längs des Kreises vom Radius r, da H offenbar aus Gründen der Symmetrie auf dem ganzen Kreise gleich grofs sein mufs. Daraus folgt aber, weil ja das Linienintegral nach unserem Gesetze gleich $4\pi C$ ist:

$$H = \frac{4\pi C}{2\pi r} = \frac{2C}{r} = \frac{2}{r}\frac{A}{10}.$$

Um H für einen Punkt innerhalb des Drahtes zu bestimmen, müssen wir beachten, dafs jetzt der Kreis vom Radius r nur einen Strom von der Stärke $\frac{r^2}{a^2}C$ einschliefst. Innerhalb des Drahtes, in einem Abstande r von der Axe, ist daher:

$$H = \frac{2rC}{a^2} = \frac{2r}{10}\frac{A}{a^2}.$$

Es sei BC ein Querschnitt des Drahtes vom Durchmesser $2a$, und OD eine durch die Drahtaxe O gelegte Ebene (cf. Figur 54).

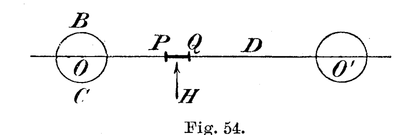


Fig. 54.

Ferner wollen wir $\widehat{OP}$ mit r und $\widehat{OQ}$ mit $r + \varDelta r$ bezeichnen. Dann hat der Flächenstreifen PQ, welcher l cm Länge rechtwinklig zur Papierebene und $\varDelta r$ cm Breite, also eine Fläche von $l \cdot \varDelta r$ qcm besitzt, eine Induktion von H Kraftlinien pro qcm. (Wir nehmen die Permeabilität des Mediums gleich 1 an; ist dagegen μ die magnetische Permeabilität des Stoffes, so wird die Induktion $B = \mu H$ Kraftlinien pro qcm.) $H \cdot l \cdot \varDelta r$ ist also die Gesamtzahl der Kraftlinien auf dem ganzen in Frage kommenden Flächenstreifen.

Haben wir zwei parallele Drähte, welche entgegengesetzt gerichtete Ströme führen, und ist OD die durch die Axen beider Drähte gelegte Ebene (cf. Figur 54), so addieren sich die von den beiden Strömen herrührenden Felder zu einander. Ist O' die Mittellinie des anderen Drahtes, so ist die gesamte Feldstärke H im Punkte P gleich:

$$2C\left(\frac{1}{OP} + \frac{1}{O'P}\right).$$

77. Selbstinduktion von zwei parallelen Drähten. Der Durchmesser eines jeden Drahtes sei $2a$, und der Abstand zwischen ihren Mittellinien betrage b cm. Die Länge eines jeden Drahtes sei l cm und werde begrenzt durch *dieselben* zwei Ebenen, welche beide rechtwinkelig zu den Drähten stehen. Wir nehmen an, dafs beide Drähte Teile von zwei unendlich langen Drähten sind, damit wir die Schwierigkeiten aufser Acht lassen können, welche die Berücksichtigung der nicht mehr parallelen Schlufsstücke des Stromkreises mit sich bringt.

Die gesamte Induktion von Axe zu Axe setzt sich aus zwei einzelnen Beträgen zusammen: $4l\int_a^b \frac{C \cdot dr}{r}$ ist der Betrag von der Aufsenseite eines jeden Drahtes bis zur Axe des anderen, und $4l\int_0^a \frac{r\,C \cdot dr}{a^2}$ derjenige von der Axe eines jeden Drahtes bis zu seiner eigenen Oberfläche. Nach Berechnung der Integrale erhalten wir:

$$2lC\left\{2\log\frac{b}{a}+1\right\} = \frac{2lA}{10}\left\{2\log\frac{b}{a}+1\right\}$$

als die gesamte Induktion in absoluten Einheiten.

Lassen wir nun die Stromstärke $= 1$ werden, so ist die entstehende gesamte Kraftlinienzahl gleichbedeutend mit L, dem Selbstinduktionskoeffizienten der Schleife. Dann erhalten wir also als Selbstinduktion pro Längeneinheit:

$$\frac{L}{l} = 2\left\{\log\frac{b^2}{a^2}+1\right\} \text{ in c.g.s.-Einheiten}$$

oder

$$\frac{L}{l} = \frac{2}{10^9}\left\{\log\frac{b^2}{a^2}+1\right\}$$

Henries*) pro cm Länge der beiden Drähte.

78. Funktionen von zwei unabhängigen veränderlichen Gröfsen. Bislang haben wir nur erst Funktionen einer einzigen Variabelen, die wir für gewöhnlich x nannten, untersucht. Will man irgend ein Naturgesetz in Erfahrung bringen, so bestrebt man sich, zunächst

*) Man beachte, dafs ein Henry gleich 10^9 absoluten Einheiten der Selbstinduktion ist, und dafs unsere in der Praxis gebräuchliche Einheit für die Kraftlinienzahl („Weber" genannt) das 10^8fache der absoluten Induktionseinheit ist. Die Beziehung dieser Gröfsen zu den übrigen uns bekannten Einheiten ist demnach durch die folgenden beiden Formeln gegeben:

nur eine der bestimmenden Gröſsen zu einer Veränderlichen zu machen. So beginnt man bei der Untersuchung der Gase damit, bei festgehaltener Temperatur das Volumen v allein variabel anzunehmen, und findet, daſs der Druck p mit v^{-1} proportional ist. Alsdann hält man v fest und läſst die Temperatur variieren; es zeigt sich, daſs p proportional zur absoluten Temperatur t ist (wo t gleich der in Celsiusgraden gemessenen Temperatur $+ 273$ ist). Durch zahlreiche Versuche findet man, daſs für 1 kg eines bestimmten Gases das Gesetz $pv = Rt$ sehr nahe richtig ist, wo R eine bekannte Konstante bezeichnet.

Nun aber beachte man, daſs jede dieser drei Gröſsen p, v, t eine Funktion der beiden anderen ist; in der That können wir zweien unter ihnen **irgend welche Werte** geben, worauf alsdann die dritte Gröſse einen eindeutig bestimmten zugehörigen Wert besitzt. So folgt z. B.:

$$p = R\frac{t}{v}, \tag{1}$$

sodaſs wir p als Funktion der beiden *unabhängigen* Variabelen t und v anzusehen haben.

Für irgend zwei spezielle Werte t und v berechne man p aus (1). Man setze sodann die abgeänderten Werte $t + \varDelta t$ und $v + \varDelta v$ ein, wo $\varDelta t$ und $\varDelta v$ vollständig unabhängig von einander wählbar sind; man findet als abgeänderten Wert $p + \varDelta p$ und als Abänderung $\varDelta p$:

$$p + \varDelta p = R\frac{t + \varDelta t}{v + \varDelta v}, \quad \varDelta p = R\frac{t + \varDelta t}{v + \varDelta v} - R\frac{t}{v}.$$

Wir sehen hieraus, daſs die Änderung $\varDelta p$ berechnet werden kann, wenn neben t und v die Änderungen $\varDelta t$ und $\varDelta v$ bekannt sind.

Nehmen die Zuwüchse $\varDelta t$ und $\varDelta v$ ohne Ende ab, so wird auch $\varDelta p$ unendlich klein. Es giebt alsdann eine sehr einfache Regel, um

---

Für die Rechnung mit Henries gilt: $\text{Volt} = RA + L\frac{dA}{dt}$,

für die Rechnung mit Weber gilt: $\text{Volt} = RA + N\frac{dI}{dt}$.

In beiden Fällen ist R in Ohm, A in Ampère, L in Henries, I in Weber auszudrücken, während N die Windungszahl der Spule bedeutet.

Bei elementaren Rechnungen, um die es sich in diesem Buche allein handelt, lassen wir uns die Benutzung des Koeffizienten 4π und die Schwierigkeiten, welche durch die Einführung des jetzt gebräuchlichen unwissenschaftlichen Systems von Einheiten entstehen, noch gefallen. Bei allen wissenschaftlicheren Arbeiten ist jedoch das Rechnen mit den absoluten Einheiten unbedingt vorzuziehen, und es ist zu wünschen, daſs sie allmählich überhaupt allgemein in Gebrauch kommen.



den unendlich kleinen Zuwachs dp aus dt und dv zu berechnen; diese Regel ist enthalten in der Formel*):

$$(2) \qquad dp = \frac{\partial p}{\partial t}\, dt + \frac{\partial p}{\partial v}\, dv.$$

Die Richtigkeit dieser Regel soll sogleich bewiesen werden (Art. 81); vorab wolle sich jedoch der Leser mit der Bedeutung der Formel (2) vertraut machen. Er fasse die Formel in Worte und vergleiche seine Fassung mit der folgenden: „Die gesamte Änderung von p ist aus zwei Teilen zusammengesetzt: erstlich der Änderung, welche p erfährt, wenn bei konstantem v die Temperatur t um dt wächst; zweitens der Änderung, welche eintritt, wenn bei konstantem t das Volumen v um dv zunimmt." Die erste dieser Änderungen ist gleich dem Produkte von dt und dem Zuwachsverhältnis (Differentialquotienten) von p in Bezug auf t bei konstantem v, ein Produkt, welches wir oben $\frac{\partial p}{\partial t} dt$ geschrieben haben; entsprechend ist die zweite Änderung gleich dem Produkte von dv und dem Differentialquotienten von p in Bezug auf v bei konstantem t.

Die entwickelte Vorschrift zur Berechnung der totalen Abänderung dp ist dem Praktiker äufserst vertraut. Nur ist derselbe meist mit der mathematischen Form der fraglichen Regel nicht vertraut. Ein Leser, welcher sich bemüht die Sache zu verstehen, wird selbst zahlreiche ganz einfache Beispiele zur Erläuterung der Regel (2) finden.

Für 1 kg eines Gases sei der Zustand durch bestimmte Werte von p, v und t angegeben. Tritt jetzt eine Zustandsänderung ein, so ist dieselbe vollständig festgelegt, falls man die Abänderungen zweier unter jenen drei Gröfsen angiebt, also etwa die Änderungen dp und dv oder dv und dt oder dp und dt; denn wir nehmen die charakteristische Relation (1) für das vorliegende Gas als bekannt an.

Wird eine kleine Zustandsänderung des Gases durch Zuführung der Wärmemenge $\varDelta Q$ bewirkt, so kann man diese Menge $\varDelta Q$ aus irgend zweien unter den drei Änderungen $\varDelta v$, $\varDelta t$, $\varDelta p$ berechnen; und alle auf diese Weise für $\varDelta Q$ entspringenden Ausdrücke müssen gleichen Wert haben. Soll es sich hier um aufserordentlich kleine Änderungen handeln, werden wir diese Ausdrücke in die Gestalt kleiden können:

$$(3) \qquad \begin{cases} dQ = c_v \cdot dt + l \cdot dv, \\ dQ = c_p \cdot dt + L \cdot dp, \\ dQ = P \cdot dp + V \cdot dv, \end{cases}$$

wo c_v, l, c_p, L, P, V gewisse Funktionen des Anfangszustandes sind, d. i. Funktionen irgend zweier unter den drei Werten p, v, t vor Zuführung der Wärme-

*) Die Schreibweise $\frac{\partial p}{\partial t}$ an Stelle der bisherigen $\frac{dp}{dt}$ haben wir bereits in Art. 30 für den „*partiellen*" *Differentialquotienten* von p in Bezug auf t in Benutzung genommen.

menge. Man beachte, dafs hier $c_v \cdot dt$ die Wärmemenge ist, welche zur Abänderung der Temperatur um dt bei konstantem Volumen v erforderlich ist; in diesem Sinne nennt man c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Entsprechend ist c_p die spezifische Wärme bei konstantem Drucke. Was l und L angeht, so wird man sie etwa als gewisse Arten latenter Wärme ansehen, insofern sich diese Gröfsen auf konstante Temperatur beziehen.

Die Koeffizienten $c_v, l, \cdots$ sind, wie wir sehen, im allgemeinen nicht als Konstanten anzusehen, sondern vielmehr als Funktionen des Anfangszustandes des Gases. Kann man aber überhaupt dQ aus dt und dv berechnen, so wird man sich die Berechtigung des Ansatzes $dQ = c_v \cdot dt + l \cdot dv$ durch eine mathematische Überlegung etwa so plausibel machen können: Man wird von der Annahme ausgehen dürfen, dafs dQ in Gestalt einer Potenzreihe:

$$dQ = c_v dt + l dv + a(dt)^2 + b(dv)^2 + c(dv \cdot dt) + \cdots$$

darstellbar ist, wo die fortgelassenen Glieder vom dritten und höheren Grade sind und sämtliche Koeffizienten $c_v, l, a, b, c, \cdots$ vom Anfangszustande abhängen. Werden nun wirklich dt und dv unendlich klein von erster Ordnung, so dürfen alle weiter folgenden Glieder $a(dt)^2, \cdots$ neben den beiden ersten als unendlich klein von höherer Ordnung vernachlässigt werden; und also kommen wir auf die zu zeigende Gleichung $dQ = c_v \cdot dt + l \cdot dv$ zurück.

Erläuterung. Man spezialisiere die Formel (1) für *ein Kilogramm atmosphärische Luft.* Dann ist $R = 29{,}3$; die Einheit des Druckes p ist der Druck eines Kilogramms auf die Fläche eines Quadratmeters, und v ist gemessen in cbm.

Es gelten die Gleichungen:

$$p = 29{,}3\frac{t}{v}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{29{,}3}{v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{29{,}3\,t}{v^2} = -\frac{p}{v}.$$

Somit folgt aus (2):

$$\Delta p = \frac{29{,}3}{v}\Delta t - \frac{p}{v}\Delta v. \tag{4}$$

Beispiel. Man setze als speziellen Fall:

$$t = 300, \quad p = 10000, \quad v = 0{,}879.$$

Wächst jetzt t auf 301 und v auf 0,889, so findet man leicht, dafs p auf 9920,47 abnimmt. Wir wünschen jedoch die Druckänderung aus (2) oder sogleich aus Formel (4) zu berechnen. Hier hat man:

$$\Delta p = \frac{29{,}3}{0{,}879} \cdot 1 - \frac{10\,000}{0{,}879} \cdot 0{,}01 = -80{,}43 \text{ kg pro qm},$$

ein Wert, der jedoch von dem genauen Betrage noch um $0{,}9\,\frac{\text{kg}}{\text{qm}}$ abweicht.

Man setze jetzt $\Delta t = 0{,}1$ und $\Delta v = 0{,}001$ und prüfe die Regel aufs neue. Sodann wähle man $\Delta t = 0{,}01$ und $\Delta y = 0{,}0001$ oder ein

anderes Paar sehr kleiner Zuwüchse. Auf diese Weise gelangt der Lernende zur Kenntnis der eigentlichen Bedeutung der Regel (1). Genau richtig ist dieselbe erst für unendlich kleine Änderungen dt, dv.

An die vorstehende Entwickelung knüpfen wir noch folgende wichtige Betrachtung an: Man trage $dp = 0$ in Formel (2) ein. Wir gewinnen alsdann eine Relation zwischen dt und dv, *wobei sich diese Abänderungen dt, dv auf konstant erhaltenen Druck beziehen.* Man teile den einen dieser Zuwüchse, etwa dv, durch den anderen dt; für den Quotienten $\frac{dv}{dt}$ bei konstantem p erhalten wir auf diese Weise:

(5) $$\frac{dv}{dt} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}.$$

Auf den ersten Blick wird vielleicht das Minuszeichen auf der rechten Seite dieser Gleichung den Leser überraschen und zum Nachdenken anregen; er wird alsdann gut thun, sich die Formel (5) noch weiter zu erläutern. Aus $pv = Rt$ folgt z. B. zunächst für konstant gedachtes p:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R}{p}.$$

Andrerseits gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{R}{v}, \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{Rt}{v^2} = -\frac{p}{v},$$

und also läuft die Relation (5) auf die identische Gleichung hinaus:

$$\frac{R}{p} = -\frac{\left(\frac{R}{v}\right)}{\left(-\frac{p}{v}\right)}.$$

Das Beispiel eines Gases, für welches die Regel $pv = Rt$ gilt, hat sich hier als ganz besonders vorteilhaft erwiesen, um die Formeln für die Differentiationen bei mehreren unabhängigen Variabeln zu erläutern*).

79. Weitere Erläuterungen. In den Formeln (3) kommen wir zu dem gleichen Betrage dQ, mögen wir denselben durch dt und dv oder durch dt und dp oder endlich durch dp und dv ausdrücken. Daraus ergiebt sich z. B.:

(6) $$c_v dt + l dv = c_p dt + L dp.$$

Tragen wir hier rechts den in (2) gegebenen Ausdruck für dp ein, so folgt:

$$c_v dt + l dv = c_p dt + L\frac{\partial p}{\partial t} dt + L\frac{\partial p}{\partial v} dv.$$

*) Für den Anfänger kann diese Stelle als Schluſs des Kapitels I betrachtet werden.

Diese Gleichung ist richtig für unabhängig von einander wählbare Änderungen dt und dv. Setzen wir demnach erstlich $dv = 0$ und hernach $dt = 0$, so folgen die Gleichungen:

(7) $$c_v = c_p + L\frac{\partial p}{\partial t},$$

(8) $$l = L\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Setzen wir andrerseits in (6) für die Änderung dv den Ausdruck:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial p}dp$$

ein, so entspringt:

$$c_v\,dt + l\frac{\partial v}{\partial t}dt + l\frac{\partial v}{\partial p}dp = c_p\,dt + L\,dp.$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von dt rechts und links und ebenso derjenigen von dp folgt:

(9) $$c_v + l\frac{\partial v}{\partial t} = c_p,$$

(10) $$l\frac{\partial v}{\partial p} = L.$$

Setzen wir weiter in der Gleichung:

$$c_v\,dt + l\,dv = P\,dp + V\,dv$$

für dp den Ausdruck (2) ein, so gewinnen wir:

$$c_v\,dt + l\,dv = P\frac{\partial p}{\partial t}dt + P\frac{\partial p}{\partial v}dv + V\,dv$$

und entnehmen hieraus:

(11) $$c_v = P\frac{\partial p}{\partial t},$$

(12) $$l = P\frac{\partial p}{\partial v} + V.$$

Endlich aber können wir noch in:

$$c_p\,dt + L\,dp = P\,dp + V\,dv$$

für dt die Summe:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial p}dp + \frac{\partial t}{\partial v}dv$$

eintragen und finden:

$$c_p\frac{\partial t}{\partial p}dp + c_p\frac{\partial t}{\partial v}dv + L\,dp = P\,dp + V\,dv$$

und daraus:

(13) $$c_p\frac{\partial t}{\partial p} + L = P,$$

(14) $$c_p\frac{\partial t}{\partial v} = V.$$

Die Relationen (7) bis (14), welche übrigens nicht alle von einander unabhängig sind (auch könnten wir noch weitere auf ähnliche Art gewinnen) **haben wir hier durch Rechnung gewonnen,** ohne daſs wir irgend welche Gesetze der

Wärmelehre herangezogen haben. Es hatte hier ja freilich Q die Bedeutung der Wärmemenge, t die der Temperatur u. s. w.; doch gelten die fraglichen Relationen auch für jede andere Bedeutung, welche die durch eine Gleichung verknüpften Variabeln t, p, v und die von ihnen abhängende Gröſse haben mögen.

Die fraglichen Relationen sind für jede Substanz gültig. Doch spezialisiere man sie sogleich wieder für eine Substanz, bei welcher $\boldsymbol{pv = Rt}$ gilt (d. i. für den Fall eines vollkommenen Gases). Hier hat man:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{R}{v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{p}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{p},$$

sodaſs die Relationen (7) bis (12) folgende Gestalten annehmen:

(7)* $$c_v = c_p + L\frac{R}{v},$$ (8)* $$l = -L\frac{p}{v},$$

(9)* $$c_v + l\frac{R}{p} = c_p,$$ (10)* $$-l\frac{v}{p} = L,$$

(11)* $$c_v = P\frac{R}{v},$$ (12)* $$l = -P\frac{p}{v} + V.$$

Man sieht, daſs diese Relationen nicht unabhängig von einander sind; so ist z. B. die Relation (7)* eine Folge von (9)* und (10)*.

80. Noch ein Beispiel. Der Elastizitätsmodul oder kurz die Elastizität eines Stoffes ist, wie wir in Artikel 58 sahen, definiert durch die Gleichung:

$$e = -v\frac{dp}{dv}.$$

Ist nun t konstant, so müssen wir für diesen „isothermischen" Zustand schreiben:

$$e_t = -v\frac{\partial p}{\partial v},$$

wenn e_t die Elastizität bei konstanter Temperatur bedeutet. Suchen wir dagegen die „adiabatische" Elastizität e_Q, so müssen wir den Wert $\frac{dp}{dv}$ für den Fall ermitteln, daſs der Stoff Wärme weder abgiebt noch aufnimmt. In den letzten Ausdruck der Gleichung (3) setzen wir also $dQ = 0$ ein und erhalten dann die für unseren Fall zutreffenden Werte von dp und dv. Es ergiebt sich also:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q = -\frac{V}{P}.$$

Dabei hängen wir den Index Q an, um anzudeuten, daſs Q konstant bleiben soll. Wir erhalten also:

$$e_Q = v\frac{V}{P}.$$

Betrachten wir nun das Verhältnis der beiden gefundenen Werte für e zu einander, so erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{e_Q}{e_t} = \frac{-\frac{V}{P}}{\frac{\partial p}{\partial v}}.$$

Setzen wir darin für V seinen Wert aus Gleichung (14) und für P seinen Wert aus Gleichung (11) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{e_Q}{e_t} = \frac{-c_p \frac{\partial t}{\partial v} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}}{c_v \cdot \frac{\partial p}{\partial v}}.$$

Nun sahen wir aber bereits bei Gleichung (5), daſs

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)} = -\frac{\partial t}{\partial v}$$

ist; unter Rücksichtnahme darauf finden wir dann **für jede beliebige Substanz die Beziehung:**

(15) $$\frac{e_Q}{e_t} = \frac{c_p}{c_v}.$$

Dieser Quotient der beiden spezifischen Wärmeziffern wird gewöhnlich durch den Buchstaben γ bezeichnet. Man beachte, daſs wir auch hier wieder kein Gesetz der Wärmelehre und keine bestimmte Temperaturskala für die Ableitung unserer Formel zu Grunde gelegt haben.

81. Allgemeiner Beweis. Wenn u eine Funktion von x und y ist, so wollen wir dies durch die folgende Schreibweise andeuten: $u = f(x, y)$. Nun nehmen wir bestimmte Werte von x und y an und berechnen dafür u; sodann nehmen wir statt dessen die Werte $x + \varDelta x$ und $y + \varDelta y$, wobei $\varDelta x$ und $\varDelta y$ vollkommen unabhängig von einander sein sollen, und berechnen den neuen Wert von u, den wir $u + \varDelta u$ nennen. Sodann subtrahieren wir und können unser Resultat in folgender Form schreiben:

$$\varDelta u = f(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y) - f(x, y).$$

Jetzt addieren und subtrahieren wir dieselbe Gröſse: $f(x, y + \varDelta y)$ und erhalten dann:

$$\varDelta u = f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y) + f(x, y + \varDelta y) - f(x, y).$$

Diese Gleichung kann man auch so schreiben:

(16) $$\varDelta u = \frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y)}{\varDelta x} \varDelta x + \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y} \varDelta y.$$

Nehmen wir nun an, daſs $\varDelta x$ und $\varDelta y$ immer kleiner und kleiner werden ohne Grenzen, so geht der Koeffizient von $\varDelta y$

$$\frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y}$$

über in $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ oder $\frac{\partial u}{\partial y}$, wobei x während der Differentiation in Bezug auf y als konstant angenommen wird. Denn in der That kommen wir ja hier auf unsere Definition des Differentialquotienten (vgl. Anmerkung zu Artikel 20) unmittelbar zurück.

Andrerseits wird der Koeffizient von $\varDelta x$ denselben Grenzwert annehmen wie:

$$\frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x},$$

weil $\varDelta y$ verschwindend klein wird.

Schreiben wir nun anstatt $f(x, y)$ wieder u, so erhalten wir:

(17) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Beispielsweise wähle man: $u = ax^2 + by^2 + cxy$; dann erhält man:

$$du = (2ax + cy)\,dx + (2by + cx)\,dy.$$

82. Gegeben sei die Beziehung:

(18) $$dz = M \cdot dx + N \cdot dy,$$

wobei M und N Funktionen von x und y sein sollen. Hieraus folgt noch keineswegs notwendig, dafs auch z eine Funktion von x und y ist.

Zum Beispiel hatten wir in Gleichung (3) die Beziehung:

$$dQ = c_v \cdot dt + l \cdot dv,$$

wobei c_v und l Funktionen von t und v waren. Trotzdem ist aber Q, **die gesamte** einem Kilogramm des Gases **zugeführte Wärmemenge, keine Funktion von v und t; sie ist keineswegs durch den Zustand des Gases bestimmt.** Vielmehr kann der Stoff ungeheure Wärmemengen aufnehmen und dennoch bei der Rückkehr zum Anfangszustand nur geringe Wärme wieder abgeben. Dagegen sagt der erste Hauptsatz der Wärmetheorie folgendes aus:

Wenn $dE = dQ - p \cdot dv$ gesetzt wird, wobei $p \cdot dv$ die von dem Gase geleistete mechanische Arbeit bedeutet, so ist der Wert E, den wir als die **innere Energie des Gases** bezeichnen wollen, eine eindeutige Funktion des jeweiligen Zustandes des Gases. Sie kehrt immer wieder auf denselben Wert zurück, wenn das Gas wieder auf seinen ursprünglichen Zustand gebracht wird.

Unser E ist also eine Funktion von t und v oder von t und p oder von p und v, aber Q ist es nicht.

Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmelehre besagt folgendes:

Dividieren wir dQ durch t, wobei t die absolute Temperatur, also gleich der in Celsiusgraden gemessenen Temperatur θ vermehrt um 273 ist und mit dem Luftthermometer gemessen sein soll, und setzen wir den erhaltenen Quotienten $\frac{dQ}{t}$ gleich $d\Phi$, so ist der Wert Φ, den wir **„Entropie“** nennen wollen, eine Funktion des Gaszustandes.

83. Wie wir eben sahen, ist z nicht immer eine Funktion von x und y, wenn

(18) $$dz = M \cdot dx + N \cdot dy$$

ist, wobei M und N Funktionen von x und y sein sollen. Es ist nun von grofser Wichtigkeit, die Kennzeichen dafür aufzufinden, wann die Gleichung (18) durch eine Funktion z von x und y befriedigt werden kann.

Angenommen, z sei eine solche Funktion, dann ist:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Der Vergleich mit Gleichung (18) ergiebt also, dafs

$$M = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad N = \frac{\partial z}{\partial y}$$

und folglich

(19)
$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{y}}$$

sein mufs. Denn, wie wir wissen, ist $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ *).

Damit haben wir ein aufserordentlich wichtiges Gesetz gefunden:

Wenn

(18)
$$dz = M \cdot dx + N \cdot dy$$

ist und zugleich z eine Funktion von x und y darstellt (eine andere Ausdrucksweise dafür, dafs z eine Funktion von x und y ist, besteht darin, dafs man sagt: *$dz = Mdx + Ndy$ sei ein vollständiges Differential*), so gilt die Beziehung:

(19)
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. D. h. man kann in der That zeigen, dafs bei Gültigkeit der Gleichung (19) eine der Gleichung (18) genügende Funktion z von x und y existiert**).

---

*) Man beweise, dafs wirklich

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}\,\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}\,\partial \boldsymbol{y}}$$

ist. Wir brachten dafür schon in Artikel 31 einige Beispiele, und wenn der Leser mit dem Satze selbst noch nicht völlig vertraut sein sollte, empfehlen wir ihm, neue Beispiele dafür zu bilden, oder die alten nochmals durchzurechnen.

Hier soll nun eine allgemeine Überlegung entwickelt werden, welche die Richtigkeit des Satzes nahelegt:

Es sei

$$u = f(x, y).$$

Dann ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ der Grenzwert für den Ausdruck $\frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}$, wenn $\varDelta x$ verschwindend klein wird. Nun ist aber dieser Ausdruck eine Funktion von y. Wir können ihn also nach y differenzieren und erhalten dann für $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ oder $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, entsprechend unserer Definition des Differentialquotienten, den Grenzwert des Ausdruckes:

$$\frac{1}{\varDelta y}\left\{\frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y)}{\varDelta x} - \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}\right\},$$

wenn erst $\varDelta x$, hernach aber $\varDelta y$ verschwindend klein werden.

Ganz analog finden wir andererseits für $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ den Grenzwert des Ausdruckes:

$$\frac{1}{\varDelta x}\left\{\frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - (fx + \varDelta x, y)}{\varDelta y} - \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y}\right\},$$

wenn zunächst $\varDelta y$ und dann $\varDelta x$ verschwindend klein werden.

Nun liegt es auf der Hand, dafs diese beiden Ausdrücke für alle endlichen Werte von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ gleich grofs sind. Wir dürfen also annehmen, dafs diese Gleichheit auch für die beiden durch die vorgeschriebenen Grenzübergänge entspringenden Grenzwerte bestehen bleibt.

**) Der Ausdruck

(1)
$$M \cdot dx + N \cdot dy,$$

in dem M und N Funktionen von x und y sein sollen, **kann stets durch Multi-**

84. Der erste Hauptatz der mechanischen Wärmelehre lautet:

Wenn $dE = dQ - p \cdot dv$ oder $dE = c_v \cdot dt + (l - p)dv$ gesetzt wird, so ist ***dE* ein vollständiges Differential**; d. h.: E kehrt zu seinem alten Werte

---

plikation mit einer Funktion von x und y zu einem vollständigen Differential gemacht werden. (Ein solcher Multiplikator wird gewöhnlich als ein „integrierender Faktor" des Ausdrucks $M \cdot dx + N \cdot dy$ bezeichnet.) Diese Behauptung soll nachstehend bewiesen werden.

Die M und N seien beliebige Funktionen von x und y. Man setze alsdann den Ausdruck (1) gleich 0 und kann die so entspringende Gleichung auch in folgende Form kleiden:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}. \tag{2}$$

Hierdurch ist ein bestimmtes Gesetz gegeben, welches die Gröfsen x und y mit einander verbindet.

Sei dies Gesetz durch $F(x, y) = c$ ausgedrückt, so ergiebt sich durch Differentiation nach x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Da nun $\frac{dy}{dx}$ in (3) dasselbe bedeutet wie in (2), so folgt daraus:

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)} = \frac{M}{N}.$$

Es ist also $\frac{\partial F}{\partial x} = \mu M$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = \mu N$, wobei μ in beiden Gleichungen ein und dieselbe Funktion von x und y oder vielleicht auch ein und dieselbe Konstante ist.

Multiplizieren wir (1) mit μ, so erhalten wir offenbar:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy, \tag{4}$$

also ein vollständiges Differential.

Es läfst sich leicht zeigen, dafs für den gegebenen Ausdruck (1) nicht nur ein integrierender Faktor μ existiert, sondern unendlich viele.

Als ein Beispiel, an dem die Wichtigkeit des integrierenden Faktors zu ersehen ist, sei hier der **Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie** wiedergegeben.

1. Wir haben bereits gezeigt, dafs für jede Substanz, deren Zustand durch t und v eindeutig bestimmt ist, die Beziehung gilt:

$$dQ = c_v \cdot dt + l \cdot dv, \tag{5}$$

wobei c_v und l Funktionen von t und v sind. Man beachte, dafs dabei t an einer ganz beliebigen, vielleicht ganz unregelmäfsig geteilten Skala gemessen werden kann.

Nun haben wir eben bewiesen, dafs es eine Funktion μ von t und v giebt, die durch Multiplikation den Ausdruck $c_v dt + l dv$ zu einem vollständigen Differential macht. Wir bezeichnen das entstehende Produkt mit $d\Phi$ und erhalten:

$$d\Phi = \mu \cdot dQ = \mu c_v \cdot dt + \mu l \cdot dv. \tag{6}$$

zurück, wenn die im Carnotschen Kreisprozefs geleistete äufsere Arbeit gleich $\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \varDelta t \cdot \varDelta v$ ist. Nun kehren aber die Temperatur t und das Volumen v dann ebenfalls wieder auf ihre alten Werte zurück; eine andere Ausdrucksweise für

---

Jetzt wollen wir versuchen, ob sich die fragliche Funktion μ vielleicht so auswählen läfst, dafs sie nur von t, nicht von v abhängt. Giebt es ein solches μ, so benutzen wir die Thatsache, dafs der Differentialquotient von μc_v nach v (wobei t als konstant angenommen wird) gleich dem Differentialquotienten von μl nach t ist (wobei v als konstant gilt). Folglich gilt bei einem von v unabhängigen integrierenden Faktor μ:

$$\mu \frac{\partial c_v}{\partial v} = l \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{\partial l}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{l}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt}. \tag{7}$$

Nun ergiebt aber der erste Hauptsatz der Wärmetheorie (vgl. Gleich. (20), Art. 84) die Beziehung:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{8}$$

Folglich ist

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt}. \tag{9}$$

Das ist also die Bedingung dafür, dafs $\mu \cdot dQ$ ein vollständiges Differential ist, wobei μ nur von der Temperatur abhängt. Aus (9) würde man nun für jeden bestimmten Stoff eine Funktion μ, die der gestellten Bedingung genügt, abzuleiten haben. Indessen behaupten wir sogleich, dafs eine Funktion μ existiert, die für alle Stoffe ein und dieselbe ist.

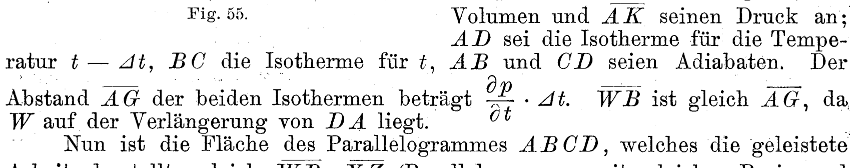


Fig. 55.

2. Der Nachweis dieser Behauptung wird folgendermafsen geführt:

Als bekannt wollen wir den Beweis dafür voraussetzen, dafs alle umkehrbaren Wärmekraftmaschinen, welche zwischen denselben Temperaturgrenzen t und $t - \varDelta t$ arbeiten, den gleichen thermischen Wirkungsgrad besitzen. In Figur 55 stelle $ABCD$ in vergröfsertem Mafsstabe einen elementaren Carnotschen Kreisprozefs dar. Der Stoff befindet sich bei A auf der Temperatur $t - \varDelta t$; $\overline{AI}$ giebt sein Volumen und $\overline{AK}$ seinen Druck an; AD sei die Isotherme für die Temperatur $t - \varDelta t$, BC die Isotherme für t, AB und CD seien Adiabaten. Der Abstand $\overline{AG}$ der beiden Isothermen beträgt $\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \varDelta t$. $\overline{WB}$ ist gleich $\overline{AG}$, da W auf der Verlängerung von DA liegt.

Nun ist die Fläche des Parallelogrammes $ABCD$, welches die geleistete Arbeit darstellt, gleich $\overline{WB} \cdot \overline{XZ}$ (Parallelogramme mit gleicher Basis und

dieses Gesetz besteht also darin, daſs man sagt: Das Integral $\int dE$ für einen vollständigen Kreisprozeſs ist gleich Null.

---

gleicher Höhe sind einander gleich). Das Stück $\overline{XZ}$, d. i. die Volumenzunahme bei der isothermischen Expansion von B nach C, wollen wir als $\varDelta v$ bezeichnen. In Gleichung (3), Artikel 78, sahen wir, daſs die bei der höheren Temperatur aufgenommene Wärmemenge gleich $l \cdot \varDelta v$ ist.

Daraus ergiebt sich für den thermischen Wirkungsgrad der Wert:

$$\frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{aufgenommene Wärme}} = \frac{1}{l}\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \varDelta t, \tag{10}$$

und zwar ist dieser Wert für alle Stoffe gleich groſs.

Deswegen genügt es, ihn für eine einzelne Substanz zu bestimmen. Dazu bietet ein berühmt gewordenes Experiment von Joule eine Handhabe. Joule füllte zwei Gefäſse, die durch ein Rohr mit Absperrhahn mit einander verbunden waren, mit komprimiertem Gas, — das eine jedoch mit hohem, das andere mit geringerem Druck. Dann wurden beide Gefäſse in ein Bad gebracht, und nach Eintritt einer gleichmäſsigen Temperatur wurde der Hahn geöffnet. Dabei ergab sich stets, daſs das Bad seine Temperatur nicht änderte. Daraus folgt, daſs für Gase die innere Energie bei konstanter Temperatur nahezu konstant ist; oder, was dasselbe besagt, daſs für Gase l nahezu gleich p ist; p ist aber bei konstantem Volumen bekanntlich eine lineare Funktion der Temperatur.

Die Frage, ob wirklich eins der bekannten Gase diesem Gesetze genau entspricht, soll hier nicht erörtert werden; wir nehmen an, daſs es einen derartigen Stoff giebt, und daſs für denselben die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{l}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\theta + 273}, \tag{11}$$

wobei θ in Centrigraden am Luftthermometer abzulesen ist.

Wählen wir nun $t = \theta + 273$ als unsere Temperaturskala und betrachten den in (11) angegebenen Wert für $\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$ als allgemein gültig, so erhalten wir aus (9):

$$\frac{1}{t} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}$$

oder:

$$\frac{dt}{t} = -\frac{d\mu}{\mu}$$

oder:

$$\log t + \log \mu = \text{const.}$$

oder:

$$\mu = \frac{c}{t},$$

wobei c irgend eine beliebig wählbare Konstante ist. Gewöhnlich setzt man $c = 1$ und hat dann $\mu = \frac{1}{t}$ als integrierenden Faktor für (5). Dieser Faktor wird die Carnotsche Funktion genannt.

Allerdings muſs man es als nicht sehr wahrscheinlich hinstellen, daſs der integrierende Faktor, selbst wenn es einen von p oder v unabhängigen giebt, so einfach sein sollte, wie der Ausdruck $\frac{1}{\theta + 273}$ (in Centigraden nach dem Luftthermometer), oder daſs eine Substanz mit der oben geforderten Eigenschaft

Wir sahen, dafs der partielle Differentialquotient von c_v nach v (wobei t während der Differentiation als konstant gilt) gleich dem partiellen Differentialquotienten von $l - p$ nach t ist; oder, als Formel geschrieben:

(20) $$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

Dieser Satz, der für jeden beliebigen Stoff gilt, wird häufig selbst als der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet.

Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie lautet:

(21) $$\frac{dQ}{t} \text{ oder } d\Phi = \frac{c_v}{t}dt + \frac{l}{t} \cdot dv$$

ist ein vollständiges Differential. Folglich ist der partielle Differentialquotient von $\frac{c_v}{t}$ nach v gleich dem partiellen Differentialquotienten von $\frac{l}{t}$ nach t*). Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{1}{t}\,\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{t\frac{\partial l}{\partial t} - l}{t^2}$$

oder

(22) $$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{l}{t}.$$

Diese Formel, welche ebenfalls für jeden beliebigen Stoff gilt, wird häufig selbst der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie genannt.

Kombinieren wir Gleichung (20) mit Gleichung (22), so erhalten wir als für jeden Stoff gültig die einfache und wichtige Beziehung:

(23) $$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{t}}.\,^{**)}$$

---

existiert. Vielmehr glauben wir, dafs unser Divisor t, **die absolute Temperatur,** zwar für die zumeist vorkommenden Werte von θ gleich $\theta + 273$ ist, und dafs dies um so genauer zutrifft, je gröfser θ wird, — dafs aber bei kleinen Werten von θ die absolute Temperatur eine kompliziertere Funktion von θ wird. Die grofsen Entdecker der thermodynamischen Grundsätze haben auch niemals von der Temperatur — 273° Cels. als dem absoluten Nullpunkte der Temperatur gesprochen.

*) Die Regel für die Differentiation eines Quotienten wird in Artikel 197 angegeben.

**) Ganz allgemein gilt daher:

(23*) $$dQ = c_v \cdot dt + t \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dv.$$

Aufgabe 1. Mit Hülfe der Gleichung (23) stelle man c_p, l, L, P und V in Ausdrücken von c_v dar und bilde dann die allgemeinste Form der Gleichung (3) so, dafs sie nur Funktionen von c_v enthält. Man zeige ferner, dafs dann darin aufser anderen interessanten Beziehungen auch die folgenden enthalten sind, welche Maxwell als die vier Grundgleichungen der Thermodynamik bezeichnete:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial \Phi} = \frac{\partial t}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial p}{\partial \Phi} = -\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Aufgabe 2. Man beweise, dafs in Fig. 55

Fläche $ABCD = \overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AU} \cdot \overline{AI} = \overline{AG} \cdot \overline{AM} = \overline{AQ} \cdot \overline{AR}$

Nun wollen wir **diesen Satz auf ein vollkommenes Gas anwenden;** dann erhalten wir aus (23) die Beziehung:

$$\frac{l}{t} = \frac{R}{v}\,; \quad l = \frac{Rt}{v}\,; \quad l = p. \tag{24}$$

Folglich ergiebt jetzt (20):

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = 0.$$

Diese Beziehung ist vielleicht nicht von grofser praktischer Bedeutung, aber der Leser möge diesen letzten Satz als ein Übungsspiel betrachten:

c_v ist für jeden Stoff eine Funktion von v und t, und hier wird nun behauptet, dafs für ein vollkommenes Gas der Wert c_v, wie er sich auch mit der Temperatur ändern mag, sich bei einer Änderung des Volumens nicht mit verändert. Wir kombinieren Gleichung (24) mit den auf Seite 163 gefundenen Gleichungen (9)* u. s. w. und erhalten dann:

$$c_p - c_v = R.$$

Da nun, wie Regnault fand, c_p für Luft und andere Gase eine konstante Gröfse ist, so ist also c_v ebenfalls konstant, und wir erhalten die Beziehungen:

$$l = p, \quad L = -v, \quad P = \frac{v}{\gamma - 1}, \quad V = \frac{p\gamma}{\gamma - 1},$$

worin γ für $\frac{c_p}{c_v}$ steht.

Wir können demnach über die Wärmevorgänge in vollkommenen Gasen nunmehr genaue zahlenmäfsige Berechnungen anstellen, wenn wir nur für das betreffende Gas die Werte von c_p und R kennen.

85. Die Gleichungen (3) Artikel 78 lauteten für ein Kilogramm eines **vollkommenen Gases** folgendermafsen:

$$\begin{cases} \boldsymbol{dQ = c_v \cdot dt + p \cdot dv} \\ \quad\;\; \boldsymbol{= c_p \cdot dt - v \cdot dp} \\ \quad\;\; \boldsymbol{= \frac{v}{\gamma - 1} dp + \frac{p\gamma}{\gamma - 1} dv.} \end{cases} \tag{1}$$

---

ist, und zeige, dafs diese vier Gleichsetzungen von Flächen den vier Gleichungen der vorigen Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 3. Durch Kombination der Gleichung (23) mit (7), (8), (11) und (14) beweise man, dafs für jede Substanz die Beziehungen gelten:

$$L = -t \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \quad c_v = c_p - t \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad V = c_p \frac{\partial t}{\partial v}, \quad P = c_v \frac{\partial t}{\partial p},$$

und dafs Gleichung (20) übergeht in:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = t \cdot \frac{d^2 p}{dt^2},$$

sodafs

$$c_v = c_v^{(0)} + t \int \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \cdot dv$$

wird, wobei $c_v^{(0)}$ eine allein von der Temperatur abhängige Gröfse ist.

Den letzteren Ausdruck schreibt man häufig auch in folgender Form:

(2) $$\frac{1}{\gamma - 1} d(pv) + p \cdot dv.$$

Ferner ist:

(3) $$dE = c_v \cdot dt, \qquad E = c_v t + \text{const.}$$

Daraus kann man leicht weitere Ausdrücke für E als Funktion von p und v erhalten.

Die folgenden drei Beispiele beziehen sich sämtlich auf vollkommene Gase.

Beispiel 1. Aus Gleichung (1) ergiebt sich:

$$d\Phi = c_v \frac{dt}{t} + \frac{p}{t} dv.$$

Mit Rücksicht auf:

$$\frac{p}{t} = \frac{R}{v}$$

folgt dann:

$$d\Phi = c_v \frac{dt}{t} + \frac{R}{v} dv$$

und durch Integration:

$$\Phi = c_v \cdot \log t + R \cdot \log v + \text{const.}$$

oder:

(4) $$\Phi = \log(t^{c_v} \cdot v^R) + \text{const.}$$

Andrerseits ist, ebenfalls gemäfs Gleichung (1):

$$d\Phi = \frac{c_p}{t} dt - \frac{v}{t} dp.$$

Mit Rücksicht auf:

$$\frac{v}{t} = \frac{R}{p}$$

folgt dann:

$$d\Phi = \frac{c_p}{t} dt - \frac{R}{p} dp$$

und durch Integration:

$$\Phi = c_p \cdot \log t - R \cdot \log p + \text{const.}$$

oder:

(5) $$\Phi = \log(t^{c_p} \cdot p^{-R}) + \text{const.}$$

Setzen wir nun für t seinen Wert $\frac{pv}{R}$ ein, so geht Gleichung (5) über in:

(6) $$\Phi = \log(p^{c_v} \cdot v^{c_p}) + \text{const.}$$

Das Gesetz für die adiabatische Zustandsänderung, bei der Φ konstant ist, kann nun ohne weiteres niedergeschrieben werden. Aus den obigen Formeln ergiebt sich für dasselbe:

$$t \cdot v^{\gamma - 1} = \text{const.}$$

oder:

$$t^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \cdot p = \text{const.}$$

oder:

$$p \cdot v^{\gamma} = \text{const.}$$

Der Leser möge weitere derartige Übungen für sich selbst anstellen.

Beispiel 2. Ein Kilogramm eines Gases nehme im Zustande p_0, v_0, t_0 die Wärmemenge Q_{01} auf. In welcher Weise ändert sich dann sein Zustand?

Wir benutzen zur Lösung der Aufgabe die unter (1) gegebenen Beziehungen und unterscheiden folgende Spezialfälle:

I. Das Volumen v_0 möge konstant bleiben. Dann ergiebt sich aus Gleichung (1): $dQ = c_v \cdot dt$.

Das Integral von dQ zwischen den Grenzen t_0 und t_1 ist dann:

$$Q_{01} = c_v(t_1 - t_0),$$

und wir können also daraus die Temperaturzunahme $t_1 - t_0$ berechnen.

Andrerseits haben wir die Beziehung:

$$dQ = \frac{v_0}{\gamma - 1} dp.$$

Daraus ergiebt sich für das Integral, d. h. für Q_{01}, der Wert $\frac{v_0}{\gamma - 1}(p_1 - p_0)$, und wir können somit die Zunahme des Druckes berechnen.

II. Es möge p_0, der Druck, konstant bleiben. Dann ist:

$$dQ = c_p \cdot dt; \text{ folglich } Q_{01} = c_p(t_1 - t_0).$$

Andrerseits:

$$dQ = \frac{p_0 \gamma}{\gamma - 1} dv; \text{ folglich: } Q_{01} = \frac{p_0 \gamma}{\gamma - 1}(v_1 - v_0).$$

III. Es möge t_0, die Temperatur, konstant bleiben. Dann ist:

$$dQ = p \cdot dv; \text{ also } Q_{01} = \int_{v_0}^{v_1} p \cdot dv = W$$

d. i. gleich der von dem Gase bei der Expansion geleisteten äufseren Arbeit.

IV. Druck und Volumen mögen sich in ganz **beliebiger Weise ändern.** Dann setzen wir wieder:

$$Q_{01} = c_v(t_1 - t_0) + \text{geleisteter äufserer Arbeit,}$$

und andrerseits nach Gleichung (2):

$$Q_{01} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_0 v_0) + \text{geleisteter äufserer Arbeit.}$$

Ist dabei $Q = 0$, so wird die geleistete Arbeit gleich $c_v(t_0 - t_1)$.

Die letzte der drei Gleichungen unter (1) schreibt man häufig auch in der bequemen Form:

$$(7) \qquad \frac{dQ}{dv} = \frac{1}{\gamma - 1}\left\{v \frac{dp}{dv} + \gamma p\right\}.$$

Wenn keine Aufnahme von Wärme stattfindet, wenn also $\frac{dQ}{dv} = 0$ ist, so ergiebt sich offenbar:

$$v \frac{dp}{dv} + \gamma p = 0$$

oder

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0,$$

oder, indem wir integrieren:

$$\log p + \gamma \cdot \log v = \text{const.}$$

oder:

$$p \cdot v^{\gamma} = \text{const.}$$

Damit sind wir also wieder auf das adiabatische Expansionsgesetz zurückgekommen.

Beispiel 3. Bei dem wohlbekannten **Kreisprozesse einer Explosionsmaschine** möge ein Kilogramm des Gases von dem Zustande p_2, v_2, t_2, der durch den Punkt A angedeutet ist, adiabatisch komprimiert werden auf den Zustand B mit den Werten p_1, v_1, t_1. Die *an dem Gase* geleistete mechanische Arbeit ist dann gemäſs dem soeben unter IV Gesagten gleich $c_v(t_1 - t_2)$, und dies ist also offenbar die *Zunahme an innerer Energie.*

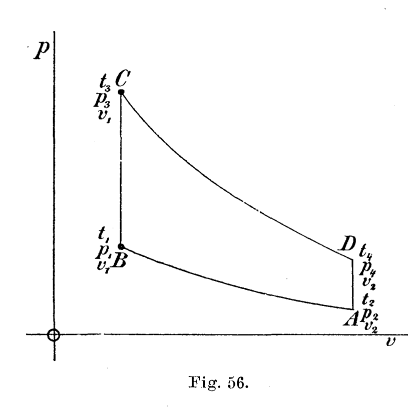


Fig. 56.

Von B nach C möge das Gas bei konstantem Volumen Wärme aufnehmen, sodaſs es in den Zustand p_3, v_1, t_3 übergeht. Die aufgenommene Wärmemenge Q ist dann gleich $c_v(t_3 - t_1)$.

Bei der adiabatischen Expansion CD wird eine äuſsere Arbeit der Gröſse $c_v(t_3 - t_4)$ *von dem Gase* geleistet.

Die Nettoarbeit W in dem ganzen Kreisprozesse ist also gleich dem Überschuſs der Arbeit CD über die Arbeit AB:

$$W = c_v(t_3 + t_2 - t_1 - t_4).$$

Der thermische Wirkungsgrad e des Kreisprozesses ergiebt sich daraus folgendermaſsen:

$$e = \frac{W}{Q} = \frac{t_3 + t_2 - t_1 - t_4}{t_3 - t_1} = 1 - \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1}. \tag{8}$$

Nun sahen wir aber, daſs auf einer adiabatischen Linie der Ausdruck $tv^{\gamma-1}$ konstant ist, und folglich erhalten wir:

$$t_2 v_2^{\gamma-1} = t_1 v_1^{\gamma-1},$$
$$t_4 v_2^{\gamma-1} = t_3 v_1^{\gamma-1}.$$

Daraus folgt, daſs $\frac{t_4}{t_3} = \frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}$ ist, und zugleich ist jeder dieser Ausdrücke gleich $\frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1}$.

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (8) ein, so erhalten wir für den Wirkungsgrad e die Beziehung:

$$\boldsymbol{e = 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1}}. \tag{9}$$

Diese Formel zeigt uns deutlich, daſs man durch Verkleinerung der Füllung v_1 den Nutzeffekt der Maschine verbessern kann.

Als weitere gute Übungsbeispiele empfehlen wir dem Leser die Betrachtung von anderen Kreisprozessen bei Gasmaschinen.

86. Änderung des Aggregatzustandes. Anstatt die Gleichungen (3) aus Artikel 78 zu benutzen, wollen wir nun spezielle Formeln für den Übergang aus einem Aggregatzustand in den anderen aufstellen. Wir betrachten 1 Kilogramm eines Gemisches, das aus m Kilogramm Dampf und $1 - m$ Kilogramm Flüssigkeit besteht. Es bedeute:

s_2 das Volumen von einem Kilogramm Dampf in cbm,

s_1 das Volumen von einem Kilogramm Flüssigkeit in cbm,

p den Druck, t die Temperatur; *dabei ist p schon allein durch t eindeutig bestimmt.*

Ist v das Volumen der Mischung von Flüssigkeit und Dampf, so erhalten wir:

$$v = ms_2 + (1 - m)s_1 = (s_2 - s_1)m + s_1$$

oder, wenn wir $s_2 - s_1$ durch u bezeichnen:

$$v = mu + s_1. \tag{1}$$

Wird nun dem Gemisch eine Wärmemenge dQ zugeführt, so ändern sich offenbar t und m. Wir können dabei t und m als zwei von einander unabhängige Veränderliche ansehen, müssen aber beachten, daſs durch t und m allein bereits der Zustand des Gemisches eindeutig bestimmt wird.

Es bedeute σ_2 die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes und σ_1 diejenige der Flüssigkeit; es sei also σ_2 die Wärmemenge, welche einem Kilogramm des Dampfes zur Erwärmung um 1^0 Celsius zugeführt werden muſs, wobei der Druck gleichzeitig entsprechend seinem besonderen Gesetze steigt.

Dann brauchen die m Kilogramm Dampf eine Wärmemenge $m\sigma_2 \cdot dt$ und die $1 - m$ Kilogramm Flüssigkeit eine Wärmemenge $(1 - m)\sigma_1 \cdot dt$. Nun gehen noch dm Kilogramm aus dem flüssigen Zustande in den gasförmigen über; dazu brauchen sie eine Wärmemenge $L \cdot dm$, wenn L die latente Dampfwärme bezeichnet. Folglich gilt:

$$dQ = \{(\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1\}dt + L\,dm. \tag{2}$$

Ist nun wieder E die innere Energie, so ergiebt das erste Gesetz der mechanischen Wärmelehre die Beziehung:

$$dE = dQ - p \cdot dv. \tag{3}$$

Da nun m und t den Zustand des Gemisches eindeutig bestimmen, so muſs v eine Funktion von m und t sein; es gilt also:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial m}dm$$

Indem wir diese Beziehung in Gleichung (3) und (2) einsetzen, finden wir:

$$dE = \left\{(\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1 - p\frac{\partial v}{\partial t}\right\}dt + \left\{L - p\frac{\partial v}{\partial m}\right\}dm. \tag{4}$$

Nun deuten wir an, daſs dies ein vollständiges Differential ist, sodaſs also

$$\frac{\partial}{\partial m}\left\{(\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1 - p\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{L - p\frac{\partial v}{\partial m}\right\}$$

wird, und beachten, daſs $\frac{\partial v}{\partial m} = u$ nach Gleichung (1) zutrifft. Dann erhalten wir, da p von m unabhängig ist:

$$\frac{dL}{dt} + \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial v}{\partial m} = u\frac{dp}{dt}. \tag{5}$$

Jetzt dividieren wir Gleichung (2) durch t und drücken aus, dafs $d\Phi = \frac{dQ}{t}$ ein vollständiges Differential ist:

(6) $$\frac{\partial}{\partial m}\left\{\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)m + \sigma_1}{t}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{t}\right)^{*)}$$

oder:

(7) $$\frac{dL}{dt} + \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{L}{t}.$$

Daraus erhalten wir mit Rücksicht auf Gleichung (5) die Beziehung:

(8) $$\boldsymbol{\frac{L}{t} = u\frac{dp}{dt} = (s_2 - s_1)\frac{dp}{dt}}.$$

87. Zu der Fundamentalgleichung (8) kann man auch **auf einem kürzeren Wege** gelangen. In Figur 57 ist ein Elementarstück eines Carnotschen Kreisprozefses für ein Kilogramm des Gemisches dargestellt. Die Koordinaten des Punktes B sind $\overline{FB} = s_1$, das Volumen von einem Kilogramm der Flüssigkeit, und $\overline{BG} = p$, der zugehörige Druck. Bei konstanter Temperatur t und konstantem Drucke p expandiere jetzt das Gemisch, bis es bei $\overline{FC} = s_2$ ganz in Dampf übergegangen ist; dann folgt eine adiabatische Expansion CD bis zur Temperatur $t - \Delta t$ bei D und eine isothermische Kompression DA bei der Temperatur $t - \Delta t$; AB endlich ist die adiabatische Kompression, welche den Kreisprozefs schliefst.

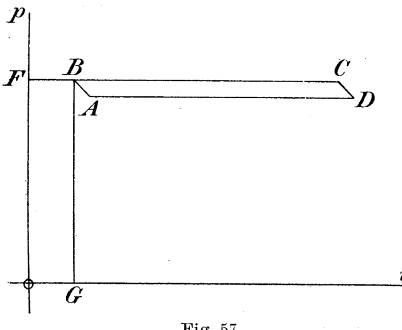


Fig. 57.

Die vertikale Höhe des Parallelogramms ist $\Delta t \frac{dp}{dt}$, und seine Fläche, welche den Betrag der geleisteten äufseren Arbeit darstellt, ist gleich $\Delta t \frac{dp}{dt}(s_2 - s_1)$. Die bei der Operation BC aufgenommene Wärmemenge ist L, und der Nutzeffekt ist folglich: $\frac{\Delta t \frac{dp}{dt}(s_2 - s_1)}{L}$. Da es aber ein Carnotscher Kreisprozefs ist, so ist dieser Wert gleich $\frac{\Delta t}{t}$, und damit ist Gleichung (8) bewiesen**).

---

*) Die Ausführung der Differentiation ergiebt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{t}\right) = \frac{t \cdot \frac{dL}{dt} - L}{t^2},$$

wie wir später sehen werden, wenn wir auch Quotienten zu differenzieren gelernt haben. Wir müssen überhaupt zugeben, dafs es zum vollen Verständnis dieses Artikels über die Zustandsänderung erforderlich ist, dafs der Leser Produkte und Quotienten differenzieren kann.

**) Noch eine andere Beweisführung für Gleichung (8) besteht darin, dafs man sie zurückführt auf die Beziehung:

88. Die Entropie des Gemisches. Aus Gleichung (6) erhalten wir die Beziehung:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = t \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{t}\right),$$

und folglich können wir Gleichung (2) auch so schreiben:

$$(9) \qquad dQ = \sigma_1 \cdot dt + t \cdot d\left(\frac{mL}{t}\right).$$

Daraus ergiebt sich für die Entropie:

$$d\Phi = \frac{dQ}{t} = \frac{\sigma_1}{t}\,dt + d\left(\frac{mL}{t}\right)$$

oder:

$$(10) \qquad \Phi = \frac{mL}{t} + \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma_1}{t}\,dt + \text{const.}$$

Für Wasser ist σ_1 nahezu konstant, nämlich gleich dem mechanischen Wärmeäquivalent; denn, wie seiner Zeit bemerkt wurde, rechnen wir alle unsere Wärmemengen in *Arbeitseinheiten.* Aus (10) folgt somit:

$$(11) \qquad \Phi = \frac{mL}{t} + \sigma_1 \log\left(\frac{t}{t_0}\right) + \text{const.}$$

Demnach lautet also das adiabatische Gesetz für Wasserdampf:

$$(12) \qquad \boldsymbol{\frac{mL}{t} + \sigma_1 \log \frac{t}{t_0} = \text{const.}}$$

Wir empfehlen dem Studierenden dringend, hierfür ein numerisches Beispiel durchzurechnen: Es möge der Wasserdampf von 165^0 Celsius ($t = 438^0$) adiabatisch expandieren bis auf 85^0 Celsius ($t = 358^0$). Man setze $\sigma_1 = 424$ und L in Arbeitseinheiten (mkg) ein, oder man setze $\sigma_1 = 1$ und rechne L in Wärmeeinheiten (Calorien). In jedem Falle benutze man eine Tabelle, welche die Beziehung von t und L zu einander angiebt.

Bei der höheren Temperatur $t_2 = 438$ sei $m_2 = 0{,}7$. (Dieser Wert ist ganz willkürlich gewählt.) Man berechne nun m_1, beispielsweise für $t_1 = 394$, und ebenso m_0 etwa für $t_0 = 358$.

Vielleicht wäre es besser gewesen, L in Wärmeeinheiten zu rechnen, weil die Formel

$$L = 802 - 0{,}717\,t\;^{*)}$$

sich dem Gedächtnis leicht einprägt.

$$\Delta Q = c_v \cdot \Delta t + l \cdot \Delta v.$$

Wie wir wissen, ist $l = t \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$ (siehe Gl. (23), Art. 84). Nun denken wir uns, dafs ein Kilogramm eines Stoffes im flüssigen Zustande vom Volumen s_1 bei konstanter Temperatur $[\Delta t = 0]$ eine Wärmemenge $\Delta Q = L$ aufnimmt und sich dabei auf das Volumen s_2 im gasförmigen Zustande ausdehnt $[\Delta v = s_2 - s_1]$; dann erhalten wir mit Rücksicht darauf, dafs p von v unabhängig ist, die Beziehung:

$$\Delta Q = L = 0 + t \cdot \frac{dp}{dt}(s_2 - s_1).$$

*) Empirische Formel nach Zeuner.

Dann geht Gleichung (12) über in:

$$m_1\left(\frac{802}{t_1}-0{,}717\right)+\log\frac{t_1}{t_0}=m_2\left(\frac{802}{t_2}-0{,}717\right)+\log\frac{t_2}{t_0},$$

$$m_1=\frac{\log\frac{t_2}{t_1}+m_2\left(\frac{802}{t_2}-0{,}717\right)}{\frac{802}{t_2}-0{,}717}.$$

Um m_0 zu ermitteln, setzen wir t_0 an Stelle von t_1 ein.

Nachdem so die Werte für m gefunden sind, suche man die entsprechenden Werte für v. Nun probiere man, ob vielleicht irgend ein Gesetz von der Art

$$pv^s = \text{const.}$$

besteht, welches näherungsweise die adiabatische Expansion des Stoffes angeben könnte.

Diese Übung wiederhole man, indem man etwa von $m_2 = 0{,}8$ (anstatt 0,7) ausgeht.

Die Methode an der Hand des **Diagrammes für t und Φ** ist vorzuziehen, wenn es sich darum handelt, den Anfänger in diese Verhältnisse einzuweihen; aber ein oder zwei Beispiele nach Art der obigen sollten doch durchgenommen werden.

89. Ein gegebener zweigliederiger „vollständiger“ Differentialausdruck $du = Mdx + Ndy$ werde gleich Null gesetzt. Aus der so entspringenden Differentialgleichung $du = 0$ soll die Gleichung $u = C$ entwickelt werden. Es handelt sich hierbei wesentlich um die Berechnung des Ausdrucks von u in x und y.

Es sei z. B. gegeben die Gleichung:

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$$

Wir sehen leicht, dafs dies ein *vollständiges* Differential ist; denn es ist:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 4xy - 2y^2) = -4x - 4y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 4xy - 2x^2) = -4y - 4x,$$

sodafs also diese beiden partiellen Differentialquotienten gleich sind. Wir dürfen hiernach den vorgelegten Differentialausdruck in der Gestalt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

schreiben und haben somit die Gleichungen:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wir integrieren nunmehr den Ausdruck $x^2 - 4xy - 2y^2$, der ja gleich $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist, nach x, indem wir y als Konstante annehmen; dabei müssen wir, dem letzteren Umstand zufolge, als Integrationskonstante eine beliebige Funktion von y hinzufügen. So erhalten wir:

$$u = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2y^2x + \Phi(y).$$

Um $\Phi(y)$ zu finden, greifen wir zurück auf die Beziehung:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 4xy - 2x^2.$$

Differenzieren wir andererseits den eben gewonnenen Ausdruck für u nach y, so erhalten wir durch Gleichsetzung mit $y^2 - 4xy - 2x^2$:

$$-2x^2 - 4xy + \frac{d\Phi(y)}{dy} = y^2 - 4xy - 2x^2$$

und daraus:

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = y^2,$$

$$\Phi(y) = \tfrac{1}{3}y^3,$$

also:

$$u = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3.$$

Wir haben daher die gegebene Differentialgleichung gelöst, wenn wir diesen Ausdruck gleich einer beliebigen Konstanten setzen.

In gleicher Weise löse man die Gleichung:

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2\,\frac{y}{x}\,dy = 0.$$

[Lösung: $x^2 - y^2 = cx$].

Ferner:

$$\frac{2x \cdot dx}{y^3} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0.$$

[Lösung: $x^2 - y^2 = cy^3$].

Endlich:

$$\left(3x^2 + 3y - \frac{4}{x^3}\right) dx + \left(3x - \frac{8}{y^3} + 3y^2\right) dy = 0.$$

[Lösung: $x^5y^2 + x^2y^5 + 4x^2 + 2y^2 + 3x^3y^3 = cx^2y^2$].

90. Bei dem allgemeinen Beweise für die Gleichung (17) (S. 165), wie wir ihn in Art. 81 gegeben haben, nahmen wir an, dafs die Variabelen **x und y unabhängig von einander** sind. Wir können nun aber auch einmal voraussetzen, dafs sie von einander abhängen, oder dafs beide Funktionen von einer dritten Veränderlichen z sind. Ändert sich diese dritte unabhängige Grösse z zu $z + \Delta z$,

so wird x zu $x + \Delta x$ und y zu $y + \Delta y$; infolge dessen wird entsprechend u zu $u + \Delta u$. Dividieren wir nun die Gleichung (16) aus Art. 81 auf beiden Seiten durch Δz und lassen Δz ohne Ende kleiner und kleiner werden, so geht Gleichung (17) über in:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz}. \tag{1}$$

Beispielsweise sei:

$$u = ax^2 + by^2 + cxy,$$

und es gelte:

$$x = ez^n, \quad y = gz^m.$$

Dann ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + cy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by + cx,$$

$$\frac{dx}{dz} = nez^{n-1}, \quad \frac{dy}{dz} = mgz^{m-1}$$

und folglich:

$$\frac{du}{dz} = (2ax + cy)\, nez^{n-1} + (2by + cx)\, mgz^{m-1}.$$

Hier können wir rechter Hand, wenn wir wollen, x und y durch Ausdrücke von z ersetzen und so unsere ganze Antwort als eine Funktion von z erhalten.

Beispiele von dieser Art sind deswegen recht interessant, weil sie auch nach unserer alten Methode gelöst werden können. In den Ausdruck für u brauchen wir zu dem Zwecke nur x und y als Funktionen von z einzusetzen und finden dann

$$u = ae^2z^{2n} + bg^2z^{2m} + cegz^{n+m}$$

und:

$$\frac{du}{dz} = 2nae^2z^{2n-1} + 2mbg^2z^{2m-1} + (n+m)\, cegz^{n+m-1}.$$

Man wird sehen, dafs dies Resultat genau mit dem übereinstimmt, welches wir nach unserer neuen Methode fanden. Andere Aufgaben dieser Art kann sich der Leser leicht selbst bilden.

Beispielsweise möge $y = uv$ sein, wobei u und v Funktionen von x sind; dann folgt aus Gleichung (1):

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

eine Formel, welche gewöhnlich auf einem ganz anderen Wege abgeleitet wird. (Vgl. Art. 196.)

Ist in Gleichung (1) dagegen y eine Konstante, so lautet diese Gleichung:

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dz},$$

wieder ein Satz, der gewöhnlich in ganz anderer Weise bewiesen wird. (Vgl. Art. 198.)

Setzen wir $z = x$ in Gleichung (1) ein und nehmen an, dafs y eine Funktion von x ist, so ergiebt sich:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Wir brauchen hier den Leser wohl kaum nochmals darauf hinzuweisen, dafs $\frac{du}{dx}$ etwas ganz anderes bedeutet als $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Beispiel. Es sei

$$u = ax^2 + by^2 + cxy$$

und:

$$y = gx^m.$$

Dann ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + cy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by + cx,$$

$$\frac{dy}{dx} = mgx^{m-1}.$$

Folglich ergiebt Gleichung (2) jetzt:

$$\frac{du}{dx} = (2ax + cy) + (2by + cx)\, mgx^{m-1}.$$

Schneller kommen wir zum Ziele durch Anwendung einer Substitutionsmethode, indem wir für y seinen Wert einsetzen:

$$u = ax^2 + bg^2x^{2m} + cgx^{m+1}.$$

$$\frac{du}{dx} = 2ax + 2mbg^2x^{2m-1} + (m+1)\, cgx^m.$$

Man wird finden, dafs dies Resultat mit dem vorigen gleich ist.

Ist u eine Funktion von *drei* von einander unabhängigen Veränderlichen, so läfst sich, analog wie in Art. 81, leicht beweisen, dafs die Beziehung gilt:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz. \tag{3}$$

91. Beispiel. **Eine Masse m möge unter dem Einflusse einer Feder vertikal schwingen.** Die Steifheit der Feder werde durch die Gröfse a angedeutet und zwar so, dafs die Feder mit einer Kraft ax auf die Masse wirkt, wenn dieselbe sich um die Strecke x aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat. Dann wissen wir, dafs die potentielle Energie der Masse $\frac{1}{2}ax^2$ ist (vergleiche Art. 26). Bezeichnen wir nun noch mit v die Geschwindigkeit der Masse zur selben Zeit t, auf welche auch x bezogen ist, so ergiebt sich die kinetische Energie zu $\frac{1}{2}mv^2$. Wenn wir die Eigenmasse der Feder vernachlässigen, so erhalten wir also für die *gesamte Energie des Systems* den Ausdruck:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}ax^2.$$

Für $x = 0$ hat v seinen gröfsten Wert. Für $v = 0$ hat x den gröfsten Wert.

1. Angenommen, es bleibe der Betrag von E konstant. Wir differenzieren nach t und erhalten:

$$0 = mv\frac{dv}{dt} + ax\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Jetzt beachten wir, dafs $v = \frac{dx}{dt}$ ist, und schreiben $\frac{d^2x}{dt^2}$ für $\frac{dv}{dt}$. Dann folgt:

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a}{m}x = 0.} \tag{2}$$

Das ist das wohlbekannte Gesetz für eine einfache harmonische Bewegung (vergl. Art. 119).

2. Es bleibe die gesamte Energie nicht konstant, sondern sie vermindere sich fortwährend um einen Betrag, der proportional dem Quadrat der jeweiligen Geschwindigkeit ist. (Flüssigkeitsreibung oder magnetische Bremswirkung.) Dann ist: $\frac{dE}{dt} = - Fv^2$, sodaſs Gleichung (1) lautet:

$$- F \cdot v^2 = mv \frac{dv}{dt} + ax \frac{dx}{dt}$$

und Gleichung (2) übergeht in:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{F}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{a}{m} x = 0. \tag{3}$$

Vergleiche Gleichung (1) aus Art. 142.

92. Ganz ähnliche Verhältnisse liegen vor bei einem elektrischen Stromkreise, der bei einer Selbstinduktion L und einem Widerstande R die beiden Belegungen eines Kondensators von der Kapazität K mit einander verbindet. Ist C die Stärke des Entladungsstromes und KV die auf dem Kondensator zur Zeit t angehäufte Elektrizitätsmenge, sodaſs also $C = - K \frac{dV}{dt}$ wird, so ist für jeden Augenblick $\frac{1}{2} LC^2$ die kinetische Energie des Systems und $\frac{1}{2} KV^2$ seine potentielle Energie, während der jeweilige, auf die Sekunde bezogene Energieverlust RC^2 Joule beträgt (1 Joule = 1 Wattsekunde).

Bezeichnen wir nun wieder mit E den gesamten Energiewert für irgend einen Augenblick, so erhalten wir:

$$E = \tfrac{1}{2} LC^2 + \tfrac{1}{2} KV^2,$$

und daraus:

$$\frac{dE}{dt} = - RC^2 = LC \frac{dC}{dt} + KV \frac{dV}{dt},$$

oder:

$$LC \frac{dC}{dt} - VC + RC^2 = 0,$$

oder:

$$L \frac{dC}{dt} - V + RC = 0,$$

oder:

$$LK \frac{d^2 V}{dt^2} + RK \frac{dV}{dt} + V = 0,$$

oder:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LK} V = 0. \tag{4}$$

Differenzieren wir diese Gleichung in Bezug auf t und ersetzen den Wert $\frac{dV}{dt}$ durch $\frac{C}{K}$, so erhalten wir eine ähnliche Gleichung für C. (Vergl. Gleichung (4) aus Art. 145.)

93. Eine Masse m bewege sich mit einer Geschwindigkeit v, sodaſs sie eine kinetische Energie $\frac{1}{2} mv^2$ besitzt. Besteht in dieser Bewegungsenergie ihre Gesamtenergie, so gilt also:

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Vermindert sich nun E stets um einen Betrag, welcher proportional dem Quadrat der jeweiligen Geschwindigkeit ist, wie es bei Flüssigkeitsreibung und mäſsiger Geschwindigkeit zutrifft, so erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = -Fv^2 = mv \cdot \frac{dv}{dt}$$

oder:

(5)
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m}v.$$

Eine ähnliche Gleichung gilt für das Verschwinden eines elektrischen Stromes in einem Leiter, wobei $\frac{1}{2}LC^2$ als seine kinetische Energie und RC^2 als der jeweilige auf die Sekunde bezogene Energieverlust anzusehen ist.

94. Nehmen wir in Gleichung (2), Art. 90 für u einen konstanten Wert an,

$$u = f(x, y) = c,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Es ist demnach im Falle der Gültigkeit der Gleichung $f(x,y) = c$, durch welche y „implicite" oder „unentwickelt" als Funktion von x gegeben sein würde, **sehr leicht, den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu berechnen.**

1) So ergiebt sich für $x^2 + y^2 = c$:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

2) Für $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ folgt:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

3) Weiter hat man bei $u = Ax^m + By^n = c$:

$$\frac{du}{dx} = mAx^{m-1} + nBy^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mAx^{m-1}}{nBy^{n-1}}.$$

4) Bei $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ gilt $du = \frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy$.

5) Man berechne $\frac{dy}{dx}$, falls $x^3 + y^3 - 3axy = b$ ist.

Antwort: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$.

6) Endlich hat man für $x \log y - y \log x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{x \log y - y}{y \log x - x}\right).$$

95. Beispiel. Man bestimme die Gleichungen **der Tangente und Normale bei der Ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkte (x_1, y_1) der Curve.

Hier hat man:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und also} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

für den fraglichen Punkt (x_1, y_1). Die Gleichung der Tangente ist somit:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \quad \text{oder} \quad \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2}.$$

Da aber (x_1, y_1) ein Punkt der Kurve sein sollte, so wird die rechte Seite der letzten Gleichung mit 1 gleich sein, sodaſs die Tangentengleichung die Gestalt gewinnt:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Andrerseits ist die „Steigung“ der Normale $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$, sodaſs die Gleichung derselben diese sein wird:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Kapitel II.

e^x und $\sin x$.

96. Das Zinseszinsgesetz. Für die Lösung einer grofsen Menge technischer Probleme ist die Kenntnis der Differentiationsregel für die Funktion x^n ausreichend. Ich habe hierfür im ersten Kapitel eine Reihe von Beispielen entwickelt. Dabei ist es ganz gewifs besser, dafs man den Differentialquotienten von x^n in der Gestalt nx^{n-1} zu berechnen weifs, als langwierige Entwicklungen der Elementarmathematik heranzuholen, welche jenes so einfache Theorem der Differentialrechnung entbehrlich machen sollen.

Wir kommen nun zu einer ganz anders gearteten Funktion, nämlich zur *„Exponentialfunktion“* e^x, wo also eine konstante Gröfse e (das ist die Basis des natürlichen oder Neperschen Logarithmensystems $e = 2{,}7183 \cdots$) zu einer Potenz mit *veränderlichem* Exponenten erhoben ist. Als Mittel zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialfunktionen besitzen wir die unendlichen Reihen. Speziell die Funktion e^x kann man durch die Reihe definieren:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots .$$

Die hier in den Nennern auftretenden Produkte $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \cdots$ bezeichnet man symbolisch durch $2!, 3!, 4!, \cdots$; allgemein ist also $n!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ aller ganzen positiven Zahlen von 1 bis n. Das Symbol $n!$ wird „n Fakultät“ gelesen.

Man differenziere nun die für e^x angegebene Reihe gliedweise; offenbar erhält man:

$$0 + 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

sodafs der Differentialquotient von e^x mit e^x selbst identisch ist. In analoger Weise kann man zeigen, dafs der Differentialquotient von e^{ax} gleich $a \cdot e^{ax}$ ist. Zugleich erschöpfen wir im Ausdruck $b \cdot e^{ax}$ alle Funktionen, welche die Eigenschaft haben, dafs der Differentialquotient mit der Funktion selber proportional wird. Dieselben kommen in zahlreichen Entwicklungen der Technik und der Naturwissen-

schaften zur Anwendung. Lord Kelvin pflegt diese Funktionen durch die Bemerkung zu charakterisieren, daſs „dieselben das Zinseszinsgesetz befolgen". In der That ist ja bei einem auf Zinseszinsen gelegten Kapitale der Zuwachs dem Kapitale selbst proportional. Darauf sollte die Überschrift des vorliegenden Artikels hinweisen.

97. Wir merken uns noch ausdrücklich in Formeln an, daſs aus:

$$\frac{dy}{dx} = ay, \tag{1}$$

d. i. aus der Forderung, daſs der Differentialquotient von y mit y selbst proportional ist, die Gestalt:

$$y = b \cdot e^{ax} \tag{2}$$

für die Funktion folgt, wo b eine beliebige Konstante ist. Offenbar stellt b den Wert von y für $x = 0$ dar.

Hier wird es wieder zweckmäſsig sein, wenn sich der Leser die gewonnenen Sätze vermöge graphischer und rechnerischer Ausführungen veranschaulicht. Man zeichne sich die Kurve $y = e^x$ auf und zeige, daſs die „Steigung" überall gleich der Ordinate ist. Oder man setze für x spezielle Werte ein, z. B.

$$x = 2, \quad x = 2{,}001, \quad x = 2{,}002, \quad x = 2{,}003, \cdots$$

und rechne die zugehörigen Werte y mit Hilfe einer Logarithmentafel aus. (Das ist auch an sich gar keine schlechte Übung; denn der Praktiker verlernt manchmal merkwürdig schnell den Gebrauch seiner Logarithmentafel.) Man teile alsdann die Zuwüchse von y durch die entsprechenden Änderungen von x; die Quotienten müssen gleich den korrespondierenden Werten y sein. Ein findiger Leser wird sich noch andere, vielleicht verwickeltere Beispiele bilden, um mit der Eigenart der Exponentialfunktion vertraut zu werden. Mögen solche Ausführungen auch kompliziert ausfallen, sie werden für den Lernenden immer von Wert sein, wenn er sie in *selbständiger* Arbeit gefunden hat; nur muſs er sich davor hüten, seine vielleicht recht umständlichen Überlegungen etwa anderen Leuten beibringen zu wollen.

98. Um uns mit diesem Zinseszinsgesetz vertrauter zu machen, wollen wir einige **Übungsbeispiele** durchrechnen, in welchen es zur Anwendung kommt.

Beispiel 1. **Ein elektrischer Kondensator** von der konstanten Kapazität K möge sich durch einen grossen Widerstand entladen. Es sei in einem bestimmten Augenblicke v die Potentialdifferenz

zwischen den beiden Belegungen des Kondensators, von denen wir in unserer Skizze (Figur 58) die eine mit v und die andere mit o bezeichnen wollen. Durch einen Pfeil deuten wir die Richtung des entstehenden Stromes C an. Seine Stärke ist $C = \frac{v}{R}\cdot$

Nun ist q, die im Kondensator befindliche Elektrizitätsmenge, in jedem Augenblicke gleich Kv. Die Abnahme von q pro Sekunde, welche gleich $-\frac{dq}{dt}$ oder $-K\frac{dv}{dt}$ ist, liefert somit wieder die Stromstärke C; folglich gilt:

Fig. 58.

$$-K\frac{dv}{dt} = \frac{v}{R}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{KR}v,$$

d. h. *die sekundliche Abnahme von v ist v selbst proportional.*

Hier handelt es sich nun zwar nicht um eine Zunahme, sondern um eine Abnahme der Variabeln v. Trotzdem können wir auch diesen Vorgang unter das im vorigen Artikel besprochene Gesetz einordnen und haben somit zu erwarten, daſs wir es wieder mit der Exponentialfunktion zu thun haben. In der That erkennen wir, daſs unser Beispiel ein Spezialfall der Gleichung (1) ist. Folglich erhalten wir durch Anwendung von Gleichung (2):

(3) $$v = be^{-\frac{1}{KR}t}.$$

Damit haben wir das Gesetz ermittelt, durch welches wir den Isolationswiderstand eines Kabels oder Kondensators berechnen können. Es ist nämlich:

$$(\log b - \log v) = \frac{t}{KR}\cdot$$

Bezeichnen wir nun mit v_1 das Potential zur Zeit t_1 und mit v_2 dasjenige zur Zeit t_2, so wird:

$$KR(\log b - \log v_1) = t_1,$$
$$KR(\log b - \log v_2) = t_2.$$

Durch Subtraktion erhalten wir:

$$KR(\log v_1 - \log v_2) = t_2 - t_1$$

und daraus:

$$R = \frac{t_2 - t_1}{K\log\frac{v_1}{v_2}}\cdot$$

Wir brauchen wohl kaum daran zu erinnern, dafs der natürliche Logarithmus $\log n$ einer Zahl n sich aus dem Briggs'schen Logarithmus, $^{10}\log n$, durch Multiplikation mit 2,3026 ergiebt.

Beispiel 2. **Newtons Gesetz des Erkaltens**. Man denke sich einen Körper, welcher überall gleiche Temperatur besitzt; letztere sei zur Zeit t um v Grad höher als die Temperatur der Umgebung, die als konstant gelten soll. Der Körper giebt dann an die Umgebung Wärme ab; und zwar ist die pro Sekunde verlorene Wärme proportional mit v; es gilt also die Beziehung $\frac{dv}{dt} = -av$, worin t die Zeit bedeutet. Dann folgt aus Gleichung (2):

$$\left\{\begin{aligned} v &= b \cdot e^{-at}, \\ \log b - \log v &= at. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Z. B. sei v_1 die Temperatur zur Zeit t_1 und v_2 die Temperatur zur Zeit t_2; dann ist $\log v_1 - \log v_2 = a(t_2 - t_1)$, sodafs wir also den Wert von a durch Beobachtung der genannten vier Gröfsen experimentell finden können; es ist nämlich:

$$a = \frac{\log \frac{v_1}{v_2}}{t_2 - t_1}.$$

Beispiel 3. Eine lange Stange, z. B. eine Pumpenstange aus Eisen oder die **„Kunststange" in einem Bergwerk**, soll wegen ihres Eigengewichtes nach unten hin allmählich dünner werden und zwar so, dafs sie überall genau dieselbe Zugspannung von f kg pro qcm besitzt. Es sei y der Querschnitt der Stange in einem Abstande x von ihrem unteren Ende und $y + \varDelta y$ der Querschnitt bei $x + \varDelta x$, Dann ist $f \cdot \varDelta y$ offenbar gleich dem Gewicht des kleinen Teilchens zwischen x und $x + \varDelta x$. Dieses Teilchen hat das Volumen $y \cdot \varDelta x$, und wenn w das spezifische Gewicht des Materials ist, so wird also:

$$f \cdot \varDelta y = w \cdot y \cdot \varDelta x,$$

oder richtiger:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{f} y.$$

Daraus folgt dann, wie vorhin:

$$y = b \cdot e^{\frac{w}{f} x}. \tag{5}$$

Nun wollen wir annehmen, dafs der Querschnitt y_0, d. i. der Querschnitt bei $x = 0$, gerade ausreicht, um die unten an der Stange hängende fremde Last W zu tragen, sodafs also $W = f y_0$ ist. Dann

bilden wir Gleichung (5) für diesen tiefsten Punkt und erhalten daraus $y_0 = b$, weil $e^0 = 1$ ist.

Daraufhin können wir aus (5) ohne weiteres die Kurve berechnen, nach der sich die Stange von oben nach unten verjüngen muss.

Beispiel 4. **Zinseszinsen.** 100 Mark, welche zu 3 % pro Jahr ausgeliehen sind, wachsen am Ende eines Jahres auf 103 Mark an. Während des zweiten Jahres werden die Zinsen für das bereits auf 103 M. angewachsene Kapital berechnet; daher ist auch der Zuwachs für das zweite Jahr gröfser als für das erste und wächst in gleicher Weise für jedes folgende Jahr immer mehr.

In den meisten Fällen erfolgt nun die Berechnung und der Zuschlag der Zinsen nur alle 12 Monate einmal; beides könnte aber gerade so gut alle 6 oder alle 3 Monate, oder wöchentlich oder täglich oder gar jede Stunde erfolgen. Dann würden wir anstatt des sprungweisen Wachsens ein mehr *stetiges Zunehmen* des Kapitals beobachten, ein Vorgang, der den natürlichen physikalischen Prozessen besser entspricht. So wollen wir uns einmal vorstellen, dafs die Zinseszinsen auf das ursprüngliche Kapital *kontinuierlich* angerechnet werden, nicht ruckweise nur am Ende eines jeden Jahres, und zwar unter Zugrundelegung eines Zinsfufses von r % pro Jahr. Es sei P das Kapital am Ende von t Jahren; dann ist der Zuwachs für die Zeit dt gleich $\frac{r}{100} P \cdot dt$, oder es ist $\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100} P$. Folglich erhalten wir durch Anwendung von Gleichung (2):

$$P = b \cdot e^{\frac{r}{100} t},$$

wobei $b = P_0$ das ursprüngliche Kapital zur Zeit $t = 0$ ist.

Beispiel 5. **Gleiten eines Riemens auf einer Riemscheibe.** Für die Untersuchung dieser Gleiterscheinungen ist es zweckmäfsig, sich die Riemscheibe als feststehend vorzustellen, sodafs man das Gleiten, wenn es eintritt, auch wirklich sehen kann.

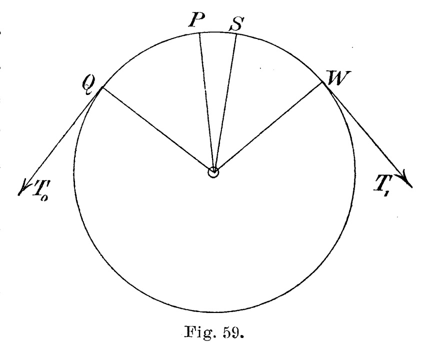


Fig. 59.

Der Zug an dem einen Trum bei dem Punkte W sei T_1, der am anderen Trum bei Q heifse T_0. Wenn nun der Riemen von Q nach W hin gleiten soll, so muss T_1 nicht nur den Zug T_0 überwinden, sondern aufserdem auch noch die Reibung zwischen Riemen und Scheibe.

Wir betrachten die Riemenspannung T im Punkte P (Figur 59); der Winkel QOP werde θ genannt; die Spannung bei S ist dann entsprechend gleich $T + \varDelta T$, während der Winkel $\sphericalangle QOS$ gleich $\theta + \varDelta\theta$ ist. Figur 60 zeigt den betrachteten Teil der Riemscheibe in starker Vergröſserung, da $\varDelta\theta$ in Wirklichkeit sehr klein angenommen wird. Um die Kraft, mit welcher das kleine Riemenstück PS gegen die Scheibe gedrückt wird, zu bestimmen, lassen wir PS immer kleiner und kleiner werden; dann sehen wir leicht ein, daſs der resultierende Druck gleich $T \cdot \theta\varDelta$ ist*), sodaſs also $\mu T \cdot \varDelta\theta$ die Reibung für diesen Teil der Scheibe bezeichnet, wenn μ der Reibungskoeffizient ist. Diesen Reibungswiderstand muſs die Zugkraft $\varDelta T$ überwinden. Halten sich $\mu T \cdot \varDelta\theta$ und $\varDelta T$ gerade das Gleichgewicht, so steht der Riemen eben im Begriff zu gleiten.

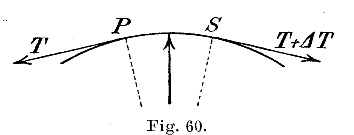


Fig. 60.

Dann gilt $\mu T \cdot \varDelta\theta = \varDelta T$, sodaſs wir für unendlich abnehmendes $\varDelta\theta$ zu:

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu T$$

und damit wieder zum Zinseszinsgesetze geführt werden.

Hieraus folgt:

$$T = b \cdot e^{\mu\theta}.$$

Wir setzen nun $T = T_0$ für $\theta = 0$, $T = T_1$ für $\theta_1 = \sphericalangle QOW$ ein und erhalten dann:

$$T_0 = b; \; T_1 = T_0 e^{\mu\theta_1}.$$

Um die durch den Riemen zu übertragende Leistung N (in Pferdestärken) in die Rechnung einführen zu können, müssen wir uns erinnern, daſs $N = \frac{(T_1 - T_0)V}{75}$ ist, wenn T_1 und T_0 in Kilogramm ausgedrückt sind und V die Riemengeschwindigkeit in Metern pro Sekunde bezeichnet. Wir sehen also, daſs es von T_1 abhängt, ob

*) Von zwei gleichen Kräften T, die einen kleinen Winkel $\varDelta\theta$ mit einander bilden, soll hier die Resultierende gesucht werden: die drei Kräfte sind parallel den drei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks, Figur 61, wobei $AB = CA$ die Kräfte T darstellen, BAC den Winkel $\varDelta\theta$ und BC diejenige Kraft, welche den beiden anderen das Gleichgewicht hält. Nun ist es augenscheinlich, daſs bei immer kleiner und kleiner werdendem $\varDelta\theta$ sich der Wert $\frac{BC}{AB}$ mehr und mehr dem Werte $\varDelta\theta$ nähert, sodaſs also die Resultierende mehr und mehr dem Werte $T \cdot \varDelta\theta$ gleichkommt.

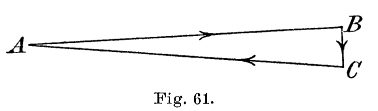


Fig. 61.

ein Riemen durchzieht oder nicht; aus diesen Betrachtungen können wir die wohlbekannten Gesetze für Riemenbetrieb leicht ableiten.

Beispiel 6. **Änderung des Luftdruckes mit der Höhe.**

An einem Orte, welcher h Meter über einer gegebenen Niveaufläche liegt, betrage der Druck der atmosphärischen Luft p kg pro qm, in der Höhe $h + \Delta h$ sei der Druck $p + \Delta p$. Die Zahl Δp ist negativ, wenn Δh positiv ist; der Druck in der Höhe h ist in der That gröſser, als der in der Höhe $h + \Delta h$, nämlich um das Gewicht eines Luftvolumens von Δh cbm Inhalt. Bedeutet w das Gewicht eines Kubikmeters Luft in kg, so ist also $-\Delta p = w \cdot \Delta h$. Nun gilt aber $w = cp$, worin c eine bestimmte Konstante ist, **vorausgesetzt, daſs die Temperatur überall gleich bleibt.** Daraus ergiebt sich dann $-\Delta p = cp \cdot \Delta h$ und also für unendlich abnehmendes Δh:

$$\frac{dp}{dh} = -cp. \tag{1}$$

Folglich haben wir wieder wie vorhin das Gesetz der Zinseszinsen: der Betrag, um welchen beim Höhersteigen um einen Meter der Luftdruckt sinkt, oder um den beim Abwärtsgehen um einen Meter das Barometer steigt, ist proportional dem Luftdrucke selbst. Daraus folgt $p = a e^{-ch}$, wobei a eine Konstante ist. Ist $p = p_0$ für $h = 0$, so erhalten wir $a = p_0$, sodaſs das Gesetz lautet:

$$p = p_0 e^{-ch}. \tag{2}$$

Was nun den Wert c anbetrifft, so finden wir leicht, daſs er gleich $\frac{w_0}{p_0}$ ist, worin w_0 das Gewicht eines cbm Luft beim Drucke p_0 bedeutet. Ist ferner t die konstante (absolute) Temperatur, und bezeichnet jetzt w_0 das Gewicht von einem cbm Luft bei 0^0 Celsius oder 273^0 absoluter Temperatur und dem Drucke p_0, so ergiebt sich:

$$c = \frac{w_0 \cdot 273}{p_0 t}.$$

Nun wollen wir einmal annehmen, daſs die **Temperatur nicht konstant** sei, sondern daſs w **sich nach dem adiabatischen Gesetze ändere**; dann ist $p \cdot w^{-\gamma}$ konstant, sodaſs man $w = cp^{\frac{1}{\gamma}}$ hat, wobei γ für Luft gleich 1,414 ist. Dann nimmt die oben aufgestellte Gleichung $-\Delta p = w \cdot \Delta h$ die Gestalt an:

$$-\Delta p = cp^{\frac{1}{\gamma}} \Delta h \quad \text{oder} \quad -\frac{\Delta p}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = c\Delta h.$$

Man wird somit zu der Beziehung:

$$-\frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = c \cdot dh$$

geführt und findet durch Integration:

$$-\int \frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = ch + C \quad \text{oder} \quad \frac{-\gamma}{\gamma - 1} p^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = ch + C.$$

Ist $p = p_0$ bei $h = 0$, so können wir C ermitteln und erhalten dann:

$$(3) \qquad p^{1-\frac{1}{\gamma}} = p_0^{1-\frac{1}{\gamma}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} ch$$

als Gesetz für die Abnahme des atmosphärischen Luftdruckes mit wachsender Höhe. Dies Gesetz stimmt mit der Wirklichkeit im allgemeinen besser überein, als das, welches wir vorhin unter der Annahme konstanter Temperatur ableiteten.

Die adiabatische Zustandsgleichung $pv^\gamma = b$, unter b eine Konstante verstanden, können wir kombinieren mit dem stets gültigen Gesetze: $p \cdot v = Rt$; dann ergiebt sich, dafs die absolute Temperatur proportional ist mit $p^{1-\frac{1}{\gamma}}$. Beachten wir noch, dafs $b^\gamma = c$ ist, so erhalten wir aus Gleichung (3):

$$t = t_0 - \frac{1}{R} \frac{\gamma - 1}{\gamma} h,$$

d. h. **die Temperaturabnahme pro Meter nach oben hin ist in einer solchen Gasmasse konstant.** (Vergleiche Artikel 74, Gleichung (4) für $v = 0$.)

Beispiel 7. **Ein Schwungrad werde durch Reibung in einer Flüssigkeit gebremst;** α sei die Winkelgeschwindigkeit, J das Trägheitsmoment des Rades. Der Widerstand der Flüssigkeit sei ein Drehmoment, welches der Geschwindigkeit proportional ist, also durch $F\alpha$ bezeichnet werden kann. Dann ist:

$$(1) \qquad F\alpha = -J \cdot \text{Winkelbeschleunigung}$$

oder:

$$(2) \qquad J\frac{d\alpha}{dt} + F\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{F}{J}\alpha.$$

Hier ist die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit proportional der Winkelgeschwindigkeit selbst. Wir haben also wieder das Gesetz der Exponentialfunktion und erhalten als Auflösung:

(3) $$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{F}{J}t},$$

worin α_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

Wir wollen nun diesen soeben betrachteten Vorgang mit dem Falle vergleichen, wo ein Schwungrad durch die **Reibung an einem festen Körper** gebremst wird. Es sei a das *konstante* bremsende Drehmoment; dann liefert die Gleichung (1):

$$a = -J\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{a}{J} = 0,$$

$$\alpha = -\frac{at}{J} + \text{constans},$$

oder endlich:

(4) $$\alpha = \alpha_0 - \frac{at}{J},$$

worin wieder α_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

Kehren wir jetzt zum ersten Falle zurück, wo eine Flüssigkeit die bremsende Kraft erzeugte, und nehmen wir an, dafs eine *veränderliche treibende Drehkraft* M auf das Schwungrad wirke, so erhalten wir die Beziehung:

(5) $$M = F\alpha + J\frac{d\alpha}{dt}.$$

Man beachte die Analogie zwischen diesem Falle und dem folgenden Gesetze über elektrische Ströme.

Beispiel 8. **Elektrischer Stromkreis.** Das Ohmsche Gesetz liefert für konstante Ströme die Gleichung $V = RC$, wobei R den Widerstand des Stromkreises, C die Stärke des fliefsenden Stromes und V die Spannung bedeutet. Gewöhnlich messen wir dabei R in Ohm, C in Ampère, V in Volt.

Ist der Strom nicht konstant, so lautet das Gesetz:

(1) $$\boldsymbol{V = RC + L\frac{dC}{dt}},$$

wobei $\frac{dC}{dt}$ die Zunahme des Stromes in Ampère pro Sekunde angiebt; L ist der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises und wird in Henries gemessen. Offenbar ist L die elektromotorische Gegenkraft, welche entsteht, wenn die Stromstärke pro Sekunde um 1 Ampère anwächst.

Fall 1. In Gleichung (1) sei $V = 0$; dann ist

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{L}C,$$

und dies ist wieder das Zinseszinsgesetz.

Folglich gilt:

(2) $$\boldsymbol{C = C_0 e^{-\frac{R}{L}t}}.$$

Fall 2. Es sei $C = a + b e^{-gt}$. Dann ist:

$$\frac{dC}{dt} = -gbe^{-gt},$$

sodaſs aus (1) folgt:

$$V = Ra + (Rb - Lgb)e^{-gt}.$$

Nun möge $R = Lg$, $g = \frac{R}{L}$ sein; dann haben wir:

$$V = Ra.$$

Wir sehen also, daſs unter Umständen die Spannung konstant bleiben kann, obwohl die Stromstärke sich ändert. Setzen wir den betrachteten Wert g in die für C vorgeschriebene Gleichung ein und benutzen noch die Bezeichnung V_0 für die konstante Spannung, sodaſs also $a = \frac{V_0}{R}$ wird, so finden wir:

(3) $$C = \frac{V_0}{R} + be^{-\frac{R}{L}t}.$$

Nehmen wir an, daſs zur Zeit $t = 0$ auch die Stromstärke $C = 0$ sei, so wird $b = -\frac{V_0}{R}$, und folglich können wir schreiben:

(4) $$C = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Nach dieser Gleichung kann für jeden beliebigen Fall die Kurve entworfen werden, welche zeigt, in welcher Weise der Strom C anwächst, wenn eine konstante Spannung V_0 an den Stromkreis angelegt wird. Als Beispiel zeichne man die Kurve für $V_0 = 100$, $R = 1$, $L = 0{,}01$. Wie groſs ist die schlieſslich erreichte Stärke des Stromes?

99. Einfache Übungen in der Differentiation und Integration von e^{ax}.

1) Auf Grund der ersten Gleichung in Art. 70 bestimme man den **Krümmungsradius** r der Exponentialkurve $y = e^x$ an der Stelle $x = 0$, $y = 1$.

Antwort: $r = \sqrt{8}$.

2) Man bestimme die Gleichung der **Tangente** der Kurve $y = be^{\frac{x}{a}}$ mit dem Berührungspunkte x_1, y_1.

$$\text{Antwort:}\ \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1}{a}.$$

An derselben Stelle bestimme man die Gleichung der **Normale**.

$$\text{Antwort:}\ \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{y_1}.$$

Man bestimme die Länge der zugehörigen **Subnormale**.

$$\text{Antwort:}\ y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{a}.$$

Man berechne die Länge der zugehörigen **Subtangente**.

$$\text{Antwort:}\ y : \frac{dy}{dx} = a.$$

3) Man bestimme den **Krümmungskreis** der **Kettenlinie**

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

an irgend einer Stelle.

$$\text{Antwort:}\ r = \frac{y^2}{c}.$$

Speziell im Scheitelpunkt hat man $y = c$ und also $r = c$.

4) Man setze $y = Ae^{iax}$, wo $i = \sqrt{-1}$ sein soll. Indem man beachtet, dafs i eine den Gleichungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $\cdots$ genügende Zahl ist, zeige man die Gültigkeit der Regel:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y.}$$

5) Man bestimme α in $y = Ae^{\alpha x}$ so, dafs die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

gültig ist. Man zeige, dafs es zwei zulässige Werte α giebt, und dafs auch:

$$y = A \cdot e^{-4x} + B \cdot e^{-3x}$$

die vorstehende Gleichung befriedigt.

6) Man bestimme die **Subtangente und Subnormale der Kettenlinie** von der Gleichung $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$, welche man vielfach auch in der Gestalt $y = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ schreibt.

Antwort: Die Subtangente ist:

$$c\frac{e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}}=c\cdot\operatorname{cotgh}\left(\frac{x}{c}\right),$$

die Subnormale ist:

$$\frac{c}{4}\left(e^{\frac{2x}{c}}-e^{-\frac{2x}{c}}\right)=\frac{c}{2}\sinh\left(\frac{2x}{c}\right).$$

7) Die Länge $\overline{PS}$ in Figur 8 (S. 50) bezeichnet man als „Tangente im speziellen“ oder auch schlechthin als „Tangente“; im Falle der Kettenlinie finden wir hierfür:

$$\frac{c}{2}\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}.$$

Entsprechend heifst die Strecke $\overline{PQ}$ in Figur 8 „Normale im speziellen“ oder schlechthin „Normale“; bei der Kettenlinie gewinnen wir für die letztere:

$$c\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{y^2}{c}.$$

8) Man bestimme die **Bogenlänge** der Kettenlinie. Die hierbei anzuwendende Regel ist schon in Art. 38 entwickelt. Figur 62 zeigt

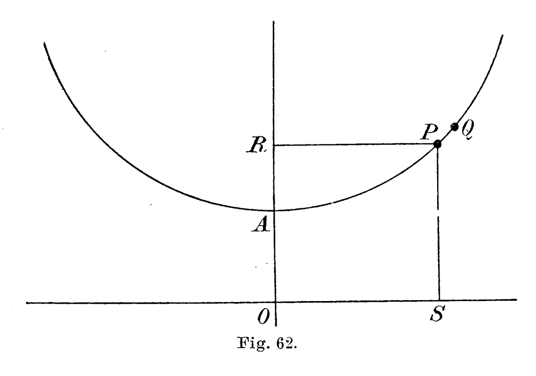


Fig. 62.

die Gestalt der Kurve; O ist der Nullpunkt des Koordinatensystems, die Länge $\overline{AO}$ ist gleich c. Die Koordinaten des Punktes P seien x und y.

Man findet nun:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Quadriert man rechts und links, fügt beiderseits 1 hinzu und zieht hierauf die Quadratwurzel, so folgt:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{ds}{dx}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Durch Integration von ds findet man jetzt als Länge s des Bogens $\widehat{AP}$:

$$s=\int_0^x \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)dx=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

wenn x die Abscisse $\overline{OS}$ des Punktes P ist. Wir können hierfür schreiben:

$$s=c\sinh\left(\frac{x}{c}\right).$$

9) Man bestimme den **Flächeninhalt** des durch die **Kettenlinie** eingegrenzten Stückes $OAPS$ (cf. Figur 62). Der Inhalt ist gegeben durch:

$$\int_0^{\overline{OS}}\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)dx=\frac{c^2}{2}\left[e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right]_0^{\overline{OS}}=\frac{c^2}{2}\left(e^{\frac{\overline{OS}}{c}}-e^{-\frac{\overline{OS}}{c}}\right).$$

Diesem Ausdrucke kann man auch die Gestalt geben:

$$c^2\sinh\left(\frac{x}{c}\right),$$

wenn x wieder die Abscisse $\overline{OS}$ von P bedeutet.

Man lasse die Kettenlinie um die x-Axe rotieren und bestimme den Inhalt der entstehenden Oberfläche, die ungefähr wie die Oberfläche einer Sanduhr aussieht. Wir berechnen zunächst wie oben:

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right),\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Nach der in Art. 48 entwickelten Regel ergiebt sich hieraus als Inhalt der von dem Bogen AP bei der Rotation um die x-Axe beschriebenen Fläche:

$$\frac{\pi c}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)^2dx=\frac{\pi c^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{c}}-e^{-\frac{2x}{c}}\right)+\pi c x.$$

Merkwürdigerweise sind verschiedene **Vulkane** so gestaltet, dafs ein axialer Schnitt eine durch die Exponentialfunktion darstellbare Schnittkurve liefert.

Der Radius an der Basis des Bergkegels sei a und der Radius des oberen Plateaus b; die Höhe werde durch h bezeichnet. Wir

wollen auf Grund der in Art. 46 entwickelten Regel den **Rauminhalt** des Berges berechnen. Die Meridiankurve wird, wenn wir die Bergaxe als x-Axe wählen und die y-Axe auf dem Plateau gelegen annehmen, durch $y = be^{cx}$ dargestellt sein, wo c die Bedeutung:

$$c = \frac{1}{h} \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

besitzt. Die Oberfläche des Berges entsteht durch Drehung der Meridiankurve um die x-Axe. Als Volumen ergiebt sich:

$$\pi \int_0^h b^2 e^{2cx} dx = \frac{\pi b^2}{2c}\Big[e^{2cx}\Big]_0^h = \frac{\pi b^2}{2c}(e^{2ch} - 1).$$

Setzen wir $be^{ch} = a$ ein, so erhalten wir das Resultat $\frac{\pi}{2c}(a^2 - b^2)$.

100. Harmonische Funktionen. Der Leser hat bereits beim Studium von Art. 9 Gelegenheit gehabt, **Sinuskurven**, wie solche durch die Gleichung:

$$(1) \qquad y = a \sin(bx + c)$$

dargestellt sind, im Quadratnetze zu zeichnen, und er wird dabei die Bedeutung der Koeffizienten a, b, c kennen gelernt haben. Wir können hier nicht nochmals ausführlich auf das Zeichnen dieser Kurven zurückkommen. Der Leser wiederhole diese Zeichnungen und überlege, wann man die Kurve als eine „Kosinuskurve" bezeichnen darf. (Offenbar ist die letztere Benennung am Platze, wenn $c = \frac{\pi}{2}$ oder in Gradmaſs gemessen $= 90^0$ ist.) Wie groſs auch x werden mag, der Wert von $\sin(bx + c)$ kann weder über 1 hinaus wachsen noch unter -1 herabsinken. Natürlich sind dem Leser die folgenden speziellen Werte des Sinus geläufig:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707,$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866,$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707, \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\pi = 0 \text{ *)},$$

wie andrerseits die allgemeinen Regeln:

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

*) Den hier betrachteten Werten $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \cdots$ entsprechen die in Gradmaſs gemessenen Winkel 30^0, 45^0, 60^0, ...

Die zuletzt angegebenen Formeln kommen in dem wellenförmigen Verlauf der Sinuskurve zum Ausdruck. Da übrigens der Sinus, absolut genommen, niemals gröfser als 1 werden kann, so wird die in (1) dargestellte Funktion zwischen den Extremwerten $+a$ und $-a$ hin- und herschwanken. Dieserhalb wird a als **Amplitude** der Kurve oder der Funktion (1) bezeichnet.

Ist $x = 0$, so folgt $y = a \sin c$, woraus man die Bedeutung von c ableiten kann. Zu letzterem Zwecke kann man auch $bx = -c$ und also $x = -\frac{b}{c}$ eintragen, was $y = 0$ liefert. Bedeutet x die Zeit und bx den Winkel, um welchen sich eine Kurbel oder ein Excenter gedreht hat, so trägt c verschiedene Benennungen. Der Maschineningenieur nennt c den Voreilwinkel der Steuerung; der Elektrotechniker bezeichnet c als Phasenverschiebungswinkel.

Hat bx um den Betrag 2π zugenommen, so kehren dieselben Werte y genau in der ursprünglichen Anordnung wieder; wir dürfen dieserhalb $\frac{2\pi}{b}$ als die Periode der in (1) dargestellten Funktion bezeichnen.

Neben der in Artikel 9 entwickelten Regel sei noch folgende Methode zur Darstellung der Sinuskurven angegeben. Die Kenntnis der ersten Elemente der Trigonometrie wird zeigen, dafs beide Mafsregeln zum gleichen Ergebnisse führen müssen. Was wir hier ausführen wollen, stimmt übrigens genau überein mit der Zeichnung eines Schraubenganges in der Aufrifsprojektion.

Man ziehe die Gerade OM und beschreibe einen Kreis vom Radius a um O. Die Gerade soll die x-Axe werden, im Punkte B

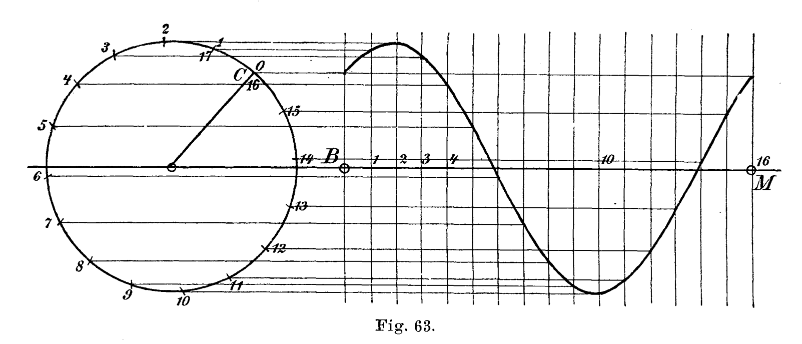


Fig. 63.

(cf. Figur 63) errichten wir die y-Axe senkrecht zur x-Axe. Man ziehe den Radius OC unter einem Winkel gegen OB, dessen Bogenmafs c ist.

Nun teile man die Peripherie von C aus in irgend eine Anzahl, etwa 16, gleiche Teile und nenne die Teilpunkte, wie in Figur 63 angedeutet ist, 0, 1, 2, ... Nach einmaliger Umlaufung der Peripherie bezeichnen wir die gleichen Teilpunkte mit 16, 17, 18, ..., nach zweimaliger Durchlaufung mit 32, 33, 34, ... Andrerseits trage man von B aus auf der positiven x-Axe die Länge $\frac{\pi}{8b}$ wiederholt ab und nenne die Teilpunkte, mit B selbst beginnend, 0, 1, 2, 3, ... Indem man jetzt, wie die Figur ausführt, durch je zwei entsprechende Teilpunkte eine horizontale bez. vertikale Gerade legt, gewinnt man eine Anzahl von Punkten der durch (1) dargestellten Sinuskurve. Die Strecke $\overline{BM} = \frac{2\pi}{b}$ liefert die Periode.

Ist OC eine in einer vertikal gestellten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit gedrehte Kurbel, so liefert (1) in y die Entfernung des Punktes C von OM, $bx + c$ bedeutet den Winkel, welchen OC zu irgend einer Zeit x gegen OM bildet. Infolge dessen wird b die Winkelgeschwindigkeit darstellen und $\frac{2\pi}{b}$ die Zeit einer einmaligen Umdrehung und damit die Periode der Bewegung. Endlich bedeutet y den Weg eines Kreuzkopfes, von seiner Mittellage aus gerechnet, wobei wir uns vorstellen müssen, dafs der Kreuzkopf durch eine unendlich lange vertikale Pleuelstange mit dem Punkte C verbunden ist.

Eine sogenannte einfache harmonische Bewegung eines Punktes wird dargestellt durch $s = a \sin(bt + c)$, wo s den Abstand des Punktes von seiner mittleren Lage, a die Amplitude und c die Voreilung oder Nacheilung in Bogenmafs bedeutet; b ist gleich $\frac{2\pi}{T}$ oder $2\pi f$, wenn T die Dauer eines einmaligen Umlaufs oder f die Anzahl der Umläufe in der Zeiteinheit darstellt. Wir erhalten diese Bewegung, wenn wir einen die Peripherie eines Kreises mit konstanter Geschwindigkeit beschreibenden Punkt auf einen einzelnen Durchmesser des Kreises projizieren (gerade wie wir die Jupitertrabanten hin- und herpendeln sehen, wenn ihre Bahnebene verlängert durch den Standpunkt des Beobachters geht). Auch fanden wir eben schon in der Bewegung eines Kreuzkopfes bei gleichförmig rotierender Kurbel ein Beispiel für die einfache harmonische Bewegung. Wie wir später sehen werden, beschreibt ferner diese Art der Bewegung ein Körper unter Wirkung einer Kraft, die dem Abstande von einer mittleren Gleichgewichtslage proportional ist. Die Hoch- und Niedergänge eines an einer Spiralfeder hängenden Körpers oder auch die Hin- und Hergänge eines Pendels bei sehr kleinen Ausschlagwinkeln sind Beispiele hierfür.



Wir haben es hier mit der einfachsten Art schwingender Bewegung zu thun. Zahlreiche Paare von Gröfsen sind durch solch ein Sinusgesetz an einander gebunden, wie in den obigen Beispielen Weg und Zeit; und wir diskutieren die einfache harmonische Bewegung, wie ich meine, weniger aus theoretischen Gründen, als weil sich dieselbe bei zahlreichen Vorgängen einstellt.

101. Als Regeln der Differentiation und Integration der Funktion:

$$y = a \sin (bx + c)$$

geben wir vorläufig ohne Beweis die folgenden an:

$$\frac{dy}{dx} = ab \cos (bx + c),$$
$$\int y \cdot dx = -\frac{a}{b} \cos (bx + c).$$

Wir bestätigen diese Regel zunächst für $c = 0$, $a = 1$, $b = 1$, wobei wir also den Differentialquotienten von:

(1) $$y = \sin x$$

zu berechnen haben.

In gewohnter Weise lassen wir x um $\varDelta x$ wachsen, wobei y in $y + \varDelta y$ übergeht:

(2) $$y + \varDelta y = \sin (x + \varDelta x).$$

Zieht man Gleichung (1) von (2) ab, so folgt:

$$\varDelta y = \sin (x + \varDelta x) - \sin x$$

oder unter Benutzung einer in Art. 3 angegebenen Regel:

$$\varDelta y = 2 \cos (x + \tfrac{1}{2} \varDelta x) \sin \tfrac{1}{2} \varDelta x.$$

Jetzt folgt weiter:

(3) $$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \cos (x + \tfrac{1}{2} \varDelta x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \varDelta x}{\frac{1}{2} \varDelta x}.$$

Zeichnet man sich nun einen sehr kleinen Winkel α und vergegenwärtigt sich die Bedeutung von $\sin \alpha$ und vom Bogenmafs α des Winkels, so sieht man sehr leicht, was aus $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ für kleiner und kleiner werdendes α wird. In Figur 64 ist der Quotient des Bogens AP und des Radius OP gleich dem Bogenmafs α des Winkels. Der Quotient des Lotes BP und des Radius OP liefert $\sin \alpha$. Es folgt $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{PB}{PA}$, und es ist evident, dafs der hier rechts stehende Quotient

Fig. 64.

der Einheit 1 näher und näher kommt, je kleiner α wird. **In der That nähern sich die Quotienten der drei Gröfsen α, $\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$ mehr und mehr dem Grenzwerte 1, je mehr α der Null nahe kommt.** Setzen wir in (3) rechts für $\frac{1}{2}\Delta x$ den Winkel α ein, so ergiebt diese Regel beim Grenzübergang für unendlich abnehmendes Δx:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \cos x,} \text{ falls } \boldsymbol{y = \sin x} \text{ ist.}$$

Umgekehrt folgt hieraus:

$$\int \cos x \, dx = \sin x.$$

Die Behandlung des etwas allgemeineren Falles:

$$\boldsymbol{y = a \sin(bx + c)}$$

kann in derselben Weise geschehen. Man hat hier:

$$y + \Delta y = a \sin[b(x + \Delta x) + c],$$

$$\Delta y = 2a \cos(bx + c + \tfrac{1}{2}b \cdot \Delta x) \sin(\tfrac{1}{2}b \cdot \Delta x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ab \cdot \cos(bx + c + \tfrac{1}{2}b \cdot \Delta x) \frac{\sin(\frac{1}{2}b \cdot \Delta x)}{\frac{1}{2}b \cdot \Delta x}.$$

Wird jetzt Δx unendlich klein, so folgt:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = ab \cos(bx + c)}$$

und daraus umgekehrt:

$$\boldsymbol{\int a \cos(bx + c)\, dx = \frac{a}{b} \sin(bx + c).}$$

Wollen wir andererseits die Funktion

$$\boldsymbol{y = a \cos(bx + c)}$$

differenzieren, so benutzen wir, dafs dieselbe auch so geschrieben werden kann:

$$y = a \sin\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right) = a \sin(bx + c').$$

Es ergiebt sich also:

$$\frac{dy}{dx} = ab \cos(bx + c') = ab \cos\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -ab \sin(bx + c).}$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus:

$$\boldsymbol{\int a \sin(bx + c)\, dx = -\frac{a}{b} \cos(bx + c).}$$

102. Natürlich ist es nicht ausreichend, die vorstehenden Regeln nur bewiesen zu haben; man mufs sich auch wirklich mit denselben



vertraut machen. Der Leser bediene sich dieserhalb zur näheren Veranschaulichung der gewonnenen Sätze einer trigonometrischen Tafel. Dabei darf man nur nicht vergessen, daſs in $\sin x$ und $\cos x$ der Wert x den in Bogenmaſs gemessenen Winkel darstellt, während die Tafeln meist die Winkel in Gradmaſs angeben. Man lege sich ein kleines Täfelchen an, wie wir es hier aufs Geratewohl herausgegriffen haben:

Winkel in Gradmaſs	$x =$ Winkel in Bogenmaſs	$y = \sin x$	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Mittelwert für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
40	0,6981	0,6427876	0,0132714	0,7583	0,7547
41	0,7156	0,6560590	0,0130716	0,7512	
42	0,7330	0,6691306			

Man beachte, daſs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in jedem Falle genau gleich $\frac{dy}{dx}$ für einen gewissen mittleren Winkel ist, der zwischen dem ursprünglichen und dem um 1^0 (oder um 0,01745 in Bogenmaſs) vergröſserten Winkel gelegen ist. Der Wert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird in diesem Sinne ein wenig vom Werte $\cos x$ abweichen. Hat der Leser schon nachgesehen, ob 0,7547 ein angenäherter Wert für $\cos 41^0$ ist?

103. Wie oben schon angedeutet, ist die Differentiation von

$$\boldsymbol{y = \cos x}$$

ebenso leicht durchführbar, wie die von $\sin x$. Man findet:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\sin x,}$$

$$\boldsymbol{\int \sin x \cdot dx = -\cos x.}$$

Das hier auftretende Minuszeichen ist etwas unangenehm zu behalten. Es folgt eine tabellarische Veranschaulichung:

Winkel in Gradmaſs	$x =$ Winkel in Bogenmaſs	$y = \cos x$	$-\Delta y$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Mittelwert für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
20	0,3491	0,9396926	0,0061122	$-$ 0,3513	$-$ 0,3584
21	0,3665	0,9335804	0,0063965	$-$ 0,3656	
22	0,3840	0,9271839			

Man beachte, dafs y bei zunehmendem x abnimmt. Der Sinus von 21^0 oder besser vom Werte $x = 0,3665$ ist in der That gleich 0,3584.

104. Hier noch eine andere Erläuterung der Thatsache, dafs der Differentialquotient von $\sin x$ gleich $\cos x$ ist! In Figur 65 setze man den Winkel AOP gleich ϑ und Winkel AOQ gleich $\vartheta + \varDelta\vartheta$, sodafs $\sphericalangle POQ = \varDelta\vartheta$ wird. Der zugehörige Bogen PQ soll den Radius $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ haben.

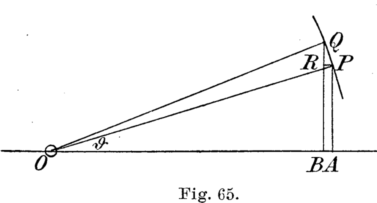


Fig. 65.

Die Linien PA und QB sollen Lote auf OA sein, ebenso soll PR senkrecht auf QB stehen.

Hier gilt nun:

$$\overline{AP} = y = \sin\vartheta, \quad \overline{BQ} = y + \varDelta y = \sin(\vartheta + \varDelta\vartheta),$$
$$\overline{PQ} = \varDelta\vartheta, \quad \overline{RQ} = \varDelta y,$$

sofern wir $\varDelta\vartheta$ äufserst klein denken. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir den Bogen PQ geradlinig annehmen und haben dann in PQR ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen bei Q gelegener Winkel gleich $\vartheta + \varDelta\vartheta$ ist.

Hieraus folgt, dafs sich $\frac{\varDelta y}{\varDelta\vartheta}$ oder $\frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}}$ für unendlich abnehmendes $\varDelta\vartheta$ der Grenze $\cos PQR$ oder $\cos\vartheta$ annähert; d. h. es folgt:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \cos\vartheta \text{ aus } y = \sin\vartheta.$$

In ähnlicher Weise folgt aus $z = \cos\vartheta = \overline{OA}$ und $dz = -\overline{BA} = -\overline{RP}$ das Resultat:

$$\frac{dz}{d\vartheta} = -\frac{\overline{RP}}{\overline{QP}} = -\sin\vartheta.$$

Derartige Erläuterungen sind stets von grofsem Werte, falls der Leser imstande ist, sie selbständig zu finden. Jede Art, sich mit den Fundamentalregeln vertraut zu machen, ist wertvoll. Doch würde es ermüdend wirken, wenn der Verfasser eines Buches gar zu viele Erläuterungen über ein und dasselbe Thema geben würde. Auch ist er leicht geneigt, solchen erläuternden Ausführungen einen zu weit gehenden Vorzug zu geben, welche er selber gefunden hat, und an denen er selbst seiner Zeit gelernt hat.

105. Man beachte noch, dafs für die Funktion $y = A \sin ax + B \cos ax$ die Gleichungen gelten:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = a^4 y.$$

Man vergleiche hiermit die Thatsache, dafs aus $y = e^{ax}$ die Gleichungen $\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 y$, $\frac{d^4 y}{dx^4} = a^4 y$ folgen. Bei den tiefer liegenden Anwendungen der Mathematik auf die technischen Wissenschaften wird diese Beziehung zwischen den beiden Funktionen e^{ax} und $\sin ax$ von Bedeutung.

Ist $i = \sqrt{-1}$ und also $i^2 = -1$, $i^4 = +1$, so gelten für $y = e^{iax}$ die Regeln:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = a^4 y,$$

genau wie bei der Funktion $y = \sin x$. (Siehe Art. 99, Beisp. 4.)

106. Übungsaufgabe. Wer sich schon mit dem Beweise des Moivreschen Satzes beschäftigt hat (dieser Beweis ist leicht; überhaupt sind alle Beweise von mathematischen Sätzen, die der Ingenieur braucht, leicht; schwierige Beweise gehören nur in wissenschaftliche Werke über Mathematik), der weifs, dafs man in allen analytischen Entwickelungen:

$$\cos ax = \frac{1}{2}(e^{iax} + e^{-iax}), \quad \sin ax = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$$

setzen kann. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit dieser Formeln wolle man aus ihnen die Differentiationsregeln für $\sin ax$ und $\cos ax$ ableiten.

107. Beispiel. Ein in sich selbst geschlossener ebener Kupferring vom Flächeninhalt A qcm möge in einem gleichförmigen magnetischen Felde von der Stärke H mit einer gleichmäfsigen Winkelgeschwindigkeit um einen Durchmesser rotieren, welcher rechtwinkelig zur Feldrichtung liegt; H soll dabei in c.g.s.-Einheiten gemessen sein. Wir bezeichnen mit θ den Winkel, welcher von derjenigen Stellung an durchlaufen ist, wo durch die Windungsfläche ein Maximum von Kraftlinien, AH, hindurchflofs. Bei der Stellung θ ist die vom Stromkreise eingeschlossene Kraftlinienzahl offenbar gleich $HA \cos\theta$. Entspricht nun dem Drehungswinkel θ eine Zeit t, und bezeichnet q die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist $\theta = qt$. Demnach gilt für die magnetische Induktion, d. h. für die Zahl der umschlossenen Kraftlinien, die Beziehung:

$$I = A \cdot H \cdot \cos qt.$$

Ihre auf eine Sekunde bezogene Zunahme ist also $-AqH \cdot \sin qt$, und so grofs ist mithin auch die in jeder Drahtwindung erzeugte elektromotorische Kraft.



Haben wir n Windungen, so ist also die gesamte erzeugte Spannung gleich $-nAqH \cdot \sin qt$ (in c.g.s.-Einheiten).

Wollen wir sie in der technisch gebräuchlichen Einheit erhalten, so müssen wir beachten, daſs 1 Volt gleich 10^8 absoluten Spannungseinheiten ist.

Die Spannung in Volt beträgt also:

$$-nAqH10^{-8}\sin qt$$

und ist eine einfache harmonische Funktion der Zeit.

Beispiel. **Die Spule eines Wechselstromgenerators** bewege sich durch ein magnetisches Feld derartig, daſs die Induktion in der Spule sich nach folgendem Gesetz ändert:

$$I = A_0 + A_1 \sin(\theta + \varepsilon_1) + A_r \sin(r\theta + \varepsilon_r),$$

worin θ den von der Spule bereits durchlaufenen Winkel bedeutet. Es sei q die relative Winkelgeschwindigkeit zwischen Spule und Feld; dann ist $\theta = qt$. Hat die Spule n Drahtwindungen, so wird die gesamte erzeugte Spannung gleich $n\frac{dI}{dt}$ oder gleich:

$$nq[A_1 \cos(qt + \varepsilon_1) + A_r r \cos(rqt + \varepsilon_r)].$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, daſs **Unregelmäſsigkeiten in der Feldstärke**, welche einem Obertone von der r-fachen Schwingungszahl entsprechen, im Werte der induzierten Spannung nicht proportional, sondern **stark vergröſsert** zur Geltung kommen.

108. Bifilare Aufhängung. Es sei W das Gewicht der aufgehängten Masse, a und b die Abstände zwischen den beiden Fäden oben und unten, h die vertikale Höhe der Fäden. Ferner sei die Differenz zwischen den Vertikalkomponenten der beiden Fadenspannungen, als Bruchteil des Gesamtgewichtes W gemessen, gleich $n \cdot W$; endlich sei θ der Winkel, welchen die Verbindungslinie der beiden unteren Befestigungspunkte mit der Ruhelage bildet. Dann ist das Drehmoment, welches die Aufhängung einer weiteren Verdrehung des Systems entgegensetzt, gleich:

$$\tag{1} \tfrac{1}{4}(1 - n^2) W \frac{ab}{h} \sin\theta.$$

Wir sehen daraus, daſs wir, um die Anordnung „empfindlicher“ zu machen, nur die Verteilung der Last auf die beiden Fäden noch ungleichmäſsiger zu machen brauchen, sodaſs n gröſser wird.

Wie hier, so ist auch in manchen anderen Fällen das Moment, mit welchem ein um den Winkel θ aus seiner Ruhelage verdrehter



Körper der weiteren Drehung widerstrebt, dem Sinus des Winkels θ proportional. Z. B. sei W das Gewicht eines **physischen Pendels** und $\overline{OG}$ der Abstand des Unterstützungspunktes vom Schwerpunkte; dann ist $W \cdot \overline{OG} \cdot \sin\theta$ das Moment, mit welchem der Körper in seine Gleichgewichtslage zurückzukehren bestrebt ist.

Oder es sei M das magnetische Moment einer **Kompaſsnadel,** welche um den Winkel θ aus ihrer Gleichgewichtslage herausgedreht ist und sich in einem Felde von der Stärke H befindet; dann ist $M \cdot H \cdot \sin\theta$ das Moment, mit welchem sie in ihre Ruhelage zurückstrebt.

Ein Körper, der unter **Torsion** eines Drahtes oder eines Fadens aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, hat eine Richtkraft, welche proportional dem Winkel θ selbst ist. Wenn aber die Winkeländerungen sehr klein sind, so können wir den Winkel θ angenähert durch $\sin\theta$ ersetzen. Zuweilen wirken auf einen Körper gleichzeitig mehrere Richtkräfte; so wird z. B. die Nadel eines Quadrantenelektrometers in erster Linie durch die bifilare Aufhängung gerichtet; auſserdem ist aber häufig noch eine **elektrische Richtkraft** vorhanden, welche durch mangelhafte Disposition oder Ausführung des Instrumentes herbeigeführt wird und angenähert in der Gestalt $a\theta + b\theta^2$ darstellbar ist. Sind die Fäden steif, so erzeugt deren Torsion noch eine dritte Richtkraft, welche proportional mit θ ist, und welche wir in Formel (1) noch nicht berücksichtigt haben. Zuweilen wird auch die Richtkraft durch eine mit dem beweglichen System starr verbundene kleine Magnetnadel erzielt; in diesem Falle ändert sie sich mit dem Sinus von θ. Bei einigen Instrumenten, wo der drehbare Körper aus weichem Eisen besteht, ist die Richtkraft nahezu proportional mit $\sin 2\theta$.

Bezeichnen wir allgemein das richtende Moment für jeden Augenblick mit M, so ergiebt sich die bei der Drehung um den Winkel $\Delta\theta$ geleistete Arbeit gleich $M \cdot \Delta\theta$. Die Arbeitsleistung bei einer Drehung von der Lage θ_1 zu der Lage θ_2 (wobei θ_2 gröſser als θ_1 sein soll) beträgt also $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta$.

Beispiel. Das Drehungsmoment, welches ein Körper einer Drehung entgegensetzt, sei gleich $a \cdot \sin\theta$, wobei θ der seit der Ruhelage durchlaufene Winkel ist. Welche Arbeit wird bei der Drehung des Körpers von der Lage θ_1 bis zur Lage θ_2 geleistet?

Antwort:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} a \cdot \sin\theta \cdot d\theta = -a(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = a(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Beispiel. Der Widerstand, welchen ein Körper der Verdrehung entgegensetzt, sei erstens ein konstantes Drehungsmoment, welches durch a bezeichnet werden soll, zweitens ein Einfluſs von der Gestalt $b\theta + c\theta^2$ und drittens ein Moment $k \sin\theta$. Welche Arbeit wird bei der Verdrehung von der Lage $\theta = 0$ bis zu irgend einem beliebigen Winkel geleistet?

Das zu überwindende Drehmoment M hat die Gestalt:

$$M = a + b\theta + c\theta^2 + k\sin\theta.$$

Diese Funktion von θ wollen wir mit $f(\theta)$ bezeichnen. Die geleistete Arbeit V ergiebt sich daraus zu:

$$V = a\theta + \tfrac{1}{2}b\theta^2 + \tfrac{1}{3}c\theta^3 + k(1 - \cos\theta),$$

und diese Funktion von θ wollen wir $F(\theta)$ nennen. Sie bezeichnet die **potentielle Energie** des Körpers in der Lage θ.

Die **kinetische Energie** eines rotierenden Körpers ist $\frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, worin J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf seine Drehaxe bezeichnet. Befindet sich der Körper in der Lage θ, so ist also seine gesamte Energie:

$$E = \tfrac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + F(\theta).$$

Unter der Annahme, daſs von dieser Gesamtenergie dem Körper bei der Schwingung nichts verloren geht, wollen wir nun die Amplitude der Schwingung bestimmen. Der Winkel θ wächst offenbar so lange, bis alle kinetische Energie in potentielle umgesetzt ist; dies möge für θ_1 erreicht sein. Die potentielle Energie für die Amplitude θ_1 ist also gleich der Summe beider Energieformen für einen anderen beliebigen Winkel θ, sodaſs wir die Beziehung erhalten:

$$\tfrac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + F(\theta) = F(\theta_1).$$

Kennen wir die kinetische Energie bei θ und die Gestalt der Funktion $F(\theta)$, so können wir aus der letzten Gleichung die Amplitude θ_1 berechnen.

Z. B. möge $M = k\sin\theta$ sein, sodaſs $F(\theta) = k(1 - \cos\theta)$ wird, dann gilt:

$$\tfrac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + k(1 - \cos\theta) = k(1 - \cos\theta_1),$$

Daraus ergiebt sich dann θ_1, die Amplitude der Schwingung, wenn die Geschwindigkeit bei θ gegeben ist.



Übungsaufgabe. Das **statische Stabilitätsmoment eines Schiffes** möge proportional $\sin 4\theta$ sein, wobei θ der Winkel ist, welchen der Mast mit der Lotrechten bildet. Ein Wind, dessen Stärke *im Beharrungszustande* eine dauernde Neigung des Schiffes von $11\frac{2}{3}^0$ herbeiführen würde, möge *plötzlich* auf das vorher gerade stehende Schiff einwirken und längere Zeit seine Stärke unverändert beibehalten. Es ist zu zeigen, daſs (unter Vernachlässigung der Reibung) das Schiff sich bis zu einem Winkel von $33\frac{1}{3}^0$ neigen und dann wieder aufrichten wird. Wie wird die Reibung dies Resultat beeinflussen?

Ein schwingender Körper befinde sich in der äuſsersten Lage θ_1; wie groſs wird seine **kinetische Energie** sein, wenn er durch die **Gleichgewichtslage** geht? Antwort: $F(\theta_1)$.

Beispielsweise sei:

$$M = b\theta + c\theta^2 + k \sin \theta.$$

Gesucht werde ω, die Winkelgeschwindigkeit in der Lage $\theta = 0$, wenn die gröſste Amplitude gleich 45^0 war. Jetzt gilt:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ und } F(\theta) = \tfrac{1}{2}b\theta^2 + \tfrac{1}{3}c\theta^3 + k(1 - \cos\theta),$$

folglich:

$$\tfrac{1}{2}J\omega^2 = \tfrac{1}{2}b\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{3}c\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

woraus der Wert ω berechnet werden kann.

Aufgabe. Angenommen, wir wünschten zu erreichen, daſs die potentielle Energie eines Körpers sich nach folgendem Gesetze ändert:

$$V = F(\theta) = a\theta^{\frac{3}{2}} + b\theta^3 + ce^{m\theta} + h \sin 2\theta.$$

Nach welchem Gesetz muſs sich dann die Richtkraft ändern? Aus der Beziehung: $M = \frac{dV}{dt}$ ergiebt sich sofort:

$$M = \tfrac{3}{2}a\theta^{\frac{1}{2}} + 3b\theta^2 + mce^{m\theta} + 2h \cos 2\theta.$$

Aufgabe. Ein Körper in der Lage θ_0 bewege sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω in solcher Richtung, daſs θ wächst. In dieser Lage **empfange er einen Drehimpuls** von der Stärke m in der Richtung seiner Bewegung. **Wie weit wird er ausschwingen?**

Die Bewegungsgröſse, deren Wert vor dem Stoſse $J\omega$ war, beträgt nachher: $J\omega + m$. Bezeichnet ω' die vergröſserte Winkelgeschwindigkeit, so gilt also: $\omega' = \omega + \frac{m}{J}\cdot$

Der Körper enthält demnach in der Lage θ_0 eine kinetische Energie $\frac{1}{2} J\left(\omega + \frac{m}{J}\right)^2$ und eine potentielle Energie $F(\theta_0)$. Setzen wir die Summe beider gleich $F(\theta_1)$, so sind wir imstande, daraus θ_1 zu bestimmen.

Der Studierende wird leicht erkennen, daſs die allgemeine Gleichung für die Schwingungsbewegung eines einer Richtkraft unterliegenden Körpers lautet:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{J} f(\theta) = 0;$$

wobei $f(\theta)$ unter anderen auch einen Ausdruck enthalten kann, welcher den Einfluſs der Reibung darstellt.

109. Übungsaufgaben. Jede einzelne der folgenden Übungsaufgaben muſs vom Leser sorgfältig bearbeitet werden; die Antworten sind für die Praxis sehr wertvoll, zumal für den **Elektrotechniker.** Bei der Bearbeitung der Aufgaben hat man mehrfach die folgenden trigonometrischen Formeln zu benutzen:

$$\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1 = 1 - 2\sin^2\vartheta,$$
$$2\sin\vartheta\cos\varphi = \sin(\vartheta+\varphi) + \sin(\vartheta-\varphi),$$
$$2\cos\vartheta\cos\varphi = \cos(\vartheta+\varphi) + \cos(\vartheta-\varphi),$$
$$2\sin\vartheta\sin\varphi = \cos(\vartheta-\varphi) - \cos(\vartheta+\varphi).$$

Solche Übungen sind nicht bloſs wertvoll als Erläuterungen zur Integralrechnung; sie vermitteln uns auch die Vertrautheit mit trigonometrischen Formeln, was für den Ingenieur von groſser allgemeiner Bedeutung ist.

Der Mittelwert einer Funktion $f(x)$ im Intervall von x_1 bis x_2 ist offenbar gleich dem Quotienten aus der durch $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ dargestellten Fläche und der Differenz $x_2 - x_1$.

Jede der Aufgaben 6 bis 20 und ebenso 23 muſs vom Leser graphisch ausgeführt werden. Gute *Handskizzen* derjenigen Kurven, deren Ordinaten im einzelnen Falle mit einander zu multiplizieren sind, sowie der so entspringenden Kurven sind ausreichend, aber auch für das volle Verständnis notwendig.

1) $\int \sin^2 ax \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$.

2) $\int \cos^2 ax \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$.



3) $\int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$

4) $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$.

5) $\int \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$.

6) Die durch die Sinuskurve im Intervall 0 bis 2π und die x-Axe eingeschlossene Fläche liegt zur Hälfte oberhalb, zur Hälfte unterhalb der x-Axe und hat dementsprechend den Gesamtinhalt Null:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{2\pi} = -(1-1) = 0.$$

7) Man bestimme den Inhalt der gleichen Fläche für das Intervall von 0 bis π; hier ergiebt sich:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi} = -(-1-1) = 2.$$

Da die Länge der Basis des damit bestimmten Flächenstückes gleich π ist, so ist die mittlere Höhe, d. h. der Mittelwert von $\sin x$ im gedachten Intervall $\frac{2}{\pi}\cdot$ Die gröfste vorkommende Höhe und damit die Amplitude der Sinusfunktion (vergl. Art. 100) ist 1.

8) Die entsprechend für die Kurve $y = a + b \sin x$ bestimmte Fläche über dem Intervall von 0 bis 2π ist gleich $2\pi a$ und die mittlere Höhe der Kurve gleich a.

9) Man bestimme den Mittelwert von $\sin^2 x$ im Intervall von 0 bis 2π.

Aus $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ folgt $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Durch Integration dieses Ausdrucks ergiebt sich $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x)$, sodafs man nach Eintragung der Grenzen erhält:

$$[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}2\pi - \tfrac{1}{4}\sin 4\pi + \tfrac{1}{4}\sin 0 = \pi.$$

Durch Division mit der Basis erhält man als Mittelwert $\frac{1}{2}$.

10) Der Mittelwert von $\cos^2 x$ im gleichen Intervall von 0 bis 2π ist ebenfalls $\frac{1}{2}$. —

In den nachfolgenden Aufgaben sollen s und r irgend zwei von einander verschiedene ganze Zahlen sein.

11) Der Mittelwert von $a \sin^2(sqt + c)$ im Intervall von $t = 0$ bis $t = T$ ist $\frac{a}{2}$, wobei s eine ganze Zahl und $q = \frac{2\pi}{T}$ sein soll. T ist hier die Periode.

12) Der Mittelwert von $a \cos^2 (sqt + c)$ von $t = 0$ bis $t = T$ ist $\frac{a}{2}$.

13) $\int\limits_0^T \cos sqt \cdot \sin sqt \cdot dt = 0.$

14) $\int\limits_0^T \sin sqt \cdot \sin rqt \cdot dt = 0.$

15) $\int\limits_0^T \cos sqt \cdot \cos rqt \cdot dt = 0.$

16) $\int\limits_0^T \sin sqt \cdot \cos rqt \cdot dt = 0.$

17) Der Mittelwert von $\sin^2 sqt$ im Intervall 0 bis $\frac{1}{2}T$ ist $\frac{1}{2}$.

18) Der Mittelwert von $\cos^2 sqt$ im Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}T$ ist $\frac{1}{2}$.

19) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}T} \sin sqt \cdot \sin rqt \cdot dt = 0.$

20) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}T} \cos sqt \cdot \cos rqt \cdot dt = 0.$

21) Man berechne $\int \sin x \cdot \sin (x + c) \cdot dx$.

Dabei benutze man:

$$\sin (x + c) = \sin x \ \cos c + \cos x \ \sin c;$$

es ist also folgendes Integral zu bestimmen:

$$\int (\sin^2 x \ \cos c + \sin x \ \cos x \ \sin c) \, dx.$$

Nun gilt:

$$\int \sin^2 x \ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4},$$

$$\int \sin x \ \cos x \ dx = \tfrac{1}{2} \int \sin 2x \ dx = - \tfrac{1}{4} \cos 2x;$$

und also liefert unser Integral:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) \cos c - \tfrac{1}{4} \cos 2x \ \sin c.$$

22) Man beweise die Formel:

$$\int \sin qt \cdot \sin (qt + c) \cdot dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2qt}{4q}\right) \cos c - \frac{1}{4q} \cos 2qt \sin c.$$

23) Man zeige, daſs der Mittelwert von $\sin qt \cdot \sin(qt \pm c)$ oder auch von $\sin(qt + a)\sin(qt + a \pm c)$ für die Zeitperiode $T\left(=\frac{2\pi}{q}\right)$ gleich $\frac{1}{2}\cos c$ ist.

Um dies ersichtlich zu machen, knüpfen wir (unter Benutzung der Abkürzung $qt + a = \varphi$) an die Gleichung an:

$$\begin{aligned}\sin\varphi\sin(\varphi \pm c) &= \sin\varphi\,(\sin\varphi\cos c \pm \cos\varphi\sin c)\\ &= \sin^2\varphi\cos c \pm \sin\varphi\cos\varphi\sin c.\end{aligned}$$

Der Mittelwert von $\sin^2\varphi$ für die Periode T ist nun gleich $\frac{1}{2}$, der von $\sin\varphi\cos\varphi$ aber gleich 0, woraus die obige Angabe hervorgeht.

Setzen wir in der vorstehenden Betrachtung $a = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich als Mittelwert von $\cos qt \cdot \cos(qt \pm c)$ der Betrag $\frac{1}{2}\cos c$.

Der Mittelwert des Produktes zweier Sinusfunktionen der Zeit von gleicher Periode T und von derselben Amplitude 1, berechnet für die ganze Periode T, ist gleich dem halben Cosinus des Phasenverschiebungswinkels.

24) Nach Art. 106 dürfen wir setzen:

$$\cos a\vartheta = \tfrac{1}{2}(e^{ia\vartheta} + e^{-ia\vartheta}),$$

$$\sin a\vartheta = \frac{1}{2i}(e^{ia\vartheta} - e^{-ia\vartheta})$$

oder umgekehrt:

$$e^{ia\vartheta} = \cos a\vartheta + i\sin a\vartheta, \qquad e^{-ia\vartheta} = \cos a\vartheta - i\sin a\vartheta.$$

Auf Grund dieser Formeln bestimme man:

$$\int e^{b\vartheta}\cos a\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Es findet sich hierfür:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int\left(e^{(b+ai)\vartheta} + e^{(b-ai)\vartheta}\right)d\vartheta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{b+ai}e^{(b+ai)\vartheta} + \frac{1}{b-ai}e^{(b-ai)\vartheta}\right]\\ &= \tfrac{1}{2}e^{b\vartheta}\left[\frac{1}{b+ai}e^{ai\vartheta} + \frac{1}{b-ai}e^{-ai\vartheta}\right].\end{aligned}$$

Trägt man hier für die Exponentialfunktionen ihre oben angegebenen Werte in Sinus und Cosinus ein, so folgt:

$$(1) \qquad \int e^{b\vartheta}\cos a\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{a^2+b^2}e^{b\vartheta}(b\cos a\vartheta + a\sin a\vartheta).$$



Auf ähnliche Art findet man:

(2) $$\int e^{b\vartheta} \sin a\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{b\vartheta} (b \sin a\vartheta - a \cos a\vartheta).$$

110. Bemerkung. In der folgenden Sammlung von Beispielen wird der Leser eine gröfsere Anzahl finden, welche nur als Wiederholung von bereits früher angestellten Betrachtungen anzusehen sind.

111. Beispiele von harmonischen Funktionen. Die Funktion $x = a \sin qt$ läfst sich darstellen durch die geradlinige Bewegung eines **Kreuzkopfes**, welcher von einer **Kurbel mit dem Radius** $\boldsymbol{a}$ unter Vermittelung einer unendlich langen Kurbelstange angetrieben wird; die Kurbel dreht sich dabei mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{q}$; x ist der Abstand des Kreuzkopfes zur Zeit t von seiner Mittellage. Zur Zeit $t = 0$ ist auch $x = 0$, und die Kurbel steht dann rechtwinklig zu ihrer Stellung im toten Punkte. Ferner ist $\boldsymbol{q = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$, wenn $\boldsymbol{T}$ **die Zeit einer Periode**, d. h. einer Umdrehung, in Sekunden, oder $\boldsymbol{f}$ **die Periodenzahl**, d. h. die Tourenzahl der Maschine pro Sekunde bedeutet.

112. Die Funktion $x = a \sin (qt + \varepsilon)$ läfst sich genau wie die vorige auf eine Kreuzkopfbewegung beziehen, mit dem alleinigen Unterschiede, dafs die Kurbel dieses Kreuzkopfes der des vorigen Beispiels **um den Winkel** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **voraneilt** (dabei ist ε natürlich in **Bogenmafs** zu messen, sodafs $\varepsilon = 1$ einen Winkel von 57,2957 Grad bezeichnet). Zur Zeit $t = 0$ hat also der Kreuzkopf seine Mittellage bereits um einen Weg $a \sin \varepsilon$ überschritten*).

---

*) Wir verweisen den Leser hier wiederum auf Art. 10 und nehmen an, dafs er Kurven gezeichnet hat, welche durch Gleichungen von der Gestalt:

(1) $x = b \cdot e^{-at} \sin (qt + \varepsilon)$

dargestellt werden. Wir können uns die einzelne solche Kurve in folgender Art durch die Rotationsbewegung einer Kurbel, welche einen Kreuzkopf antreibt, entstanden denken: Die Winkelgeschwindigkeit q der Kurbel ist konstant, den Kurbelradius müssen wir dagegen mit wachsender Zeit immer kürzer werden lassen, und zwar so, dafs seine Länge für irgend eine Zeit gleich be^{-at} ist.

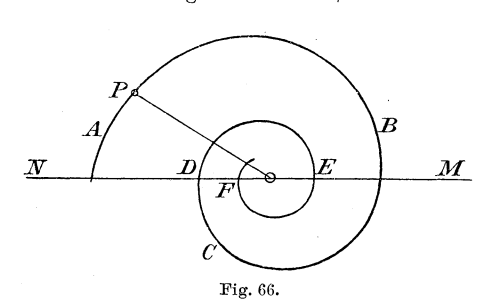


Fig. 66.

Auch noch auf eine andere Weise können wir uns die betrachtete Bewegung entstanden denken:

Wir stellen uns vor, dafs ein Punkt P (Fig. 66) mit konstanter *Winkel-*

113. Die Funktion:

$$x = a \sin(qt + \varepsilon) + a' \sin(qt + \varepsilon')$$

können wir auch in folgende Gestalt umformen:

$$x = A \cdot \sin(qt + E).$$

Das heifst: **die Summe von zwei Kurbelbewegungen der gleichen Periode kann dargestellt werden durch eine einzige Kurbelbewegung,** die wieder dieselbe Periode besitzt. Für den **Radius** und die **Voreilung** der entspringenden Kurbelbewegung gilt folgende Betrachtung. Man trage in einer Zeichnung die Lage der beiden ersten Kurbeln ein für den Augenblick $t = 0$, d. h. man mache in Fig. 67:

$$\sphericalangle YOP = \varepsilon \text{ und } \overline{OP} = a$$

$$\sphericalangle YOQ = \varepsilon' \text{ und } \overline{OQ} = a'.$$

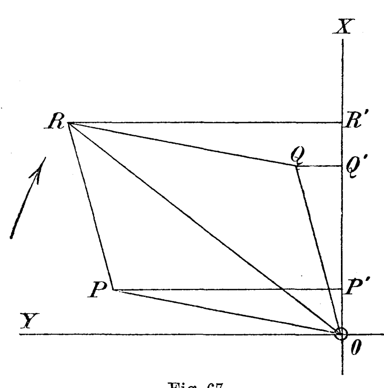


Fig. 67.

Hiernach ergänze man OP und OQ zum Parallelogramm $OPRQ$ und ziehe die Diagonale OR. Dann wird die eine Kurbel OR von der Länge $\overline{OR} = A$ mit einem Voreilungswinkel $YOR = E$ dem Kreuzkopfe die Summe der Bewegungen erteilen, welche OP und OQ ihm einzeln geben.

Der geometrische Beweis dieses Satzes ist sehr einfach: Wir nehmen an, der Kreuzkopf habe eine senkrechte Bewegung; wir ziehen OQ, OR und OP in ihren relativen Lagen zu einander für irgend eine beliebige Zeit, und projizieren dann P, R und Q auf die Axe OX. Die Kurbel OP allein würde dem Kreuzkopf in dem betrachteten Augenblicke eine Verschiebung von der Gröfse $\overline{OP'}$ aus seiner Mittellage nach oben erteilen, die Kurbel OQ allein eine Verschiebung $\overline{OQ'}$, und die Kurbel OR allein eine Verschiebung $\overline{OR'}$. Nun ist aber die Projektion der Diagonale, $\overline{OR'}$, *unter allen Umständen* gleich

---

geschwindigkeit um den Nullpunkt rotiere, wobei er aber auf der logarithmischen (gleichwinkligen) Spirale $ABCDEF$ bleiben soll. Die in Frage stehende Bewegung ist dann die Projektion der Bewegung von P auf die gerade Linie MN; und das, was wir S. 13 das logarithmische Dekrement nannten, ist gleich $\pi \cdot \operatorname{cotg} \alpha$. Dabei bezeichnet α den Winkel der Spirale, d. h. den konstanten spitzen Winkel, den der Radiusvektor des rotierenden Punktes P stets mit der Kurve bildet; es ist also $\pi \cdot \operatorname{cotg} \alpha = a \frac{T}{2}$ und $q = \frac{2\pi}{T}$, sodafs $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{a}{q}$ wird.

der algebraischen Summe der Projektionen der beiden Seiten, $\overline{OP'}$ und $\overline{OQ'}$.

Wir können den erhaltenen Satz auch folgendermaſsen ausdrücken: „Die einfache harmonische Bewegung, welche die Kurbel OP erzeugen würde, plus der einfachen harmonischen Bewegung, welche OQ erzeugen würde, ist gleich der einfachen harmonischen Bewegung, welche OR erzeugt.“ Oder in ähnlicher Ausdrucksweise: „Die einfache harmonische Bewegung, welche OR erzeugt, minus der einfachen harmonischen Bewegung, welche OP erzeugt, ist gleich der einfachen harmonischen Bewegung, welche OQ erzeugt.“ Zuweilen sagen wir auch geradezu: „Die Kurbel OR ist gleich der Summe der beiden Kurbeln OP und OQ.“ Die Kurbeln werden folglich addiert und subtrahiert genau wie Vektoren.

114. Von groſser Wichtigkeit sind diese Beziehungen bei der Berechnung von Dampfmaschinensteuerungen und ähnlichen Mechanismen. Sie sind auch für den Elektrotechniker von so hervorragender Bedeutung, daſs viele Praktiker ohne weiteres sagen: „Die Kurbel OP stelle einen Strom dar.“ Sie meinen damit folgendes: „Wir denken uns einen Strom, welcher sich mit der Zeit nach dem Gesetze:

$$C = a \cdot \sin(qt + \varepsilon)$$

ändert; sein jeweiliger Wert entspricht der Verschiebung eines Kreuzkopfes, welcher senkrecht durch eine Kurbel OP auf- und abbewegt wird, wobei a den Radius der Kurbel, q ihre Winkelgeschwindigkeit und OP ihre Lage zur Zeit $t = 0$ bedeutet.“

115. Da die Funktion $x = a \cdot \cos qt$ identisch ist mit

$$x = a \cdot \sin\left(qt + \frac{\pi}{2}\right),$$

so kann sie dargestellt werden durch die Bewegung einer Kurbel vom Radius a, deren Voreilung gerade 90^0 beträgt. Zu irgend einer beliebigen Zeit haben wir nun für die **Geschwindigkeit** des Kreuzkopfes, dessen Verschiebung durch die Funktion $x = a \cdot \sin(qt + \varepsilon)$ gegeben ist, die Gleichung:

$$v = \frac{dx}{dt} = aq \cdot \cos(qt + \varepsilon) = aq \cdot \sin\left(qt + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) \cdot$$

Diese Gleichung zeigt, daſs die *Geschwindigkeit* des Kreuzkopfes durch die jeweilige *Verschiebung eines zweiten* dargestellt werden kann, der von einer Kurbel vom Radius aq bewegt wird. Dabei muſs aber die neue Kurbel gegenüber der alten eine Voreilung von 90^0 besitzen.



Die **Beschleunigung** des Kreuzkopfes, $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2x}{dt^2}$, wird dargestellt durch die Projektion einer *dritten Kurbel* von der Länge aq^2, welche um 90^0 vor der v-Kurbel hereilt, oder um 180^0 vor der x-Kurbel. Die Beschleunigung ist nämlich gegeben durch:

$$-aq^2 \sin(qt+\varepsilon) = aq^2 \sin(qt+\varepsilon+\pi).$$

Die charakteristische Eigentümlichkeit der einfachen harmonischen Bewegung besteht eben darin, dafs numerisch die Beschleunigung das q^2-fache oder das $4\pi^2 f^2$-fache der Verschiebung beträgt, wobei f die Periodenzahl pro Sekunde bedeutet.

Folgt *irgend ein* physikalischer Vorgang dem Gesetze $a \cdot \sin(qt+\varepsilon)$, so ist er vergleichbar mit der Bewegung eines Kreuzkopfes, und wir sagen oft, dafs er durch eine Kurbel OP dargestellt wird; die **Zunahme pro Zeiteinheit** entspricht der Geschwindigkeit des Kreuzkopfes, und wir deuten sie durch eine Kurbel von der Länge aq an, welche um 90^0 vor der ersten hereilt. In der That bewirkt die Differentiation einer einfachen harmonischen Funktion nach t stets eine Multiplikation mit q und eine Voreilung um 90^0.

116. An Stelle des Ausdruckes $\boldsymbol{A \cdot \sin(qt+\varepsilon)}$ für eine einfache harmonische Bewegung benutzen wir zuweilen auch die Form:

$$\boldsymbol{a \sin qt + b \cos qt.}$$

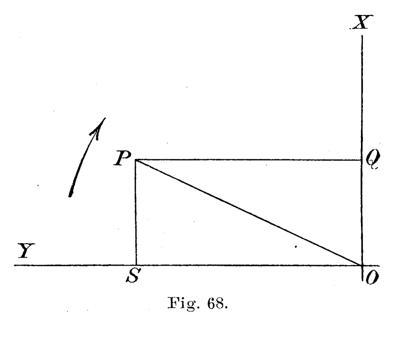


Fig. 68.

Offenbar sind beide Ausdrücke gleichwertig, wenn $a^2+b^2=A^2$ und $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}$ ist. Das läfst sich an Hand der Fig. 68 sehr leicht nachweisen: In dieser Figur sei $\overline{OS}=a$ und $\overline{OQ}=b$. Die Kurbel OP ist gleich der geometrischen Summe der Strecken OS und OQ, und $\operatorname{tang} YOP = \operatorname{tang}\varepsilon$ ist gleich $\frac{b}{a}$.

117. Wir haben bereits in Artikel 100 eine einfache graphische Methode besprochen, um die Kurve

$$x = a \cdot \sin(qt+\varepsilon)$$

zu zeichnen, worin x und t Ordinate und Abscisse sind. Es ist nun höchst lehrreich, die beiden folgenden Kurven von gleicher Periode zu zeichnen:

$$x = a \cdot \sin(qt+\varepsilon), \qquad x = a' \cdot \sin(qt+\varepsilon'),$$

und ihre Ordinaten zu einander zu addieren. Diese Ausführung wird die Überlegungen in Artikel 113 noch besser veranschaulichen.

118. Die Spannung in einem **elektrischen Stromkreise** betrage V Volt, der Strom sei C Ampère, der Widerstand R Ohm, die Selbstinduktion L Henries, die Zeit werde in Sekunden gemessen; dann ist:

$$V = RC + L\frac{dC}{dt}. \tag{1}$$

Ist nun $C = C_0 \sin qt$, so wird $\frac{dC}{dt} = C_0 q \cos qt$, folglich:

$$V = RC_0 \sin qt + LC_0 q \cos qt,$$

und daraus erhalten wir dann durch Anwendung des Artikel 116:

$$V = C_0\sqrt{R^2 + L^2q^2}\sin(qt + \varepsilon). \tag{2}$$

Den Ausdruck $\sqrt{R^2 + L^2q^2}$ nennt man den „scheinbaren Widerstand" des Stromkreises, oder seine „Impedanz". Ferner ist ε die Nacheilung des Stromes hinter der Spannung, die „Phasenverschiebung". Ihre Gröfse ist gegeben durch die Beziehung:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{Lq}{R} = \frac{2\pi Lf}{R},$$

worin f die sekundliche Periodenzahl bezeichnet.

Nehmen wir umgekehrt eine *Spannung* von reiner Sinusform als vorhanden an:

$$\boldsymbol{V = V_0 \sin qt,} \tag{3}$$

so erhalten wir für die entstehende Stromstärke den Wert:

$$\boldsymbol{C = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2q^2}}\sin\left(qt - \operatorname{arc\,tang}\frac{Lq}{R}\right).} \tag{4}$$

Eine kleine Vernachlässigung haben wir dabei allerdings schon gemacht. Denn wenn sich V gemäfs Gleichung (3) ändert, so enthält die Formel für C, genau genommen, noch **einen Ausdruck, der mit wachsendem t allmählich verschwindet.** Derselbe charakterisiert den *Anfangszustand* der periodischen Schwingung; in Artikel 98, Beispiel 8, ist er uns bereits begegnet, und in Artikel 147 werden wir auch seine Ursache noch näher kennen lernen. Bei unserer jetzigen Gleichung (4) ist indessen vorausgesetzt, dafs die sinusartig wechselnde Spannung V bereits seit einer längeren Zeit wirksam ist. Für die in der Praxis vorkommenden Fälle genügt ein kleiner Bruchteil einer Sekunde, um diesen allmählich verschwindenden Einflufs vollkommen bedeutungslos werden zu lassen.

119. Das Charakteristische der einfachen harmonischen Bewegung können wir zum Ausdruck bringen durch die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = 0 \tag{1}$$

(vergl. Art. 26 und 108), und wir wissen, wenn uns (1) gegeben ist, daſs dies bedeutet:

$$x = a\sin qt + b\cos qt \quad \text{oder:} \quad x = A\sin(qt + \varepsilon), \tag{2}$$

wobei a und b oder A und ε beliebige konstante Gröſsen sind.

Beispiel. **Ein Körper** vom Gewichte W Kilogramm **habe eine einfache harmonische Bewegung** von der Amplitude a Meter (d. h.: die ganze Schwingungslänge beträgt $2a$ Meter), und mache f Doppelschwingungen pro Sekunde. **Was für Kräfte** sind erforderlich, um diese Bewegung herbeizuführen?

Bezeichnet x die augenblickliche Entfernung des Körpers von seiner Mittellage in Metern, so können wir das Bewegungsgesetz folgendermaſsen schreiben:

$$x = a \cdot \sin(qt)$$

oder:

$$x = a \cdot \sin(2\pi ft).$$

Die Beschleunigung in irgend einem Augenblicke beträgt $4\pi^2 f^2 x \frac{\text{meter}}{\text{sec}^2}$; die Kraft, welche auf den Körper in der Richtung zur Mittellage wirkt, ist gleich Masse mal Beschleunigung, also gleich $4\pi^2 f^2 x \cdot \frac{W}{9{,}81}$ Kilogramm.

120. Anwendung. Bei einer liegenden **Dampf- oder Gasmaschine** mit langer Kurbelstange sei W das Gewicht des Kolbens mit seiner Stange. Dann giebt der obenstehende Ausdruck nahezu die Kraft an, welche vom Kreuzkopf ausgeübt werden muſs, wenn am Kolben auf beiden Seiten die atmosphärische Luft frei zutreten kann. Ihr Wert ist gleich 0 für $x = 0$; überhaupt ist sie proportional mit x, und also für die beiden Endpunkte des Hubes am gröſsten. Man zeichne ein Diagramm, welches diese Kraft für jeden Punkt des Kolbenweges angiebt, und beachte, daſs sie immer bestrebt ist, den Kolben *in seine Mittellage* zu ziehen.

Nun nehmen wir die Indikatordiagramme einer Maschine, und zwar für beide Seiten des Kolbens; daraus konstruieren wir zunächst ein Diagramm, welches für jeden Punkt des Kolbenweges die Kraft in Kilogramm angiebt, die der Dampf auf den Kolben ausübt. Mit diesem Diagramm können wir dann das oben gefundene Massendruck-



diagramm kombinieren, um den am Kreuzkopf wirksamen Druck zu finden. Zu beachten ist dabei, daſs der Dampfdruck meist in kg pro qcm angegeben ist, während die Massenwirkung sich direkt in kg ergiebt.

Die wirkliche selbständige und sorgfältige Durchführung einer solchen Aufgabe kann nicht warm genug empfohlen werden; sie bringt dem Leser mehr Nutzen als zehn Beispiele, die ihm vorgerechnet werden.

Da die Beschleunigungskräfte dem *Quadrate* der Periodenzahl proportional sind, so sind Vibrationen der Maschine bei hoher Tourenzahl sehr viel bedenklicher, als bei kleiner.

121. Wenn wir bisher die Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine betrachteten, nahmen wir an, daſs die Kurbelstange unendlich lang sei; nun wollen wir den **Einfluſs der endlichen Länge der Kurbelstange** ins Auge fassen.

In Artikel 11 fanden wir die Beziehung zwischen S, dem Abstande des Kolbens von seiner Endlage, und ϑ, dem Winkel, welchen die Kurbel mit ihrer Totlage bildet. Nun sei (in Figur 3, S. 14) x der Abstand des Kolbens nach rechts von der Mitte seines Weges; es wird also unser x gleich dem alten $S - r$, wobei r den Radius der Kurbel bedeutet.

Die Kurbel drehe sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit q (in Bogenmaſs pro Sekunde).

Ferner sei t die Zeit, welche von dem Augenblicke an verflossen ist, wo die Kurbel rechtwinkelig zu ihrer Totlage stand, sodaſs $\vartheta - \frac{\pi}{2} = qt$ ist. Dann finden wir:

$$x = -r\cos\vartheta + l\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\vartheta}\right\},$$

$$x = +r\sin qt + l\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\cos^2 qt}\right\}.$$

Wir benutzen nun die bekannte Näherungsgleichung:

$$\sqrt{1-\alpha} = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha,$$

welche angewendet werden darf, wenn α gegenüber 1 sehr klein ist, und erhalten dann:

$$x = r\sin qt + \frac{r^2}{2l}\cos^2 qt.$$

Es ist aber $2\cos^2 qt - 1 = \cos 2qt$ (vergl. Artikel 109).

Folglich wird:

$$(1) \qquad \boldsymbol{x = r\sin qt + \frac{r^2}{4l}\cos(2qt) + \frac{r^2}{4l}}.$$

Wir sehen, daſs wir hier in der Hauptsache eine einfache harmonische Bewegung haben, über welche sich aber ihre Oktave mit einer viel geringeren Amplitude überlagert.

Man suche $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$; dieser letztere Wert liefert als Beschleunigung:

$$-rq^2 \sin qt - \frac{r^2q^2}{l} \cos 2qt.$$

Es ist demnach der relative Einfluſs der Oktave bei der Beschleunigung viermal so groſs, als bei der Bewegung selber.

Wir wollen nun wieder ϑ für $qt + \frac{\pi}{2}$ schreiben und bekommen dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = rq^2 \cos\vartheta + \frac{r^2q^2}{l} \cos 2\vartheta.$$

Daraus folgt: für $\vartheta = 0^0$ die Beschleunigung: $rq^2 + \frac{r^2q^2}{l}$,

für $\vartheta = 90^0$ die Beschleunigung: $-\frac{r^2q^2}{l}$,

für $\vartheta = 180^0$ die Beschleunigung: $-rq^2 + \frac{r^2q^2}{l}$.

(Dabei ist stets $q = 2\pi f$, worin f die Periodenzahl oder die Umdrehungszahl der Kurbel pro Sekunde bedeutet.)

Hat man drei Punkte ermittelt, deren Koordinaten die Abweichungen x von der Mittellage und die Beschleunigungen an diesen Stellen angeben, so ist es nicht schwer, eine Kurve durch die drei Punkte zu ziehen, die ein hinreichend genaues Bild des ganzen Diagrammes ergiebt. Handelt es sich um einen Punkt nahe der Mitte, so ist es vielleicht von Nutzen, zu beachten, daſs bei einem $\measuredangle\, OPQ$ (vergl. Fig. 3, S. 14) von 90^0 die Geschwindigkeit von Q sich nicht ändert und der Punkt Q daher, ebenso wie der Punkt P, keine Beschleunigung erleidet. Diese Lage von Q ist durch Konstruktion leicht zu ermitteln. —

Zwei höchst wichtige Sätze sind in unseren letzten Formeln enthalten, nämlich:

1) Die Beschleunigungen, und infolge dessen auch die auftretenden Massenkräfte, werden viermal gröſser, wenn man die Tourenzahl verdoppelt; sie wachsen auf ihren neunfachen Wert, wenn die Tourenzahl verdreifacht wird.

2) Der relative Einfluſs eines Obertones *in der Bewegung* macht sich *in Bezug auf die Beschleunigung* in wesentlich verstärktem Grade geltend.



122. Man betrachte irgend eine bestimmte Form einer **Kulissensteuerung** oder eine **einfache Schiebersteuerung** und zeige, dafs die Bewegung des Schiebers immer fast genau dem Gesetze folgt:

$$(1) \qquad x = a_1 \sin(qt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2qt + \varepsilon_2).$$

Darin bedeutet x die Abweichung des Schiebers von seiner Mittellage, t die seit dem Beginn des Kolbenhubes verflossene Zeit, also qt den von der Kurbel seit ihrer Totpunktlage durchlaufenen Winkel; a_1 und a_2 sind Konstanten, deren Werte durch Untersuchung der Steuerung sehr leicht ermittelt werden können. Vernachlässigen wir den Oberton, so ist a_1 der halbe Gesamtweg des Schiebers und ε_1 sein Voreilungswinkel. Bei einer grofsen Zahl von Schiebersteuerungen finden wir $\varepsilon_2 = 90^0$. Die beste Methode, um die durch den Oberton (die Oktave) hervorgebrachte Wirkung zu studieren, besteht darin, dafs man die Kurve für jeden der beiden Ausdrücke in Gleichung (1) einzeln nach der in Figur 63 (S. 199) angedeuteten Methode konstruiert und dann die Ordinaten beider Kurven zu einander addiert.

Ziehen wir die äufsere Überdeckung L von x ab, so erhalten wir sofort den Punkt, bei welchem der Dampfabschlufs stattfindet, und erkennen auch, um wieviel früher und schneller der Abschlufs infolge des Einflusses der Oktave in der Schieberbewegung eintritt.

Für ein Beispiel nehmen wir an:

$$a_1 = 25 \text{ mm}, \quad \varepsilon_1 = 40^0; \quad a_2 = 5 \text{ mm}, \quad \varepsilon_2 = 90^0.$$

Der praktische Ingenieur weifs, dafs der Einflufs des Obertones zwar für das eine Ende des Cylinders nützlich, für das andere dagegen schädlich wirkt, und dafs es daher im allgemeinen nicht zweckmäfsig ist, ihn zu grofs werden zu lassen. Wir benutzen indessen diesen Umstand mit Erfolg bei unseren modernen vertikalen Dampfmaschinen, um für die Aufwärtsbewegung des Kolbens etwas mehr Füllung zu geben, als für die Abwärtsbewegung; auch können wir dadurch die Ungleichheit der Füllung, welche durch die endliche Länge der Kurbelstange entsteht, teilweise ausgleichen.

Kulissen- und Excentersteuerungen geben niemals einen wesentlichen Oberton von der dreifachen Periodenzahl; von Bedeutung ist immer nur die **Oktave der Hauptschwingung.**

Bei der Bramwellschen Steuerung wird durch die Anwendung von Stirnrädern erreicht, dafs die Schieberbewegung nach folgendem Gesetze vor sich geht:

$$(2) \qquad x = a_1 \sin(qt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(3qt + \varepsilon_2).$$

Als Beispiel zeichne man eine Kurve, welche diese Bewegung angiebt, für $a_1 = 30$ mm, $\varepsilon_1 = 47^0$; $a_2 = 10$ mm, $\varepsilon_2 = 62^0$.

Ist die äufsere Überdeckung gleich 25 mm und die innere gleich 0, so suche man die Lagen der Hauptkurbel, bei denen Expansion, Vorausströmung, Kompression und Voreinströmung beginnen. Man zeige, dafs diese Steuerung, wie überhaupt jede Steuerung, deren Obertonschwingungszahl ein ungerades Vielfaches von der Schwingungszahl des Hauptones ist, auf beiden Cylinderseiten genau gleichartig wirkt.

123. Eine Bewegung erfolge nach dem Gesetze:

$$x = a_1 \cos(q_1 t + \varepsilon_1) + a_2 \cos(q_2 t + \varepsilon_2), \tag{3}$$

wobei $q_1 = 2\pi f_1$ und $q_2 = 2\pi f_2$ ist.

Hier besitzen die Einzelbewegungen **verschiedene Periodizität;** die zusammengesetzte Bewegung ist also nicht eine einfache harmonische Bewegung. Wir nehmen an, dafs a_1 gröfser als a_2 sei, und dafs somit $a_1 \cos(q_1 t + \varepsilon_1)$ die Hauptbewegung sei. Wir benutzen die graphische Methode der Untersuchung als die für diesen Fall bequemste. Zwei Kurbeln von der Länge a_1 und a_2 rotieren mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit; sie sind im gedachten Falle ersetzbar durch eine einzige Kurbel, welche mit variabeler Winkelgeschwindigkeit umläuft derart, dafs ihre mittlere Geschwindigkeit gleich derjenigen der ersten Kurbel ist. Aufserdem schwankt die Länge der resultierenden Kurbel fortwährend zwischen den Werten $a_1 + a_2$ und $a_1 - a_2$ hin und her. Ihre Richtung ist dauernd näher derjenigen der ersten Kurbel; sie pendelt um die Lage dieser ersten Kurbel hin und her*). Weicht q_1 nur wenig von q_2 ab, so haben wir einen interessanten Spezialfall, der **bei der Musik die „Schwebungen“** erzeugt: zwei Töne von 100 und 101 Schwingungen pro Sekunde geben in jeder Sekunde eine Schwebung.

Einen analogen elektrischen Vorgang benutzen wir, um den Synchronismus von zwei Wechselstrommaschinen festzustellen: Eine Glühlampe wird an beide Maschinen angeschlossen und zeigt bei der

*) Rechnerisch gestalten sich die Verhältnisse so. Man setze:

$$\cos(2\pi f_2 t + \varepsilon_2) = \cos[2\pi f_1 t - 2\pi(f_1 - f_2)t + \varepsilon_2]$$

und kann alsdann x auf die Gestalt bringen:

$$x = r \cos(2\pi f_1 t + \theta),$$

wo $\tan\theta$ eine leicht anzugebende Bedeutung hat und r zu berechnen ist aus:

$$r^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2].$$

Annäherung an den Synchronismus durch periodisches Aufleuchten und Erlöschen die Interferenz der beiden Spannungskurven an.

Ein anderes Beispiel für diese Schwebungserscheinungen bilden **Ebbe und Flut**, welche an der freien See ebenfalls nahezu dem obigen Gesetze folgen: a_1 bezeichnet dann den Einfluſs des Mondes, a_2 den der Sonne. Hier gilt $a_1 = 2{,}1\, a_2$; die Höhe einer Springflut (bei Neu- und Vollmond) verhält sich daher zur Höhe einer Flut bei Quadratur des Mondes wie 3,1 zu 1,1. Das höchste Anschwellen der Flut sollte zeitlich mit der Kulmination des Mondes zusammenfallen. In der That beträgt auch der Unterschied zwischen den Phasen der Flut und denen der täglichen scheinbaren Drehung des Mondes um die Erde nie mehr als eine Stunde.

124. Eine periodische Funktion der Zeit ist eine Funktion, welche nach Verlauf einer bestimmten Zeit T sich immer wieder in jeder Beziehung vollkommen kongruent wiederholt (inbezug auf ihre Momentanwerte, auf ihr Anwachsen u. s. w.).

Dieser Wert T heiſst die „Periode" der Funktion, der reziproke Wert $\frac{1}{T} = f$ wird die „Periodenzahl" genannt. Analytisch lautet die allgemeine Definition einer periodischen Funktion folgendermaſsen:

$$f(t) = f(t + nT),$$

wobei für n jede beliebige positive oder negative ganze Zahl eingesetzt werden darf.

125. Auf die periodischen Funktionen bezieht sich ein wichtiger **Satz von Fourier**, bei dessen genauem Beweise wir indessen nicht verweilen können. Dieser Satz besagt, daſs irgend eine periodische Funktion, deren vollständige Periode T Sekunden dauert (wobei $q = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ ist), ausgedrückt werden kann als Summe gewisser Sinusfunktionen der Zeit, und zwar in folgender Gestalt:

$$(1) \qquad f(t) = A_0 + A_1 \sin(qt + E_1) + A_2 \sin(2qt + E_2) + A_3 \sin(3qt + E_3) + \cdots.$$

Diese Entwicklung entspricht genau der physikalischen Thatsache, daſs z. B. der Ton einer Orgelpfeife oder einer Geigensaite oder irgend eines anderen musikalischen Instrumentes aus einem Grundton und seinen Obertönen besteht.

Gleichung (1) läſst sich auch in folgender Form schreiben:

$$f(t) = A_0 + a_1 \sin qt + b_1 \cos qt + a_2 \sin 2qt + b_2 \cos 2qt + \cdots + \cdots \text{ u. s. w.},$$

worin $a_1^2 + b_1^2 = A_1^2$, $\operatorname{tang} E_1 = \frac{b_1}{a_1}$ u. s. w. ist.



126. Die durch eine **Sinuskurve und die Abscissenaxe eingegrenzte Fläche,** berechnet für eine volle Periode der Kurve oder für eine ganze Anzahl von Perioden, hat den Gesamtinhalt Null. Dies ist aus dem Verlauf der Fläche insofern ersichtlich, als inhaltsgleiche Flächenteile oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe liegen. Die Rechnung gestaltet sich so: Man nehme für s eine ganze Zahl und setze $q = \frac{2\pi}{T}$; dann gilt:

$$\int_0^T \sin sqt \cdot dt = -\frac{1}{sq}\Big[\cos sqt\Big]_0^T = -\frac{1}{sq}\left(\cos s\frac{2\pi}{T}T - \cos 0\right) = 0,$$

da $\cos s\frac{2\pi}{T}T = \cos s2\pi = 1$ und $\cos 0 = 1$ ist.

Entsprechend gilt:

$$\int_0^T \cos sqt \cdot dt = \frac{1}{sq}\Big[\sin sqt\Big]_0^T = \frac{1}{sq}\left(\sin s\frac{2\pi}{T}T - \sin 0\right) = 0,$$

da $\sin s\frac{2\pi}{T}T = \sin s2\pi = 0$ und $\sin 0 = 0$ ist.

127. Man stelle für die einzelne Abscisse durch Multiplikation der Ordinaten zweier gegebenen Sinuskurven die Ordinate einer neuen Kurve her; die Periode der letzteren wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Perioden der gegebenen Kurven sein. Die von der neuen Kurve und der Abscissenaxe eingegrenzte Fläche, berechnet für eine volle Periode, hat wieder den Gesamtinhalt Null. So hat man für zwei ganze Zahlen s und r:

$$(1) \qquad \int_0^T \sin sqt \cdot \cos rqt \cdot dt = 0,$$

$$(2) \qquad \int_0^T \sin sqt \cdot \sin rqt \cdot dt = 0,$$

$$(3) \qquad \int_0^T \cos sqt \cdot \cos rqt \cdot dt = 0;$$

hier ist $T = \frac{2\pi}{q}$, und im zweiten und dritten Falle gelten r und s als von einander verschieden.

Die Regeln (1), (2) und (3) mufs der Leser genau bearbeiten und zwar erstens als Übungen zur Integralrechnung, zweitens auf graphischem Wege. Der Lernende kann nicht genug Zeit darauf verwenden, diese Formeln von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu



untersuchen; er mufs ganz klar erkennen, wie eigentlich das Ergebnis 0 hier zustande kommt. Es lassen sich die unter den Integralen (1) ff. stehenden Funktionen jedesmal in eine Summe zweier Sinusfunktionen spalten, wo alsdann das Integral jedes Summanden gleich Null ist. So hat man für Formel (1):

$$2 \sin sqt \cdot \cos rqt = \sin (s+r)qt + \sin (s-r)qt,$$

und nach Art. 126 liefert bei der Integration jeder der rechts stehenden Summanden Null.

Die Bedeutung der Formeln (1) bis (3) für die Anwendungen ist aufserordentlich grofs.

Für $s = r$ gelten die Formeln (2) und (3) nicht mehr, wie schon bemerkt wurde; dagegen bleibt Formel (1) bestehen. Man hat nämlich:

$$(4) \qquad \int_0^T \sin^2 sqt \cdot dt = \int_0^T \cos^2 sqt \cdot dt = \tfrac{1}{2} T,$$

während man in (1) für $s = r$ das Integral von $\frac{1}{2} \sin 2sqt\, dt$ erhält, welches gleich Null ist. Auch die Formel (4) wolle der Leser sowohl graphisch als durch blofse Rechnung bearbeiten. Zu letzterem Zwecke ist die trigonometrische Formel heranzuziehen:

$$\cos 2\vartheta = 2 \cos^2 \vartheta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \vartheta,$$

aus welcher sich ergiebt:

$$\cos^2 sqt = \tfrac{1}{2} \cos 2sqt + \tfrac{1}{2}, \qquad \sin^2 sqt = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2sqt.$$

Die Ausführung der in (4) vorgeschriebenen Integration ist daraufhin sehr leicht.

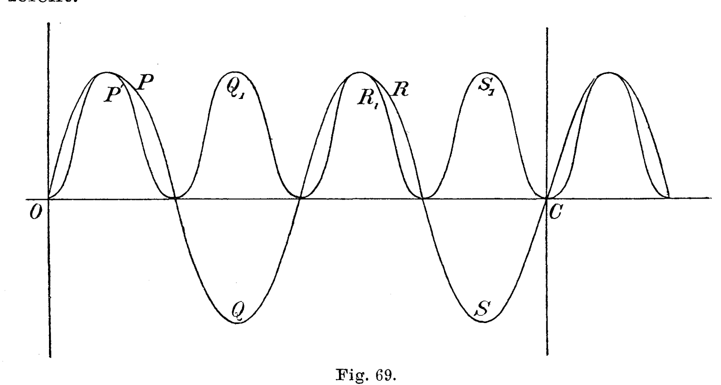


Fig. 69.

128. Graphische Erläuterung der Formel (4). In Figur 69 sei $\overline{OC} = T$. Man nehme $s = 2$ und hat in $OPQRSC$ die zur Funk-

tion $\sin sqt$ gehörende Kurve. Die Maxima der Funktion (bei P und R) sind 1, die Minima (bei Q und S) aber -1. Nun beachte man, dafs $\sin^2 sqt$ beständig $\geqq 0$ ist; die zugehörige Kurve ist in der Figur durch $OP_1 Q_1 R_1 S_1 C$ bezeichnet. Dieselbe schwankt zwischen den Werten 0 und 1 hin und her, und der mittlere Wert der Funktion ist $\frac{1}{2}$, so dafs die durch die letztere Kurve und die Abscissenaxe im Intervall OC eingegrenzte Fläche den Inhalt $\frac{1}{2}T$ bekommt. **Die Thatsache, dafs der Mittelwert von $\sin sqt \cdot \sin rqt$ gleich Null, aber derjenige von $\sin sqt \cdot \sin sqt$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, hat für den Ingenieur grofse Bedeutung.**

129. Beispiel aus der Elektrotechnik. Ein elektrisches Dynamometer enthält zwei Spulen; durch die eine, feste, lassen wir einen Strom von der Stärke C fliefsen; die andere, bewegliche, führe einen Strom c. In irgend einem Augenblicke ist nun die resultierende Kraftwirkung der Spulen auf einander, und damit die Gröfse des Drehmomentes, proportional mit Cc. Sind C und c konstant, so können wir also das Produkt Cc messen. Ändern aber beide ihren Wert in raschem Wechsel, so erhalten wir nur den *Mittelwert* von Cc.

Prof. Ayrton und ich haben nun folgendes hübsche und lehrreiche Experiment ausgeführt: Wir sandten durch die feste Spule einen Strom, welcher einer Wechselstrommaschine entnommen wurde und ungefähr sinusartigen Verlauf hatte: $C = C_0 \sin 2\pi ft$. Durch die andere Spule schickten wir einen Strom: $c = c_0 \sin 2\pi f't$, dessen Periodenzahl f' vergröfsert oder verkleinert werden konnte. Es war nun sehr interessant, zu beobachten — und es wird den meisten praktischen Ingenieuren unbekannt, ja fast unglaublich sein —, dafs, obwohl starke Ströme durch beide Spulen flossen, doch keine bemerkbare Kraftwirkung derselben auf einander zustande kam, und dafs man also auch keinen Ausschlag des Instrumentes erhielt.

Dabei war f konstant gleich 100 pro Sekunde, während f' stufenweise vergröfsert wurde, etwa von 10 auf 20, 30, 40 und 49. Vielleicht wurde zwischen 49 und 51 eine unsichere und zweifelhafte Einwirkung einer Spule auf die andere bemerkbar, doch nicht so, dafs man sie hätte messen können; als aber f' weiter wuchs, hörte auch diese Wirkung gänzlich auf. Bei $f' = 60, 70, 80, 90, 97, 98$ und 99 wurde keine Wirkung beobachtet. Sobald aber f' den Wert 100 erreichte, konnte darüber, dafs eine starke mittlere Kraft zwischen beiden Spulen wirksam war, kein Zweifel mehr herrschen. Man konnte eine Ablesung machen und dieselbe ergab (nach der mit Gleichstrom geaichten Skala des Instrumentes) den Wert $\frac{1}{2}C_0 c_0$;

wuchs nun f' über 100 hinaus, so hörte die Wirkung plötzlich wieder auf und blieb dauernd gleich Null, bis $f' = 200$ wurde; da konnte wieder ein Ausschlag festgestellt werden, aber diesmal nur ein kleiner. Bei weiterer Steigerung verschwand auch dieser wieder gänzlich und trat erst bei $f' = 300$ wieder auf u. s. w.

Wir wissen aus Art. 126, dafs, wenn C und c genaue Sinusfunktionen gewesen wären, überhaupt nur dann eine Kraftwirkung hätte auftreten können, wenn die Periodenzahl genau übereinstimmte. In Wirklichkeit waren aber die Oktave und höhere harmonische Schwingungen abgeschwächt neben dem Grundtone vorhanden, und diese erzeugten schwache Wirkungen auch dann, wenn f und f' sich zu einander verhielten wie $2:1$ oder $1:2$ oder $1:3$ u. s. w. Dies Beispiel ist von gröfster Wichtigkeit für jeden Elektrotechniker, der mit elektrischen Wechselströmen zu rechnen hat.

130. Integrationsübungen. C und c seien zwei elektrische Wechselströme. Wenn nun $C = C_0 \sin qt$ und $c = c_0 \sin(qt \pm e)$ ist und diese beiden Ströme durch die beiden Spulen eines Elektrodynamometers fliefsen, so zeigt das Instrument den Wert $\frac{1}{2} C_0 c_0 \cos e$ an, da dies der Mittelwert des Produktes Cc ist.

Sind die Beträge C und c gleich grofs, d. h. fliefst derselbe Strom $C = C_0 \sin(qt + e)$ durch die beiden (hinter einander geschalteten) Spulen, so zeigt das Instrument den Mittelwert von C^2 an, nämlich den Wert:

$$(1) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T C_0^2 \sin^2(qt + e) \cdot dt,$$

und wir wissen aus Art. 128, dafs dieser Mittelwert gleich $\frac{1}{2} C_0^2$ ist.

Die Quadratwurzel einer derartigen Ablesung wird gewöhnlich als **„effektiver Strom“** bezeichnet, sodafs also $\frac{1}{\sqrt{2}} C_0$ der effektive Wert von $C_0 \sin qt$ ist: **Die effektive Stromstärke wird definiert als die Quadratwurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der Momentanwerte des Stromes.**

Wenn z. B. ein Elektrotechniker von einem Wechselstrom von 100 Ampère spricht, so meint er, dafs die *effektive* Stromstärke 100 Ampère ist, oder dafs $C = 141{,}4 \sin(qt + \alpha)$ ist. Ebenso bedeutet eine Wechselstromspannung von 1000 Volt, dafs $v = 1414 \sin(qt + \beta)$ Volt sein soll.

Übungsaufgaben. Wie grofs ist der **effektive Wert** von:

$$a_0 + A_1 \sin(qt + \varepsilon_1) + A_2 \sin(2qt + \varepsilon_2) + \cdots ?$$

(Es ist zu beachten, dafs nur die *Quadrate* der einzelnen Glieder einen Mittelwert besitzen, während das Integral irgend eines anderen Produktes über eine vollständige Periode gleich Null ist).

Antwort: $\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + \cdots)}$.

Man beachte, dafs nach diesem Ergebnis schwache Obertöne nur von geringem Einflufs auf den effektiven Wert sind.

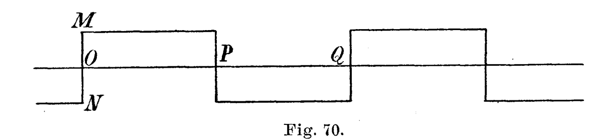


Fig. 70.

In Art. 134 werden wir sehen, dafs die in Figur 70 gezeichnete Kurve sich durch folgende Fourier'sche Reihe darstellen läfst:

$$v = \frac{4v_0}{\pi}\left(\sin qt + \tfrac{1}{3}\sin 3qt + \tfrac{1}{5}\sin 5qt + \cdots\right). \tag{2}$$

$\overline{OM}$ ist dabei durch v_0 bezeichnet. $\overline{OQ}$ stellt die Zeit T dar; ferner ist $q = \frac{2\pi}{T}$.

Der effektive Wert von v ist für diesen Fall:

$$v = \frac{4v_0}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \cdots}. \tag{3}$$

Figur 71 zeigt eine andere Kurve mit folgender Gleichung:

$$v = \frac{8v_0}{\pi^2}\left(\sin qt - \tfrac{1}{9}\sin 3qt + \tfrac{1}{25}\sin 5qt - \cdots\right). \tag{4}$$

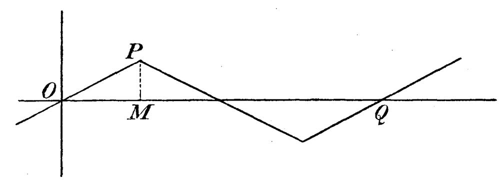


Fig. 71.

Dabei ist $\overline{PM} = v_0$ und $\overline{OQ} = T$. Der Effektivwert von v wird hier:

$$v = \frac{8v_0}{\pi^2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{625} + \cdots}. \tag{5}$$

Man beachte auch hier wieder, wie wenig Einfluſs die Obertöne auf das Resultat haben, welches fast allein von der Grundschwingung $\frac{8v_0}{\pi^2}\sin qt$ abhängt.

Übungsaufgabe. Es sei:

(6) $$C = C_0 + A_1 \sin qt + B_1 \cos qt + A_2 \sin 2qt + B_2 \cos 2qt + \cdots$$

und

(7) $$c = c_0 + a_1 \sin qt + b_1 \cos qt + a_2 \sin 2qt + b_2 \cos 2qt + \cdots.$$

Gesucht wird der Mittelwert des Produktes Cc. Derselbe beträgt

(8) $$C_0 c_0 + \tfrac{1}{2}(A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \cdots).$$

Man wird beim Nachrechnen finden, daſs Ausdrücke, wie $A_2 b_2$ oder $A_2 b_3$ dabei nicht vorkommen.

131. AB und BC seien Teile einer elektrischen Leitung. (Figur 72). Der Teil AB enthält den Widerstand R und keine Selbstinduktion; BC enthält den Widerstand r und die Selbstinduktion l. Der Strom sei ein Wechselstrom von der Form $C = C_0 \sin qt$. Ferner bedeuten V_{ab}, V_{bc}, V_{ac} die *momentanen* Spannungsdifferenzen zwischen den entsprechenden Punkten, und $\overline{V}_{ab}$, $\overline{V}_{bc}$, $\overline{V}_{ac}$ sind die *effektiven* Spannungsdifferenzen. Dann folgt (vergl. Art. 118):

Fig. 72.

$$V_{ab} = RC_0 \cdot \sin qt,$$

$$V_{bc} = C_0\sqrt{r^2 + l^2q^2} \cdot \sin\left(qt + \operatorname{arc\,tang}\frac{lq}{r}\right),$$

$$V_{ac} = C_0\sqrt{(R+r)^2 + l^2q^2} \cdot \sin\left(qt + \operatorname{arc\,tang}\frac{lq}{R+r}\right),$$

$$\overline{V}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} RC_0,$$

$$\overline{V}_{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} rC_0\sqrt{1 + \frac{l^2q^2}{r^2}},$$

$$\overline{V}_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R+r)\,C_0\sqrt{1 + \frac{l^2q^2}{(R+r)^2}}.$$

Man beachte, **daſs $\overline{V}_{ac}$ immer kleiner ist als $\overline{V}_{ab} + \overline{V}_{bc}$**: die effektive Spannung zwischen A und C ist stets kleiner als die Summe der zwischen A und B einerseits und zwischen B und C andererseits gemessenen Spannungen.

Für ein Zahlenbeispiel setze man: $C_0 = 141{,}4$ Amp., $R = 1$ Ohm, $r = 0{,}1$ Ohm, $lq = 1$, und rechne damit diese Verhältnisse noch einmal nach, welche bisweilen selbst einen Elektrotechniker in Erstaunen setzen.

132. Regel für die Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine Fouriersche Reihe*).

Eine vorgelegte Funktion y der Zeit t habe die Periode T, sei jedoch im übrigen willkürlich gewählt. Sie werde durch die in Figur 73 gezeichnete Kurve dargestellt, in welcher OC die Periode T darstellt und $\overline{EP}$ die zu einer beliebigen Abscisse $\overline{OE} = t$ gehörende Ordinate y ist. In G folgt natürlich ein genau mit $FPHG$ kongruentes Kurvenstück. (An Stelle von t können wir auch x oder irgend einen anderen Buchstaben gebrauchen. In der That braucht die Abscisse nicht notwendig die Zeit darzustellen, sondern kann irgend eine andere Bedeutung, z. B. diejenige einer Länge haben.) Man nehme nun an, dafs y in Gestalt der nachfolgenden Reihe entwickelbar sei:

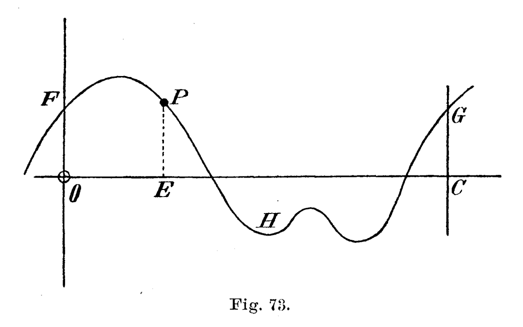


Fig. 73.

$$(1)\qquad \begin{aligned} y = a_0 &+ a_1 \sin qt + a_2 \sin 2qt + a_3 \sin 3qt + \cdots \\ &+ b_1 \cos qt + b_2 \cos 2qt + b_3 \cos 3qt + \cdots, \end{aligned}$$

wobei q in der Bedeutung gebraucht ist:

$$q = \frac{2\pi}{T}.$$

Nach den Entwicklungen von Artikel 126 ist evident, dafs a_0 **die mittlere Höhe der Kurve** oder der Mittelwert der Funktion y im Intervall OC ist. Man findet dieselbe gerade so, wie man die mittlere Höhe eines Indikatordiagrammes bestimmt. Man umfährt mit einem Planimeter den Umriss $OFPHGCO$ der zwischen der Kurve und der Abscissenaxe gelegenen Fläche und teilt den entspringenden Flächeninhalt durch die Länge $T = \overline{OC}$. Liegt die Kurve nicht gezeichnet vor, kennt man jedoch für eine Anzahl äquidistanter Werte t, etwa für $\frac{1}{36}T$, $\frac{2}{36}T$, $\frac{3}{36}T, \cdots$, $\frac{36}{36}T$, die zugehörigen Werte y, so ad-

*) Fortsetzung von Art. 125.

diere man diese 36 Werte y und teile die Summe durch 36, wodurch ein Näherungswert der mittleren Höhe a_0 gewonnen wird. Die Begründung dieser Maſsregel ist diese: Der eben gemeinte Flächeninhalt ist gleich dem Integrale von $y \cdot dt$ im Intervalle OC. Aber dies Integral ist zufolge (1) gleich $a_0 T$, d. h. gleich dem Integral des ersten Reihengliedes; denn die Integrale aller übrigen Glieder wie $a_1 \sin qt \cdot dt$ oder $b_3 \cos 3qt \cdot dt$ sind Null. In der That gelten die Gleichungen:

$$\int_0^T \sin sqt \cdot dt = 0, \quad \int_0^T \cos sqt \cdot dt = 0$$

für alle ganzen Zahlen $s > 0$.

Weiterhin stellt sich a_1 als doppelt genommene mittlere Höhe derjenigen Kurve dar, deren Ordinaten durch Multiplikation der Ordinaten in Figur 73 mit $\sin qt$ entspringen. Multipliziert man nämlich in Gleichung (1) alle Glieder mit $\sin qt \cdot dt$ und integriert sodann zwischen 0 und T, so folgt mit Benutzung von Artikel 127:

$$(2) \qquad \int_0^T y \sin qt \cdot dt = 0 + a_1 \int_0^T \sin^2 qt \cdot dt + 0 + 0 + \cdots = \tfrac{1}{2} a_1 T.$$

Teilt man das links stehende Integral durch T, so ergiebt sich die mittlere Höhe der genannten Kurve, sodaſs in der That das Doppelte dieser Höhe gleich a_1 ist. In analoger Weise findet man:

$$(3) \qquad \int_0^T y \cos qt \cdot dt = \tfrac{1}{2} b_1 T.$$

Ganz entsprechend ergiebt sich aus den Prinzipien des Artikel 127, **daſs a_s und b_s gleich den jeweils doppelt genommenen Mittelwerten von $y \sin sqt$ und $y \cos sqt$ im Intervall OC sind:**

$$(4) \qquad \begin{cases} a_s = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T y \sin sqt \cdot dt, \\ b_s = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T y \cos sqt \cdot dt. \end{cases}$$

133. In der Zeitschrift „*Electrician*“ vom 5. Februar 1892 entwickelte der Verfasser ausführlich die Methode zur Berechnung der Koeffizienten a_s, b_s, falls die Werte der Funktion y für die oben schon genannten 36 Werte $\frac{1}{36} T$, $\frac{2}{36} T$, $\cdots$ gegeben sind.



In der gleichen Zeitschrift vom 28. Juni 1895 beschrieb der Verfasser eine **graphische Methode** zur Bestimmung der Koeffizienten, welche namentlich empfehlenswert ist, falls eine willkürliche Funktion durch ihre Kurve gegeben ist.

Leser, welche die genannten Arbeiten nachsehen, mögen beachten, daſs die zur Bestimmung der einzelnen Koeffizienten erforderlichen Koordinaten ohne Mühe berechnet werden und ebenso leicht die Kurven gezeichnet sind.

In dem a. a. O. betrachteten Falle war die ursprüngliche Kurve, welche die Abhängigkeit der Funktion y von der Zeit t darstellte, auf der Mantelfläche eines Kreiscylinders aufgetragen, dessen Umfang gerade der Periode T entsprach. Alsdann wurde die Kurve auf eine durch die Cylinderaxe und den Punkt $t = 0$ gelegte Diametralebene projiziert. Der doppelt genommene Inhalt der Fläche zwischen der projizierten Kurve und der Abscissenaxe, geteilt durch den Cylinderumfang T, liefert a_1. Indem man auf eine gegen die erste Ebene senkrechte Diametralebene projiziert, findet man entsprechend b_1. Hierauf hat man die Kurve in der Richtung der Abscissenaxe derart zu dehnen, daſs sie sich erst nach wiederholten, sagen wir gleich allgemein nach s Umläufen um den Cylinder schlieſst, anstatt nach einem Umlaufe. Projiziert man alsdann wieder wie oben, teilt jedoch den doppelten Flächeninhalt durch den s-fachen Umfang sT, so entspringen die Werte a_s und b_s*).

Vermittelst des harmonischen Analysators von Henrici, beschrieben in den „*Proceedings of the Physical Society*"**), gewinnt man die Koeffi-

*) Die im Texte entwickelte Methode gründet sich auf die Gleichung:

$$a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin sqt \cdot dt = -\frac{2}{sqT}\int y\, d(\cos sqt) = -\frac{1}{s\pi}\int y\, d(\cos sqt).$$

Zeichnen wir eine Kurve, bei welcher der (zur Zeit t vorliegende) Wert y die der Abscisse $\cos sqt$ korrespondierende Ordinate ist, so wird die zugehörige mit einem Planimeter auszumessende Fläche, durch $-s\pi$ geteilt, den Wert a_s ergeben.

Eine analoge Bemerkung knüpft sich an die Gleichung:

$$b_s = \frac{1}{s\pi}\int y\, d(\sin sqt).$$

Die entwickelte graphische Methode benutzt man auch mit Vorteil bei anderweitigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen in Reihen, so z. B. bei Entwicklungen, die nach Kugelfunktionen oder Besselschen Funktionen fortschreiten.

**) Man vergl. auch den „*Katalog mathematischer Modelle etc.*" von W. Dyck (München 1892), pag. 125 und 213.

zienten sehr schnell und genau. Die Methode von Wedmore, welche im „*Journal of the Institution of Electrical Engineers*“ im März 1896 veröffentlicht wurde, scheint mir auch sehr schnell vom Ziele zu führen, wenn man für eine Reihe äquidistanter Werte t die zugehörigen Funktionswerte y kennt.

134. Ist eine periodische Funktion durch eine Kurve gegeben, die sich aus Stücken gerader Linien zusammensetzt, wie z. B. in den Figuren 70 und 71 (S. 229), so können wir die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung auch leicht durch direkte Integration bestimmen. Wir führen dies für die dem Elektrotechniker wohlbekannte Kurve aus, welche in Figur 74 gegeben ist. Hier gilt $y = \overline{OA} = 2v_0$ konstant im Intervall von $t = 0$ bis $t = \overline{OP} = \frac{1}{2}T$, weiter ist y konstant $= 0$ im Intervall von $t = \overline{OP} = \frac{1}{2}T$ bis $t = \overline{OQ} = T$. Offenbar hat man:

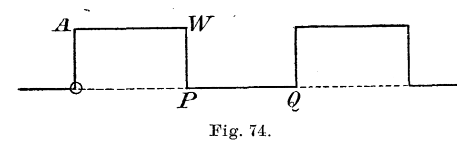


Fig. 74.

$$a_0 = v_0, \qquad q = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_s = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} 2v_0 \sin sqt \cdot dt, \qquad b_s = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} 2v_0 \cos sqt \cdot dt,$$

$$a_s = -\frac{4v_0}{T}\cdot\frac{T}{2s\pi}\left[\cos s\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{1}{2}T}, \qquad b_s = \frac{4v_0}{T}\cdot\frac{T}{2s\pi}\left[\sin s\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{1}{2}T},$$

$$a_s = -\frac{2v_0}{s\pi}(\cos s\pi - \cos 0) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } s, \\ \frac{4v_0}{s\pi} & \text{für ungerades } s, \end{cases}$$

$$b_s = \frac{2v_0}{s\pi}(\sin s\pi - \sin 0) = 0.$$

Die durch Figur 74 dargestellte Funktion gestattet hiernach die folgende Fouriersche Entwicklung:

$$(1) \qquad y = v_0 + \frac{4v_0}{\pi}\left(\sin qt + \tfrac{1}{3}\sin 3qt + \tfrac{1}{5}\sin 5qt + \cdots\right).$$

Fig. 75.

Verschiebt man die in Figur 74 dargestellte Kurve soweit nach unten, daſs der Nullpunkt in der Mitte von OA liegt, so entspringt die Anordnung der Figur 75. Hier haben wir eine Funktion y, welche

in der ersten Hälfte der Periode konstant gleich v_0, in der zweiten Hälfte konstant gleich $-v_0$ ist, und die weiterhin immer nach Verlauf einer halben Periode eine entsprechende plötzliche Änderung erfährt. Zur Darstellung dieser Funktion y haben wir in (1) rechter Hand bloſs v_0 zu subtrahieren, sodaſs wir gewinnen:

$$(2) \qquad y = \frac{4v_0}{\pi}(\sin qt + \tfrac{1}{3}\sin 3qt + \tfrac{1}{5}\sin 5qt + \cdots).$$

Verschieben wir nunmehr im Sinne der x-Axe nach links, sodaſs der neue Nullpunkt mitten zwischen O und P gelegen ist, so hat man zur Darstellung der neuen Funktion y in der letzten Gleichung $t + \frac{1}{4}T$ anstatt t zu setzen. An die Stelle von $\sin sqt$ tritt dementsprechend:

$$\sin sq(t + \tfrac{1}{4}T) = \sin s\frac{2\pi}{T}(t + \tfrac{1}{4}T) = \sin\left(sqt + s\frac{\pi}{2}\right).$$

Dieser Ausdruck wird, da nur ungerade s zur Geltung kommen,

$$= \quad \cos sqt \text{ für } s = 1, 5, 9, 13, \cdots,$$
$$= -\cos sqt \text{ für } s = 3, 7, 11, 15, \cdots.$$

Infolge dessen besitzt die neue Funktion die Entwicklung:

$$y = \frac{4v_0}{\pi}(\cos qt - \tfrac{1}{3}\cos 3qt + \tfrac{1}{5}\cos 5qt - \tfrac{1}{7}\cos 7qt + \cdots).$$

135. Zur Darstellung einer periodischen Funktion von x für alle endlichen Werte der Variabeln liegt es immer am nächsten, sich solcher Reihen zu bedienen, **deren einzelne Glieder bereits eben diese Periode haben.** Die trigonometrischen Funktionen sind die einfachsten periodischen Funktionen, und deshalb liefern die Fourierschen Reihen die einfachsten Reihendarstellungen der gedachten Art.

136. Sind die Werte von y als Funktion von x für alle x im Intervall von 0 bis c gegeben, so kann man y in **eine Reihe nach Sinus allein** oder in **eine solche nach Cosinus allein** entwickeln. Wir sehen hier das Intervall, in dem die Funktionswerte gegeben sind, als die Hälfte einer vollen Periode an. Man wird alsdann hinterher aus der Reihendarstellung selber leicht erkennen, welche Werte die Funktion in der anderen Periodenhälfte annimmt. In den bisher betrachteten Fällen war y stets im ganzen Periodenintervall und damit für alle Werte von x gegeben.

I. Wir setzen für die Funktion y die Entwicklung an:

$$y = a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots,$$

wobei $q = \frac{\pi}{c}$ ist.



Multiplizieren wir diese Gleichung rechts und links mit $\sin sqx \cdot dx$ und integrieren zwischen den Grenzen 0 und c, so verschwinden rechter Hand alle Glieder bis auf:

$$\int_0^c a_s \sin^2 sqx \cdot dx,$$

welches sich zu $\frac{1}{2} a_s c$ berechnet, sodafs sich a_s als der doppelt genommene Mittelwert von $y \cdot \sin sqx$ im Intervall von 0 bis c ergiebt.

Nimmt man z. B. für y den konstanten Wert m, so ist:

$$a_s = \frac{2}{c}\int_0^c m \sin sqx \cdot dx = -\frac{2m}{csq}\Big[\cos sqx\Big]_0^c$$

$$a_s = -\frac{2m}{cqs}(\cos s\pi - 1)\begin{cases} = \frac{4m}{s\pi} \text{ für ungerades } s, \\ = 0 \text{ für gerades } s. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$m = \frac{4m}{\pi}(\sin qx + \tfrac{1}{3}\sin 3qx + \tfrac{1}{5}\sin 5qx + \cdots).$$

Übungsaufgabe. Man entwickele die im Intervall von $x = 0$ bis $x = c$ durch $y = mx$ gegebene Funktion in eine Reihe nach Sinus:

$$mx = a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots,$$

wo wieder $q = \frac{\pi}{c}$ ist.

Für a_s findet man:

$$a_s = \frac{2}{c}\int_0^c mx \sin sqx \cdot dx = \frac{2m}{s^2q^2c}\Big[\sin sqx - sqx \cdot \cos sqx\Big]_0^c.$$

Wegen des hier auftretenden Integrals sehe man die Formel 70 in Artikel 271. Es folgt:

$$mx = \frac{2mc}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{c}x - \tfrac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{c}x + \tfrac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{c}x - \cdots\right).$$

II. Es gelte jetzt die Entwicklung:

$$y = b_0 + b_1 \cos qx + b_2 \cos 2qx + b_3 \cos 3qx + \cdots.$$

Hier ist offenbar b_0 der Mittelwert von y im Intervall von 0 bis c. Wie oben bestätigen wir, dafs b_s der doppelt genommene Mittelwert von $y \cos sqx$ im genannten Intervall ist.

Übungsaufgabe. Man entwickele jetzt die im Intervall von 0 bis c durch $y = mx$ gegebene Funktion in eine Reihe nach Cosinus. Hier ist ersichtlich $b_0 = \frac{1}{2}mc$, und wir finden:

$$y = \frac{mc}{2} - \frac{4m}{\pi}(\cos qx + \tfrac{1}{9}\cos 3qx + \tfrac{1}{25}\cos 5qx + \cdots).$$

137. In Artikel 118 haben wir eine Gleichung für einen elektrischen Strom entwickelt. Es stellte sich dabei noch ein sehr kleines mit wachsendem t schnell verschwindendes Glied im Ausdruck für die Stromstärke C ein; wir werden dies Glied auch hier wieder vernachlässigen. Man beachte nun, dafs, wenn V nicht eine einfache Sinusfunktion der Zeit, sondern eine kompliziertere periodische Funktion ist, jedes neue Glied in der Entwicklung von V ein entsprechendes Glied von der gleichen Periode in der Darstellung der Stromstärke C nach sich zieht. Hat man also:

$$(1)\qquad V = V_0 + \sum_{s=1}^{\infty} V_s \sin(sqt + e_s)^{*}),$$

so wird für C die Darstellung entspringen:

$$(2)\qquad C = \frac{V_0}{R} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{V_s}{\sqrt{R^2 + L^2 s^2 q^2}} \sin\left(sqt + e_s - \operatorname{arc\,tang} \frac{sLq}{R}\right).$$

Ist Lq sehr grofs im Vergleich zu R, so haben wir näherungsweise:

$$(3)\qquad C = \frac{V_0}{R} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{V_s}{Lsq} \cos(sqt + e_s).$$

Wählt man somit für V die durch die Kurve der Figur 74 (S. 234) dargestellte Funktion:

$$(4)\qquad V = V_0 + \frac{4V_0}{\pi}\left(\sin qt + \tfrac{1}{3}\sin 3qt + \cdots\right),$$

so ergiebt sich für C:

$$(5)\qquad C = \frac{V_0}{R} - \frac{2V_0 T}{\pi^2 L}\left(\cos qt + \tfrac{1}{9}\cos 3qt + \tfrac{1}{25}\cos 5qt + \cdots\right).$$

Diese Funktion wird durch die in Figur 71 (S. 229) gezeichnete Kurve versinnlicht, wenn man den Nullpunkt nach der Stelle $\frac{T}{4}$ verschiebt.

138. Wenn ein Elektrizitätswerk für eine Hausbeleuchtung oder für einen Motor elektrische **Energie zu liefern hat,** so bemifst es die Leistung P in Watt als den Mittelwert des Produktes VC,

*) Das „Summenzeichen" $\sum_{s=1}^{\infty}$ bedeutet, dafs der unter demselben stehende Ausdruck für $s = 1, 2, 3, \cdots$ gebildet werden soll, und dafs alle so entspringenden Ausdrücke zu addieren sind.

wobei C den Strom in Ampère und V die wirksame Spannung in Volt bezeichnet.

Nun sei $V = V_0 \sin qt$ und $C = C_0 \sin(qt - e)$.

Dann ist $P = \frac{1}{2} C_0 V_0 \cos e$, d. i. gleich dem halben Produkt der beiden Amplituden multipliziert mit dem Cosinus des Phasenverschiebungswinkels (vergl. Nr. 23, S. 213).

Wir können die Leistung messen, indem wir den Strom C durch die feste Spule eines Wattmeters schicken, während die Spannung in der anderen, beweglichen, Spule einen Strom c erzeugt. Ist r der Widerstand dieser letzteren Spule und l ihre Selbstinduktion, so erhalten wir für den in ihr entstehenden Strom:

$$c = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + l^2 q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arc\,tang} \frac{lq}{r}\right). \tag{6}$$

Das Drehmoment der Spule (welches allein der Messung zugänglich ist) wird nun erzeugt durch die beiden Ströme C und c. Wir messen also eigentlich nicht den Mittelwert von CV, sondern den von Cc, nämlich:

$$\frac{1}{2} \frac{C_0 V_0}{\sqrt{r^2 + l^2 q^2}} \cos\left(e - \operatorname{arc\,tang} \frac{lq}{r}\right).$$

Gewöhnlich ist indessen bei diesen Instrumenten der dünndrähtigen Spule („Spannungsspule") ein groſser induktionsfreier Widerstand vorgeschaltet, und man macht dadurch den Wert lq im Vergleich mit r so klein, daſs sein Quadrat gegen r^2 vollständig vernachlässigt werden kann. Ist dies der Fall, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\text{Scheinbare Energie}}{\text{Wahre Energie}} = \frac{\cos\left(e - \operatorname{arc\,tang} \frac{lq}{r}\right)}{\cos e}.$$

Nun beachte man, daſs $\operatorname{arc\,tang} \frac{lq}{r}$ ein sehr kleiner Winkel ist; wir wollen ihn α nennen. Dann ist:

$$\frac{\text{Scheinbare Energie}}{\text{Wahre Energie}} = \frac{\cos e \cdot \cos\alpha + \sin e \cdot \sin\alpha}{\cos e} = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{tang} e.$$

Dabei ist $\cos\alpha$ praktisch $= 1$ und $\sin\alpha$ sehr klein; infolge dessen möchte man wohl im ersten Augenblicke glauben, daſs wir auch das Resultat nahezu gleich 1 setzen können. Das trifft aber nicht unter allen Umständen zu.

Ist nämlich e nahezu gleich 90^0, so wird die Tangente des Winkels auſserordentlich groſs und in diesem Falle **kann die scheinbare Leistung sehr viel gröſser sein als die wirkliche.**



Indessen ist dieser Fall, daſs e sich einem rechten Winkel nähert, selten. Er kommt nur vor bei Spulen von groſsem Durchmesser ohne jedes Eisen, wenn auch noch Vorsichtsmaſsregeln getroffen sind, um die Wirbelströme zu vermeiden. Bei einer gewöhnlichen Drosselspule oder einem unbelasteten Transformator (wo e *theoretisch* $= 90^0$ werden sollte) bewirkt der Einfluſs der Hysteresis, daſs dieser Winkel nicht über etwa 74^0 hinaus wächst.

139. Instrument zur Messung der wirklichen Leistung. Es seien EG und GD zwei über einander gewickelte Spulen eines Wattmeters, welche seinen festen Teil bilden, und DB die bewegliche Spule. Der Strom $C + c$ tritt bei E ein und flieſst nach G. Ein Teil des Stromes von der Stärke c Ampère durchflieſst dann den induktionsfreien Widerstand GF von R Ohm; der Teil C flieſst dagegen von G nach D, von dort nach B und dann zu den Lampen oder Motoren. Der Momentanwert des Produktes $R \cdot c \cdot C$ charakterisiert die momentane Nutzleistung.

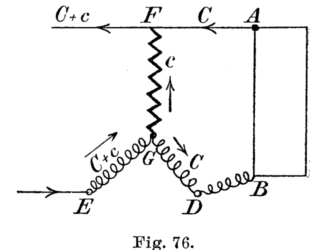


Fig. 76.

Die Spulen EG und GD sind nun sorgfältig so justiert, daſs bei $c = 0$ und bei Verwendung von Gleichstrom die bewegliche Spule DB keine Ablenkung erfährt. Schlieſsen wir jetzt den Stromzweig GF, so erzeugt die kombinierte Wirkung des Stromes $C + c$ (in der Spule EG) und des Stromes C in der Spule GD auf den Strom C in der Spule DB eine Kraft, resp. ein Drehmoment, dessen Gröſse proportional mit $c \cdot C$ ist; der Ausschlag des Instrumentes ist daher der Leistung genau proportional.

Nehmen wir anstatt des Gleichstromes Wechselstrom, so gelten genau dieselben Überlegungen, sofern nur die Entstehung von Foucault-Strömen vollständig verhindert wird.

140. Ein **magnetisches Feld** in der Richtung der x-Axe möge seine Stärke nach dem Gesetz $X = a \sin qt$ ändern, worin t die Zeit bedeutet. Ein anderes Feld in der Richtung der y-Axe, welches rechtwinklig zu dem ersteren steht, folge dem Getetze: $Y = a \cos qt$. In irgend einem Augenblick ist dann das resultierende Feld:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = a$$

und also gleich einer Konstanten, und bildet mit der x-Axe einen Winkel ϑ, der durch die Beziehungen: $\tan \vartheta = \frac{Y}{X}$ oder $\vartheta = qt$ gegeben ist.

Wir erhalten also ein konstantes Feld R, das mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit q umläuft.

Haben die Einzelfelder eine Phasenverschiebung gegen einander:

$$X = a_1 \sin (qt + \varepsilon_1)$$

$$Y = a_2 \sin (qt + \varepsilon_2),$$

so empfiehlt es sich, die Zusammensetzung graphisch vorzunehmen. Das resultierende Feld wird dann nach Gröſse und Richtung durch den Radiusvektor einer Ellipse dargestellt, welcher in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen bestreicht.

Es seien OX und OY in Fig. 77 die beiden erwähnten Richtungen. Wir ziehen OA_1 in der Richtung OX und machen es gleich a_1; mit $\overline{OA_1}$ als Radius beschreiben wir dann einen Kreis um O. Ferner

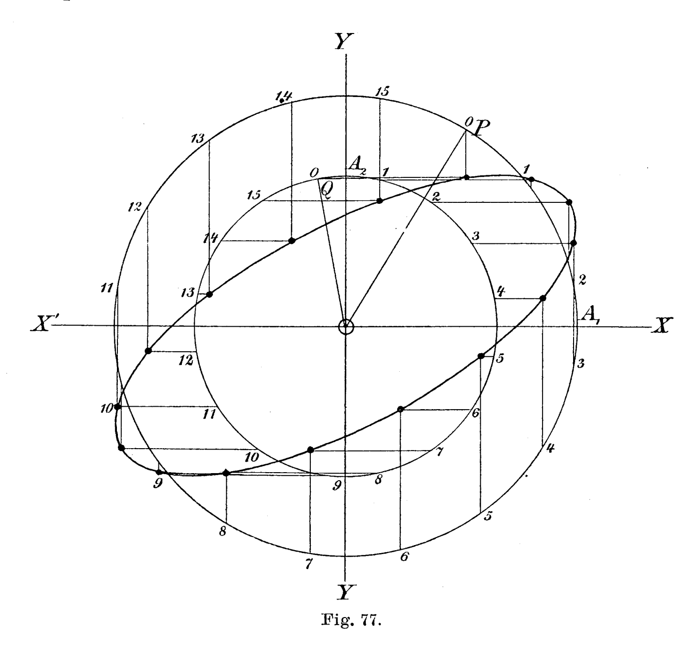


Fig. 77.

sei YOP der Winkel ε_1. Wir teilen nun den Kreis in eine groſse Anzahl gleicher Teile, wobei wir von P ausgehen, und bezeichnen die Teilpunkte mit 0, 1, 2, 3 u. s. w. Von diesen Punkten aus ziehen wir Parallelen zu OY.

In gleicher Weise machen wir OA_2 in der Richtung OY gleich a_2. Wir beschreiben einen Kreis mit $\overline{OA_2}$ als Radius, tragen den Winkel

$X'OQ = \varepsilon_2$ ab und teilen auch diesen Kreis durch die Punkte 0, 1, 2, 3 u. s. w. in die gleiche Anzahl Teile wie den ersten. Nun ziehen wir von diesen Punkten Parallelen zu OX, welche die vorhin gezogenen korrespondierenden Parallelen zu OY schneiden. Der Radiusvektor des Schnittpunktes zweier entsprechender Linien stellt — für den durch die Ziffern angedeuteten Augenblick — nach Gröfse und Richtung das resultierende magnetische Feld dar.

Liegen OX und OY nicht rechtwinklig zu einander, so behält doch die eben angegebene Anweisung für die Konstruktion ihre Gültigkeit bei.

Teilen wir den Kreis OA_2 nur in halb so viele Teile als OA_1, so erhalten wir die Kombination eines Feldes:

$$X = a_1 \sin (qt + \varepsilon_1)$$

mit einem zweiten:

$$Y = a_2 \sin (2qt + \varepsilon_2).$$

Wünschen wir die Kombination von zwei Feldern X und Y darzustellen, wenn beide ganz beliebige periodische Funktionen von verschiedener Form und verschiedener Periodenzahl sind, so zeichnen wir auf den beiden Feldaxen je eine volle Periode auf (Fig. 78). Die Kurve zwischen M_2 und N_2 stelle eine Periode des Y-Feldes dar, die Kurve zwischen M_1 und N_1 eine Periode des X-Feldes. M_2N_2 und M_1N_1 sind die beiden periodischen Zeiten. Sind nun P_1 und P_2 zwei Punkte auf den beiden Kurven, welche zu einem und demselben Zeitmoment gehören, so ziehen wir eine Horizontale durch P_2 und schneiden sie mit einer durch P_1 gelegten Vertikalen im Punkte P; **dann giebt OP für diesen Augenblick das resultierende magnetische Feld nach Richtung und Gröfse an.** Man führe diese Konstruktion sorgfältig durch. Sie ist anwendbar auf alle möglichen Aufgaben über die Zusammensetzung periodischer Vorgänge, nicht nur auf die Kombination von magnetischen Feldern.

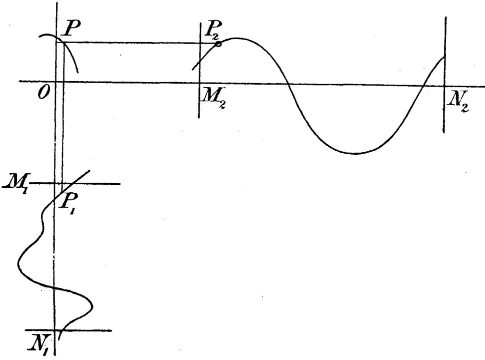
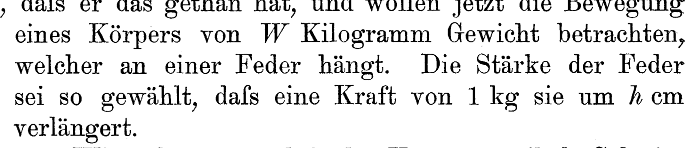


Fig. 78.

141. Mechanische Schwingungen. Der Studierende möge sich darin üben, die Gleichung (1) in Art. 119 aus der mathematischen

Formelsprache in die Ausdrucksweise des Laien zu übertragen. Wir setzen voraus, dafs er das gethan hat, und wollen jetzt die Bewegung



eines Körpers von W Kilogramm Gewicht betrachten, welcher an einer Feder hängt. Die Stärke der Feder sei so gewählt, dafs eine Kraft von 1 kg sie um h cm verlängert.

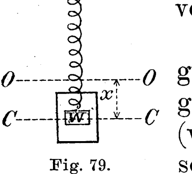


Fig. 79.

Wir nehmen an, dafs der Körper vertikale Schwingungen ausführt. Wenn er in der Lage CC liegt (Figur 79), x cm unterhalb seiner Gleichgewichtslage OO, (von wo er sich etwa noch weiter abwärts bewege), so ist die Kraft, welche ihn in seine Gleichgewichtslage zurückzuziehen versucht, gleich $\frac{x}{h}$ kg. Nun ist die Masse des schwingenden Körpers gleich $\frac{W}{g}$ (die Masse der Feder wollen wir vernachlässigen; wir könnten sie auch dadurch berücksichtigen, dafs wir ein Drittel derselben zu der Masse des schwingenden Körpers addieren). Folglich gilt die Gleichung:

$$\frac{W}{g} \cdot \text{Beschleunigung} = \frac{x}{h} \cdot$$

Die Beschleunigung ist demnach gleich $\frac{xg}{Wh}$; sie ist also proportional mit x, sodafs die Gleichungen des Art. 119 zutreffen.

Unser Wert $\frac{g}{Wh}$ steht jetzt für q^2 in Gleichung (1), und Gleichung (2) zeigt uns folglich das Gesetz, welches die Werte x und t mit einander verknüpft.

Man beachte dabei wohl, dafs das Pluszeichen in Gleichung (1) richtig ist: Der Körper bewegt sich abwärts und x wächst, sodafs $\frac{dx}{dt}$ positiv ist; dagegen ist $\frac{d^2x}{dt^2}$ negativ, weil der Körper sich um so langsamer bewegt, je gröfser x wird.

142. Angenommen, auf den schwingenden Körper wirke aufser der Kraft der Feder noch eine **bremsende Kraft,** welche seiner Geschwindigkeit proportional, nämlich, in kg gemessen, gleich $b\frac{dx}{dt}$ ist. Diese Kraft wirkt in derselben Richtung, wie die Kraft $\frac{x}{h}$, d. h. aufwärts, nach der Gleichgewichtslage hin; folglich können wir schreiben:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + \frac{x}{h} = 0. \tag{1}$$

Wir werden später sehen, welche Beziehung bei dieser **gedämpften Schwingung** zwischen x und t besteht.

143. Wir wollen nun annehmen, daſs bei dem letzten Beispiele **der Aufhängungspunkt B ebenfalls Schwingungen ausführt.** In dem Augenblicke, wo sich der Körper x cm unterhalb seiner Ruhelage befindet, sei der Punkt B um y cm gegenüber seiner ursprünglichen Lage nach unten verschoben. Die Feder hat sich dann in Wirklichkeit nur um $(x-y)$ cm verlängert, und die nach oben wirkende Federkraft beträgt also nur $\frac{x-y}{h}$ kg. Infolge dessen wird an Stelle von (1) jetzt die folgende Gleichung treten:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\frac{x}{h}=\frac{y}{h}. \tag{2}$$

Nun möge die Bewegung y als eine Funktion der Zeit gegeben sein; gesucht sei x ebenfalls als eine Funktion der Zeit. Die Bewegung y veranlaſst eine Bewegung der Masse W, die wir als **erzwungene Schwingung** zu bezeichnen pflegen. Ist $y=0$, so erhalten wir die natürliche oder freie Schwingung des Körpers.

Wir geben dieses Beispiel nicht, um es jetzt sogleich zu lösen, obwohl das nicht übermäſsig schwer wäre; sondern wir wollten den Leser mit Differentialgleichungen vertraut machen und ihn dazu anregen, dieselben aus der Formelsprache in Worte zu kleiden.

144. Pendelschwingungen. Es bezeichne ϑ den **Winkel,** um welchen sich ein fester schwingender Körper (etwa die Unruhe einer Taschenuhr) von seiner Gleichgewichtslage entfernt hat; ferner sei J sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Axe, und $H\vartheta$ die Summe der Richtkraftmomente in Bezug auf dieselbe Axe. Endlich sei $F\frac{d\vartheta}{dt}$ das Moment der Reibungskräfte, welches proportional mit der Geschwindigkeit angenommen wird. Dann ist:

$$J\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+F\frac{d\vartheta}{dt}+H\vartheta=H\vartheta', \tag{3}$$

wobei ϑ' den erzwungenen Winkelausschlag des Gehäuses oder Rahmens bedeutet, an dem die Spiralfedern oder die sonstigen richtenden Kräfte befestigt sind.

145. Die folgende Aufgabe ist ein ganz besonders lehrreiches Beispiel einer erzwungenen Schwingung. Wir greifen zurück auf Beispiel 1 des Art. 98, wo wir CR als die Spannungsdifferenz an den Enden eines Stromkreises fanden, welcher die beiden Belegungen des Kondensators mit einander verbindet. Ziehen wir für diesen

16*

Stromkreis die Selbstinduktion L mit in Rechnung, so ergiebt sich für die Spannung v die Beziehung:

$$v = RC + L\frac{dC}{dt}. \tag{4}$$

Wir können aber noch weiter gehen und den Fall betrachten, daſs ein Wechselstromgenerator mit der elektomotorischen Kraft e auf diesen Stromkreis wirkt. Dabei soll die Richtung der Spannung e positiv gerechnet werden, wenn sie den in Figur 58 eingezeichneten Strom C zu unterdrücken sucht. In diesem Falle gilt:

$$RC + L\frac{dC}{dt} = v - e. \tag{5}$$

Nun sahen wir aber, daſs der Strom gegeben ist durch:

$$C = -K\frac{dv}{dt}. \tag{6}$$

Wir setzen diesen Wert für C in (5) ein und erhalten:

$$-RK\frac{dv}{dt} - LK\frac{d^2v}{dt^2} = v - e,$$

$$LK\frac{d^2v}{dt^2} + RK\frac{dv}{dt} + v = e. \tag{7}$$

Nun sei e als eine Funktion der Zeit gegeben und v als Funktion der Zeit gesucht. Dann haben wir wieder eine den beiden letzten Beispielen ganz analoge Beziehung. Die Spannung e veranlaſst die Entstehung **eines erzwungenen Wechselstromes.** Ist $e = 0$, so erhalten wir nur die *natürliche* Schwingung des Systems. Haben wir v gefunden, so ergiebt sich C aus Gleichung (6).

146. Wenn wir (7) mit (2) oder mit (3) vergleichen, so erkennen wir sofort die **Analogie zwischen einem schwingenden mechanischen System und einem elektrischen.** Wir brauchen die Gleichungen nur folgendermaſsen unter einander zu schreiben:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + \frac{x}{h} = \frac{y}{h} \text{ (mechanische Schwingung).} \tag{8}$$

$$L\frac{d^2v}{dt^2} + R\frac{dv}{dt} + \frac{v}{K} = \frac{e}{K} \text{ (elektrische Schwingung).} \tag{9}$$

Die Masse $\frac{W}{g}$ entspricht dem Selbstinduktionskoeffizienten L. Der Reibungswiderstand pro Einheit der Geschwindigkeit entspricht dem elektrischen Widerstande R. Die Verschiebung x entspricht der Spannung v; um die Analogie scheinbar noch korrekter auszudrücken,

können wir auch v als den Quotienten aus Q, der „verschobenen“ Elektrizitätsmenge, und K, der Kapazität, betrachten. Die Nachgiebigkeit h der Feder entspricht der Kapazität K des Kondensators. Die erzwungene Verschiebung y entspricht endlich der erzwungenen elektrischen Spannung e des Generators.

147. Die vollständige Lösung von (8) oder (9), d. h. die Formulierung von x oder v als Funktion von t, mufs offenbar die beiden folgenden Spezialfälle mit einschliefsen:

1. Den Fall, dafs y oder e gleich 0 wird. Dann haben wir die **natürliche Schwingung** des Systems, welche je nach der Gröfse des mechanischen bezw. des elektrischen Widerstandes langsamer oder schneller verschwindet.

Wir werden später die Untersuchung dieser Schwingungen wieder aufnehmen. Es wird aber auch jetzt schon ohne weiteres einleuchten, dafs für $y = 0$ oder $e = 0$ unsere Gleichungen zeigen, was eintritt, wenn das System sich selbst überlassen wird.

2. Die allgemeine Lösung mufs ferner den Fall mit einschliefsen, dafs **nur die erzwungenen Schwingungen** eintreten. Durch Summierung beider Einzelschwingungen, der freien und der erzwungenen, kann man natürlich auch umgekehrt wieder die Gesamtbewegung erhalten (vergl. Art. 152).

148. Erzwungene Schwingungen. Da die mechanischen und elektrischen Vorgänge einander analog sind, so können wir hier unsere Betrachtungen auf eine der beiden Gruppen beschränken. Wir wählen dazu diejenige, welche unserer Anschauung näher liegt, also die mechanische. Wir wollen vorläufig von dem Einflufs der Reibung absehen und auch die natürlichen Schwingungen vernachlässigen, obwohl dieselben eigentlich nur dann unbeachtet gelassen werden dürfen, wenn etwas Reibung vorhanden ist.

Die Gleichung (8) geht beim Fehlen der Reibung über in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{Wh}x = \frac{g}{Wh}y. \tag{10}$$

Nun sei $y = a \sin qt$ die Bewegung, welche dem oberen Befestigungspunkte der Spiralfeder, an der W hängt, aufgezwungen wird. Ist y irgend eine kompliziertere periodische Funktion von t, so entwickeln wir dieselbe in eine Fouriersche Reihe und behandeln jedes Glied derselben einzeln; so können wir jede verwickelte Bewegung auf den angenommenen einfachen Fall zurückführen. Für $y = 0$ ergiebt sich, wie wir bereits wissen, die natürliche Schwingung des Körpers:

$$x = b \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{Wh}} + m\right),$$

worin b und m ganz beliebige Werte haben können.

Es ist zweckmäſsig, für den Ausdruck $\frac{g}{Wh}$ die Bezeichnung n^2 einzuführen, da wir aus demselben die Quadratwurzel zu ziehen haben. Dann ist n gleich 2π mal der Periodenzahl der natürlichen Schwingung von W, und wir schreiben also die Gleichung (10) besser in folgender Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = n^2y = n^2 a \sin qt. \tag{11}$$

Nun wollen wir annehmen, daſs es eine Lösung der Gleichung von der Form:

$$x = A \cdot \sin qt + B \cdot \cos qt$$

giebt. Dann ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Aq^2 \cdot \sin qt - Bq^2 \cdot \cos qt.$$

Diese beiden Ausdrücke tragen wir in (11) ein und erhalten durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\sin qt$ und $\cos qt$:

$$-Aq^2 + n^2A = n^2a; \quad A = \frac{n^2a}{n^2 - q^2}$$

und

$$-Bq^2 + n^2B = 0; \quad B = 0 \text{ (wenn nicht } n = q \text{ ist).}$$

Unsere Lösung lautet demnach:

$$x = \frac{n^2a}{n^2 - q^2} \sin qt. \tag{12}$$

Diese Gleichung zeigt, daſs die **erzwungene Schwingung** des Körpers W *synchron* mit der Bewegung des Aufhängepunktes erfolgt; ihre Amplitude ist indessen $\frac{1}{1 - \frac{q^2}{n^2}}$ mal so groſs, als die des Aufhängepunktes.

Nun wollen wir ein wenig mit Zahlen rechnen, um uns die Bedeutung der Lösung noch mehr zu veranschaulichen. Wir setzen $a = 1$ und nehmen für $\frac{q}{n}$ der Reihe nach kleine und gröſsere Zahlenwerte an. So bedeute z. B. $\frac{q}{n} = \frac{1}{10}$, daſs die natürliche Schwingung 10 mal so schnell erfolgt, als die erzwungene. In der folgenden Tabelle sind die Amplituden der erzwungenen Schwingung zusammengestellt, welche sich für die verschiedenen Werte von $\frac{q}{n}$ ergeben:

$\frac{q}{n}$	Amplitude der Bewegung von W	$\frac{q}{n}$	Amplitude der Bewegung von W
0,1	1,01	1,0	∞
0,5	1,333	1,01	— 50
0,8	2,778	1,03	— 16,4
0,9	5,263	1,1	— 4,762
0,95	10,26	1,5	— 0,800
0,97	16,92	2,0	— 0,333
0,98	25,25	5,0	— 0,042
0,99	50,25	10,0	— 0,010

Man beachte, dafs bei sehr kleinen Werten von $\frac{q}{n}$ die Amplitude der erzwungenen Schwingung fast genau gleich a wird. Ist also die erzwungene Schwingung gegenüber der freien eine sehr langsame, so wird die Bewegung des Körpers W fast **eine genaue Kopie** der Bewegung des Aufhängepunktes; die Feder und W bewegen sich dann wie ein starrer Körper. Nimmt aber die Periodenzahl der erzwungenen Schwingung zu, so wird die Bewegung von W **eine genaue Vergröfserung** der Bewegung von B; wird die erzwungene Periode nahezu gleich der natürlichen, so müfste diese **Vergröfserung ins Unendliche wachsen.** Nur die nie ganz vermeidbare Reibung hält dann die Amplitude der Schwingung in endlichen Grenzen. Ist dagegen die Zeitdauer der erzwungenen Periode kleiner als die der natürlichen, so eilt W immer eine halbe Periode hinter B her, und ist auf dem höchsten Punkt seiner Schwingung angelangt, wenn B sich an der tiefsten Stelle befindet. Wird die erzwungene Periodenzahl mehrmals gröfser als die natürliche, so bleibt die Bewegung von W nur sehr klein; der Körper befindet sich dann nahezu in Ruhe.

Der Konstrukteur eines **Erdbebenregistrierapparates** braucht einen Fixpunkt, welcher sich nicht mit bewegt, wenn alles übrige schwankt. Für die vertikale Bewegung ist bei dem zuletzt betrachteten Verhältnis der beiden Schwingungsperioden W ein derartiger Fixpunkt.

Auch der Fall, dafs die natürliche und die erzwungene Periode nahezu übereinstimmen, ist von praktischer Bedeutung: Bei musikalischen Instrumenten ist er die Vorbedingung für das Auftreten der **Resonanz.** Bei unseren *Hängebrücken* suchen wir ihn ängstlich zu vermeiden und lassen Truppenabteilungen stets „ohne Tritt“ passieren.

Bei *Wechselstromdynamos* erzeugt er das gefürchtete „Aufsertrittfallen“. Bei rythmischen Windstöfsen, deren Periode unglücklicherweise mit der natürlichen Schwingungszeit eines *Schornsteines* zusammenfällt, hilft auch die sorgfältigste Vorausberechnung der Stabilität nichts. So könnten wir leicht zwanzig interessante Beispiele anführen, bei denen das oben entwickelte Prinzip in den Überlegungen des praktischen Ingenieurs benutzt wird.

Der Leser mag nun die Analogie in Bezug auf die elektrischen Vorgänge selbst durchrechnen und die Hertzschen Schwingungen studieren.

149. Schwingung eines Dampfmaschinen-Indikators. Der Ausschlag des Schreibstiftes soll für jeden Augenblick genau die Gröfse des Dampfdruckes auf den Kolben angeben. Dies setzt voraus, dafs die natürliche Schwingung des Instrumentes sehr schnell durch die Reibung vernichtet wird. Nun würde aber jede Reibung zwischen festen Körpern Ungenauigkeiten hervorrufen, und in der That kann man beobachten, dafs ein schlecht in Stand gehaltenes Instrument unter allen Umständen zu grofse Diagramme erzeugt. Deswegen ist man genötigt, die Reibung auf das erreichbare Minimum zu reduzieren und mufs sich damit begnügen, die periodische Zeit der Eigenschwingung des Indikatorkolbens möglichst klein zu machen. In der Praxis finden wir, dafs es genügt, wenn die natürliche Schwingungszeit des Instrumentes etwa zwanzigmal kleiner ist, als die der Maschine; dann zeigt das Diagramm nur wenige kleine Wellen, welche durch die natürlichen Schwingungen des Indikators hervorgerufen sind. Ist dagegen die natürliche Periode nur zehnmal kürzer als die der Maschine, so erscheinen die Druckschwankungen im Diagramme bereits dermafsen übertrieben, dafs dasselbe unbrauchbar ist.

Die natürliche sekundliche Periodenzahl einer Masse $\frac{W}{g}$ an dem Ende einer Feder von der Elastizität h (vergl. Artikel 141) beträgt $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{Wh}}$, wenn wir die Reibung vernachlässigen; in Artikel 160 werden wir auf den Einflufs der Reibung näher eingehen. Wie grofs ist nun die natürliche Periodenzahl eines zusammengesetzten Mechanismus, wie wir ihn an unserem Indikator haben, der ebenfalls durch eine Feder in die Nulllage zurückgeführt wird?

A n t w o r t: In irgend einem Punkte des Indikatormechanismus befinde sich eine Masse $\frac{w}{g}$; dieselbe erleide eine Verschiebung s, wenn die Verschiebung des Federendpunktes (bei einem gewöhnlichen Indi-



kator zugleich die des Kolbens) gleich 1 ist. **Nun denke man sich die Masse $\frac{w}{g}$ ersetzt durch eine Masse $s^2\frac{w}{g}$, welche am Ende der Feder angebracht ist.** Dann ergiebt sich die Periodenzahl:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h\Sigma(s^2w)}}.$$

Um dies noch besser zu veranschaulichen, betrachten wir den in Figur 80 dargestellten Fall: OAB ist ein gewichtsloser Hebel, welcher bei O drehbar gelagert und bei B mit der Masse W (kg) fest verbunden ist. Die gewichtslose Feder greift im Punkte A an. Wenn A aus der Gleichgewichtslage nach unten um den Weg x bewegt wird, so entsteht in der Feder eine Zusatzkraft $\frac{x}{h}$. Die Winkelveränderung des Hebels in der Richtung des Uhrzeigers beträgt dabei $\frac{x}{\overline{OA}}$.

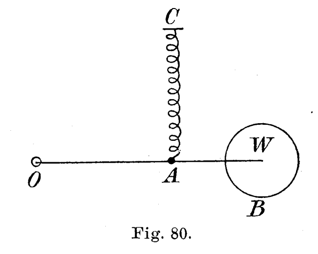


Fig. 80.

Nun ist das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung numerisch gleich dem Moment der wirkenden Kräfte. Das Trägheitsmoment ist aber $\frac{W}{g}\cdot\overline{OB}^2$, die Winkelbeschleunigung $\frac{x''}{\overline{OA}}$, worin x'' für $\frac{d^2x}{dt^2}$ gesetzt wurde, sodaſs also:

$$\frac{W}{g}\cdot\overline{OB}^2\cdot\frac{x''}{\overline{OA}}+\frac{x}{h}\cdot\overline{OA}=0,$$

oder

$$x''+\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}\cdot\frac{g}{Wh}\cdot x=0$$

wird.

Nun ist $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ der Wert, den wir vorhin mit s bezeichnet haben. s^2W steht also jetzt an Stelle des früheren W, das unmittelbar mit dem Ende der Feder verbunden war.

150. Erdbebenindikator. Figur 81 zeigt ein Instrument, welches gebraucht wird, um schnelle vertikale Schwankungen des Erdbodens anzuzeigen.

Die Masse CPQ ist im Punkte P auf einer Schneide oder auf Friktionsrollen gelagert. Der Schwerpunkt G befindet sich in gleicher Höhe mit P und Q. Wir setzen

$$\overline{PG}=a,\quad \overline{GQ}=b \text{ und } \overline{PQ}=a+b=l.$$

Die senkrechte Feder AR und der Faden RQ tragen den Körper im Punkte Q.

Bei der wirklichen Ausführung des Apparates ist AR eine Ayrton-Perry-Feder, welche durch Drehung des Zeigers R die relative Bewegung von Q gegen A angiebt; wir wollen die Trägheit der Feder und des Zeigers hier vernachlässigen und annehmen, dafs der Zeiger die relative Bewegung von Q gegen A genau registriert.

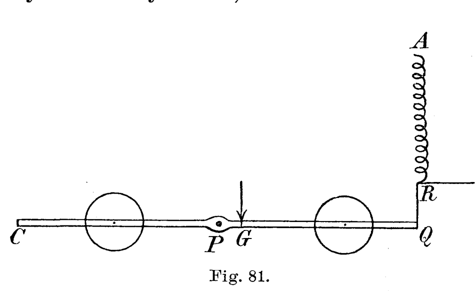


Fig. 81.

Es würde die Betrachtung vereinfachen, wenn wir nur diejenigen Kräfte bei P und Q berücksichtigen, welche aufser den bei der Gleichgewichtslage schon vorhandenen auftreten; aber um deutlicher zu sein, wollen wir doch lieber *alle* wirkenden Kräfte in die Rechnung einführen.

Wenn ein Körper in irgend einer Richtung parallel zur Papierebene in Bewegung gerät, so erhalten wir eine Bewegungsgleichung, indem wir **die resultierende Kraft numerisch gleich dem Produkt aus der Masse und der linearen Beschleunigung des Schwerpunktes in der Richtung der resultierenden Kraft** setzen. Eine zweite Gleichung erhalten wir dadurch, dafs wir **das Moment der resultierenden Kraft in Bezug auf eine rechtwinklig zur Papierebene durch den Schwerpunkt gelegte Axe gleich dem Produkt aus der Winkelbeschleunigung und dem Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Axe** setzen.

Wir wollen die Buchstaben x, x' und x'' benutzen, um den zurückgelegten Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu bezeichnen; x' und x'' stehen also für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Nun mögen die Punkte P und A eine Bewegung x_1 nach abwärts machen. Der Punkt Q bewege sich um x nach abwärts. Die Spannung der Feder ist dann $Q = Q_0 + c(x - x_1)$, wobei c eine bekannte Konstante ist (nämlich der reziproke Wert der Gröfse h, welche wir in Artikel 141 einführten).

W sei das Gewicht des Körpers, P_0 und Q_0 die nach oben gerichteten Kräfte, welche in den Punkten P und Q wirken, wenn sich der Körper in der Gleichgewichtslage befindet. Die Gleichgewichtsbedingung für den Ruhezustand ergiebt also:

$$Q_0(a + b) = Wa \quad \text{und} \quad P_0 + Q_0 = W.$$

Wir haben also:

$$P_0 = \frac{bW}{a+b}, \quad Q_0 = \frac{aW}{a+b}, \tag{1}$$

$$Q = Q_0 + c(x - x_1).$$

In dem betrachteten Augenblicke hat sich nun G um das Stück $\frac{b}{a+b}x_1 + \frac{a}{a+b}x$ nach unten verschoben. Der erstere der oben zitierten Sätze ergiebt also:

$$W - P - Q = \frac{W}{g}(bx_1'' + ax'')\frac{1}{a+b}. \tag{2}$$

Der Körper hat sich seit seiner Ruhelage in Bezug auf seinen Schwerpunkt um den Winkel $\frac{x - x_1}{a+b}$ im Sinne des Uhrzeigers gedreht. Bezeichnet J das Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt G, so ergiebt also der zweite vorhin erwähnte Satz die Beziehung:

$$-Qb + Pa = \frac{J}{a+b}(x'' - x_1''). \tag{3}$$

In (2) und (3) setzen wir nun den Wert für Q ein und eliminieren P. Bezeichnen wir dann noch $\frac{W}{g}$ mit M und J mit Mk^2, sodass k den Trägheitsradius in Bezug auf G bedeutet, so erhalten wir:

$$\frac{x''}{a+b}\left(\frac{J}{a} + aM\right) + xc\left(\frac{b}{a} + 1\right) \tag{4}$$

$$= \frac{x_1''}{a+b}\left(\frac{J}{a} - bM\right) + x_1 c\left(\frac{b}{a} + 1\right).$$

Bedeutet k_1 den Trägheitsradius in Bezug auf den Unterstützungspunkt P, so vereinfacht sich Gleichung (4) noch weiter zu:

$$x'' + n^2 x = e^2 x_1'' + n^2 x_1.$$

Darin steht n für $\frac{l}{k_1}\sqrt{\frac{c}{M}}$, ist also das 2π-fache der natürlichen Schwingungszahl; e^2 steht für $1 - \frac{al}{k_1^2}$.

Nun wollen wir anstatt des Ausdruckes $x - x_1$ eine besondere Bezeichnung y einführen, weil nicht x und x_1 selbst, sondern nur ihre Differenz, die relative Bewegung, der direkten Beobachtung zugänglich ist.

y ist also die an der Zeigerskala registrierte Bewegung, wenn die Aufhängepunkte mit dem ganzen Raum und mit dem Beobachter

die Bewegung x_1 machen. Setzen wir $y = x - x_1$ resp. $x = y + x_1$ in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$y'' + x_1'' + n^2(y + x_1) = e^2 x_1'' + n^2 x_1.$$

Daraus folgt:

$$(5) \qquad y'' + n^2 y = (e^2 - 1) x_1''$$

$$(6) \qquad y'' + n^2 y + \frac{al}{k_1^{\,2}} x_1'' = 0.$$

Jetzt wollen wir für die Schwingungen der Erdoberfläche einen sinusartigen Verlauf voraussetzen:

$$x_1 = A \cdot \sin qt.$$

Wir vernachlässigen die Reibung, um uns die Rechnung zu vereinfachen. Trotzdem wollen wir annehmen, dafs genug Reibung vorhanden sei, um die natürlichen Schwingungen des Apparates unmerkbar zu machen. Nehmen wir nun für y die Form an:

$$y = \alpha \sin qt,$$

so erhalten wir nach Formel (12) S. 246:

$$\alpha = \frac{al}{k_1^{\,2}} \cdot \frac{q^2}{n^2 - q^2} A;$$

d. h.: die scheinbare Bewegung von A gegen Q (und dies ist die Bewegung, welche der Zeiger der Ayrton-Perry-Feder angiebt, oder welche ein leichter Spiegel mit Hülfe eines Lichtstrahles auf einen Schirm projiziert) ist $\left(\frac{al}{k_1^{\,2}} \cdot \frac{q^2}{n^2 - q^2}\right)$-mal so stark als die wirkliche Bewegung des Rahmenwerkes, des Raumes und des Beobachters. Ist q grofs im Vergleich mit n, z. B. mehr als fünfmal so grofs, so können wir annehmen, dafs der Betrag der scheinbaren Bewegung gleich dem $\left(\frac{al}{k_1^{\,2}}\right)$-fachen der wirklichen Bewegung und unabhängig von der Periode ist. **Folglich wird jedes periodische Beben** (dessen periodische Zeit kleiner als ein Fünftel der periodischen Zeit des Apparates ist) **getreu aufgezeichnet.** Würde man $al = k_1^{\,2}$ machen, sodafs also Q der sogenannte Perkussionspunkt wird, so würde Q ein Fixpunkt sein und im Raume feststehen. Die praktische Ausführung schliefst sich indessen meistens mehr unserer Skizze an, und Q ist daher keineswegs immer ein Fixpunkt.

Instrumente ähnlicher Art werden benutzt für die Aufzeichnung der horizontalen Bewegung von Ost nach West, und ebenso für die von Nord nach Süd.

151. Eine Gleichung, welche aufser x und y auch noch $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder noch weitere Differentialquotienten von y in Bezug auf x enthält, heifst eine „**Differentialgleichung**". Wir werden sehen, dafs wir durch derartige Differentialgleichungen sehr allgemeine Arten der Abhängigkeit zwischen x und y zu definieren im Stande sind.

Wenn z. B. x eine Länge und t die Zeit bedeutet, so sagt die Differentialgleichung $\frac{d^3x}{dt^3} = 0$ aus, dafs $\frac{d^2x}{dt^2}$ (die Beschleunigung) konstant ist. In jener Differentialgleichung besitzen wir also den allgemeinsten Ausdruck für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wenn wir durch Integration zu der Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ übergehen, so treffen wir damit die bereits bestimmtere Festsetzung, dafs die unveränderliche Beschleunigung bekannt und gleich a sein soll. Stellen wir durch eine zweite Integration die Gleichung her:

$$\frac{dx}{dt} = at + b,$$

so ist in der Bestimmung der Bewegung ein weiterer Schritt gethan, insofern wir angaben, dafs die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gleich b sein soll. Gehen wir durch eine dritte Integration zu:

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c$$

über, so bestimmen wir, dafs $x = c$ zur Zeit $t = 0$ zutreffen soll.

Späterhin wird noch deutlicher werden, dafs viele der verbreitetsten Abhängigkeitsgesetze sich in der Gestalt von Differentialgleichungen in höchst einfache Ausdrucksformen kleiden. Daher wird es von grofser Wichtigkeit sein, dafs der Studierende, falls ihm eine Differentialgleichung begegnet, lernt, die durch dieselbe definierte Abhängigkeit zwischen x und y in Worte zu kleiden und damit in die sonst übliche Gestalt überzuführen.

152. Eine Gleichung der Gestalt:

$$(1) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + P\frac{d^3y}{dx^3} + Q\frac{d^2y}{dx^2} + R\frac{dy}{dx} + Sy = X,$$

in welcher P, Q, R, S und X Funktionen von x allein sind, wird als **lineare Differentialgleichung** bezeichnet, weil y und die Differentialquotienten von y nach x in derselben nur im *ersten* Grade enthalten sind.

Für den Maschineningenieur und Elektrotechniker kommen meist nur Gleichungen in Betracht, in denen die P, Q, ... bis auf X auch

von x unabhängig und also konstant sind. Die Gleichungen (8) und (9) in Artikel 146 sind hierher gehörige Beispiele.

Unten werden wir sehen, wie wir die *allgemeine* Lösung der Gleichung (1) im Falle, dafs X konstant gleich 0 ist, finden können. Allgemein heifst dabei die Lösung in dem Sinne, dafs sich jede denkbare Lösung als *partikulärer* Fall der fraglichen allgemeinen Lösung einordnet. Wir nehmen an, dafs $y = f(x)$ diese allgemeine Lösung sei. Alsdann werden wir noch sehen, dafs die Funktion $f(x)$ vier willkürliche Konstanten einschliefst, der Ordnung 4 des höchsten in (1) auftretenden Differentialquotienten $\frac{d^4y}{dx^4}$ entsprechend. Ändern wir jetzt die rechte Seite unserer Differentialgleichung dahin ab, dafs X nicht mehr konstant gleich 0 ist, sondern eine Funktion von x bedeutet, und können wir für die so gedachte Gleichung eine partikuläre Lösung $y = F(x)$ angeben, so wird in

$$y = f(x) + F(x)$$

gleichfalls eine Lösung dieser letzteren Differentialgleichung gewonnen sein; und zwar ist es, wie wir im dritten Kapitel zeigen werden, die *allgemeine* Lösung derselben.

Bis zum Schlusse des vorliegenden Kapitels betrachten wir einzig Differentialgleichungen mit konstantem P, Q, R, S; wir schreiben dann die Differentialgleichung besser in der Gestalt:

$$(2) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + A\frac{d^3y}{dx^3} + B\frac{d^2y}{dx^2} + C\frac{dy}{dx} + Ey = X,$$

wo alsdann A, B, C, E Konstanten sind und X eine Funktion von x allein bedeutet.

Manchmal wenden wir an Stelle von (2) die abgekürzte Schreibweise an:

$$(3) \qquad \left(\frac{d^4}{dx^4} + A\frac{d^3}{dx^3} + B\frac{d^2}{dx^2} + C\frac{d}{dx} + E\right)y = X.$$

153. Der allereinfachste hier eintretende Fall liefert die Differentialgleichung:

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} - ay = 0.$$

Hier haben wir offenbar (cf. Art. 97) in

$$(5) \qquad y = Me^{ax}$$

die allgemeine Lösung, wobei M eine willkürliche Konstante ist.

154. Als zweites Beispiel setzen wir an:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = 0. \tag{6}$$

Durch direkte Ausrechnung sehen wir, dafs:

$$y = Me^{ax} + Ne^{-ax} \tag{7}$$

die allgemeine Lösung darstellt, wobei M und N zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Setzen wir hingegen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0, \tag{8}$$

so müfsten wir in (6) für a den Wert ni, unter i die Wurzel $\sqrt{-1}$ verstanden, eintragen und würden aus (7) die Lösung:

$$y = Me^{nix} + Ne^{-nix} \tag{9}$$

der Gleichung (8) gewinnen. Versuchen wir, ob dies wirklich eine Lösung ist, indem wir mit i wie mit einer reellen Gröfse rechnen und also $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ... setzen, so zeigt sich, dafs die in (9) dargestellte Funktion y in der That unsere Differentialgleichung befriedigt. Aber welche Bedeutung sollen wir solch einem Ausdruck, wie dem in (9) rechts stehenden, beilegen? Indem wir uns der merkwürdigen Analogien erinnern, welche zwischen der Exponentialfunktion und den Funktionen Sinus und Cosinus bestehen (vergl. Art. 106), setzen wir:

$$y = M_1 \sin nx + N_1 \cos nx \tag{10}$$

und finden durch Rechnung, dafs wir die allgemeine Lösung der Gleichung (8) auch in dieser Form schreiben können.

Da wir nun in (9) wie in (10) beide Male die *allgemeine* Lösung (cf. Art. 152) haben, insofern in beiden Ausdrücken *zwei* willkürliche (reelle oder imaginäre) Konstanten enthalten sind, so haben wir die Ausdrücke (9) und (10) als mit einander vollständig gleichwertig anzusehen. Als lehrreiche Übung empfehlen wir dem Leser, vermöge der in Art. 106 angegebenen Ausdrücke des Sinus und Cosinus durch die Exponentialfunktion den Ausdruck (10) in die Gestalt (9) zu bringen, wobei er sich nur auf den Standpunkt stellen mufs, dafs die willkürlichen Konstanten nicht reell zu sein brauchen. Es ist hiernach für den Ingenieur durchaus nicht unwichtig, gelegentlich auch von solchen Gröfsen Gebrauch zu machen, welche die Mathematiker als *imaginär* bezeichnen.

155. Wir gehen jetzt weiter zu einer beliebigen Differentialgleichung (2) mit konstanten Koeffizienten und **verschwindender rechten Seite, $X = 0$,** und versuchen, dieselbe durch eine Funktion der Gestalt $y = Me^{mx}$ zu befriedigen. Hierzu ist, wie wir finden, hinreichend, dafs m die Gleichung erfüllt:

(1) $$m^4 + Am^3 + Bm^2 + Cm + E = 0.$$

Man bezeichnet die letztere gewöhnlich als eine *Hilfsgleichung*. Wir bestimmen die vier Wurzeln m_1, m_2, m_3, m_4 derselben, d. h. diejenigen vier Werte von m, welche die Gleichung (1) befriedigen, und haben dann in:

$$y = M_1 e^{m_1 x} + M_2 e^{m_2 x} + M_3 e^{m_3 x} + M_4 e^{m_4 x}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (2), falls X mit 0 identisch ist; M_1, M_2, ... sind hierbei willkürliche Konstanten.

156. Um in dieser Weise die Gleichung:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 5\frac{d^3 y}{dx^3} + 5\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

zu lösen, setzen wir $y = e^{mx}$ und finden, dafs m die Gleichung:

$$m^4 + 5m^3 + 5m^2 - 5m - 6 = 0$$

befriedigen mufs.

Setzen wir $m = 1$ ein, so ist die Hilfsgleichung befriedigt, sodafs $m = 1$ eine Lösung der letzteren ist. Teilen wir die linke Seite durch $m - 1$, so restiert eine Gleichung dritten Grades, welche die Wurzel $m = -1$ hat. Nach Division durch $m + 1$ bleibt eine quadratische Gleichung, die die beiden noch rückständigen Wurzeln $m = -2$ und $m = -3$ liefert. Hiernach ist:

$$y = M_1 e^{x} + M_2 e^{-x} + M_3 e^{-2x} + M_4 e^{-3x}$$

mit den willkürlichen Konstanten M_1, M_2, ... die allgemeine Lösung.

157. Es möge jetzt die Hilfsgleichung (1) eine komplexe Wurzel $m + ni$ haben, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Nach bekannten Sätzen der Algebra kommen derartige komplexe Wurzeln immer paarweise vor; hat man nämlich eine Wurzel $m + ni$, so findet sich immer auch noch die Wurzel $m - ni$ ein. Lassen wir die der dritten und vierten Wurzel entsprechenden Glieder aus, so hat y gegenwärtig die Gestalt:

$$y = M_1 e^{(m-ni)x} + N_1 e^{(m+ni)x} = e^{mx}(M_1 e^{-nix} + N_1 e^{+nix});$$

hierfür können wir nach Art. 154 auch schreiben:

$$y = e^{mx}(M \sin nx + N \cos nx),$$

wo M und N willkürliche Konstanten bedeuten.



158. Man nehme ferner an, daſs zwei Wurzeln der Hilfsgleichung einander gleich werden. Nennen wir ihren gemeinsamen Wert m, so würde der Ausdruck:

$$y = M_1 e^{mx} + M_2 e^{mx},$$

insofern unzulänglich werden, als er sich auf $(M_1 + M_2)e^{mx}$ oder Me^{mx} zusammenzieht und also nur *eine* willkürliche Konstante aufweist, während doch in der allgemeinen Lösung jenen beiden Wurzeln entsprechend *zwei* Konstanten enthalten sein müssen. In diesem Falle nehmen wir unsere Zuflucht zu einem Kunstgriffe: Wir nehmen zwei Wurzeln der Hilfsgleichung in der Gestalt m und $m + h$ an und stellen uns vor, daſs die Gröſse h unendlich klein wird. Für y haben wir dann:

$$y = M_1 e^{mx} + M_2 e^{(m+h)x} = e^{mx}(M_1 + M_2 e^{hx}).$$

Dieser Ausdruck läſst sich aber unter Benutzung der in Art. 97 angegebenen Reihenentwicklung:

$$e^{hx} = 1 + hx + \frac{h^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{h^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

so umgestalten:

$$y = e^{mx}\left(M_1 + M_2 + M_2 hx + M_2 \frac{h^2x^2}{2} + \cdots\right).$$

Man setze jetzt $M_2 h = N$ und lasse, während h unendlich klein wird, M_2 in der Art zunehmen, daſs $M_2 h = N$ einem willkürlich zu wählenden Werte gleich wird. Zugleich setze man $M_1 + M_2 = M$ und gewinnt, indem $M_2 h^2 = Nh$, $M_2 h^3 = Nh^2$, ... verschwinden, für y den Ausdruck:

$$y = e^{mx}(M + Nx).$$

Wenn dieser Gedankengang dem Leser nicht recht einleuchten will, so möge er sich erinnern, daſs man stets durch direkte Rechnung, nämlich durch Eintragung des angegebenen Ausdrucks von y in die Differentialgleichung, die Richtigkeit dieses Ausdrucks bestätigen kann.

159. Durch die vorstehenden Entwicklungen sind wir zu folgender **allgemeinen Regel** für die Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten hingeführt: Die vorgelegte Differentialgleichung sei:

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + G\frac{dy}{dx} + Hy = 0.$$

Man bilde alsdann die Hilfsgleichung:

$$m^n + Am^{n-1} + Bm^{n-2} + \cdots + Gm + H = 0.$$

Der Ausdruck der vollständigen Lösung y wird sich in Gestalt einer Reihe von Gliedern folgender Art darstellen: Für die einzelne der unterschiedenen reellen Wurzeln m, die etwa α_1 heifse, tritt ein Glied $M_1 e^{\alpha_1 x}$ ein; für das einzelne Paar imaginärer Wurzeln $\alpha_2 \pm \beta_2 i$ folgen die Glieder:

$$e^{\alpha_2 x}(M_2 \sin \beta_2 x + N_2 \cos \beta_2 x).$$

Hierbei sind M_1, M_2, N_2 willkürliche Konstanten, und es gilt die Annahme, dafs die betreffende Wurzel m nur einmal unter allen n Wurzeln der Hilfsgleichung vorkommt. Demgegenüber entspricht einer r-fachen Wurzel m das Produkt von e^{mx} mit einem Polynom $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades in x, d. h. ein Ausdruck von der Gestalt:

$$e^{mx}(M_1 + M_2 x + M_3 x^2 + \cdots + M_r x^{r-1}).$$

Beispiel. Zu lösen sei die Differentialgleichung:

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 12\frac{d^4y}{dx^4} + 66\frac{d^3y}{dx^3} + 206\frac{d^2y}{dx^2} + 345\frac{dy}{dx} + 234y = 0.$$

Man bilde die Hilfsgleichung und wird leicht bestätigen, dafs deren fünf Wurzeln die folgenden sind:

$$-3, \quad -3, \quad -2, \quad -2+3i, \quad -2-3i.$$

Folglich hat man als Lösung:

$$y = (M_1 + N_1 x)e^{-3x} + M_2 e^{-2x} + e^{-2x}(M_3 \sin 3x + N_3 \cos 3x).$$

Übungsaufgaben.

1) Man integriere die Differentialgleichung: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$

Antwort: $y = Ae^{3x} + Be^x.$

2) Man integriere: $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 34y = 0.$

Antwort: $y = e^{5x}(A \sin 3x + B \cos 3x).$

3) Man integriere: $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$

Antwort: $y = (A + Bx)e^{-3x}.$

4) Man integriere: $\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 62\frac{d^2y}{dx^2} - 156\frac{dy}{dx} + 169y = 0.$

Hier hat man die Hilfsgleichung:

$$m^4 - 12m^3 + 62m^2 - 156m + 169 = 0,$$

in deren linker Seite man ein vollständiges Quadrat erkennt. Als Wurzeln der Hilfsgleichung finden sich:

$$3+2i, \quad 3+2i, \quad 3-2i, \quad 3-2i.$$

Dem entspricht folgende allgemeine Lösung:

$$y = e^{3x}[(A_1 + B_1 x) \sin 2x + (A_2 + B_2 x) \cos 2x].$$

Wir werden nun ein Beispiel von sehr wichtiger physikalischer Bedeutung behandeln.

160. Natürliche Schwingungen.

Beispiel. Wir betrachteten in Artikel 146 u. f. ein **mechanisches** System, welches mit einem Freiheitsgrade schwingt, und verglichen seine Bewegung mit dem Wogen des Stromes in einem **elektrischen** System, welches aus einem Kondensator und einer Spule mit Widerstand und Selbstinduktion besteht. Wir vernachlässigten indessen bei dem mechanischen System die Reibung, bei dem elektrischen den Ohmschen Widerstand. Jetzt wollen wir die natürlichen Schwingungen der Systeme studieren und dabei auch die Reibung berücksichtigen.

Wir wählen dazu wie vorhin das mechanische Problem: Ein Gewicht von W kg hängt an dem Ende einer Feder, welche sich bei einer Belastung von $\frac{x}{h}$ kg um x cm verlängert; eine Reibung, welche gleich dem Produkte der Konstanten b und der Geschwindigkeit ist, sucht die Bewegung zu dämpfen. Dann gilt die Gleichung (8) aus Artikel 146 mit $y = 0$:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \frac{x}{h} = 0,$$

oder

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{bg}{W} \frac{dx}{dt} + \frac{xg}{Wh} = 0.$$

Hier wollen wir den Ausdruck $\frac{bg}{W}$ mit $2f$ bezeichnen und ferner $\frac{g}{Wh}$ gleich n^2 setzen; dann nimmt Gleichung (1) folgende Form an:

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2f \frac{dx}{dt} + n^2 x = 0.$$

Wir bilden die Hilfsgleichung und finden für die beiden Wurzeln die Werte:

$$m = -f \pm \sqrt{f^2 - n^2}.$$

Wir bekommen nun verschiedene Lösungen für unsere Frage, jenachdem sich f und n zu einander verhalten. Außerdem müssen

wir die Anfangsbedingungen der Bewegung kennen, um die willkürlichen Konstanten ermitteln zu können. Die Zeit wollen wir von dem Augenblicke ab rechnen, wo $x = 0$ ist, und die Geschwindigkeit in diesem Augenblicke werde mit v_0 bezeichnet. Es kommen nun die folgenden vier Fälle in Betracht:

I. Es sei $f > n$, und die Wurzeln m seien $-\alpha$ und $-\beta$.

II. Es sei $f = n$; die Wurzeln sind dann $-f$ und $-f$.

III. Es sei $f < n$, und die Wurzeln seien $-a \pm bi$.

IV. Es sei $f = 0$; die Wurzeln sind dann $\pm ni$.

Jetzt wenden wir unsere Regel von Artikel 159 an und erhalten im Falle I:

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}.$$

Da wir zudem wissen, dafs bei $x = 0$ auch $t = 0$ und $\frac{dx}{dt} = v_0$ ist, so können wir A und B ermitteln und also x als eine Funktion von t darstellen.

Im Falle II lautet die Lösung:

$$x = (A + Bt)e^{-ft};$$

im Falle III:

$$x = e^{-at}(A \sin bt + B \cos bt);$$

im Falle IV:

$$x = A \sin nt + B \cos nt.$$

161. Jetzt wollen wir dieselben vier Fälle unter Zugrundelegung bestimmter Zahlenwerte noch einmal betrachten. Der Leser darf überzeugt sein, dafs die hier und bei ähnlichen Aufgaben auf solche Wiederholungsrechnungen verwendete Zeit niemals verloren ist.

Man setze $n = 3$ und nehme dann für f verschiedene Werte an. Um die vier Fälle bequem mit einander vergleichen zu können, setzen wir für den Zeitpunkt $t = 0$ bei allen $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = 6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Fall IV. Es sei $f = 0$, dann ist: $x = A \sin 3t + B \cos 3t$.

Das ergiebt für den Nullpunkt der Zeit: $0 = A \cdot 0 + B \cdot 1$, sodafs $B = 0$ wird.

Ferner ist $\frac{dx}{dt} = 3A \cos 3t - 3B \sin 3t$, also zur Zeit $t = 0$:

$$6 = 3A,$$

sodafs $A = \frac{6}{3} = 2$ wird. Die Bewegungskurve heifst also: $x = 2 \cdot \sin 3t$. Danach ist die Kurve 4, Figur 82 gezeichnet. Sie ist natürlich eine Sinuskurve und stellt eine ungedämpfte einfache harmonische Bewegung dar.



Fall III. Es sei $f = 0,3$. Die Hilfsgleichung ergiebt dann:

$$m = -0,3 \pm \sqrt{0,09 - 9} = -0,3 \pm 2,985\,i.$$

Wir haben also die Werte $a = 0,3$ und $b = 2,985$ in die Gleichung:

(1) $$x = e^{-at}(A \sin bt + B \cos bt)$$

einzusetzen.

Wir haben nun zwar noch nicht gelernt, ein Produkt zu differenzieren, obwohl wir die Regel hierfür schon in Artikel 90 an-

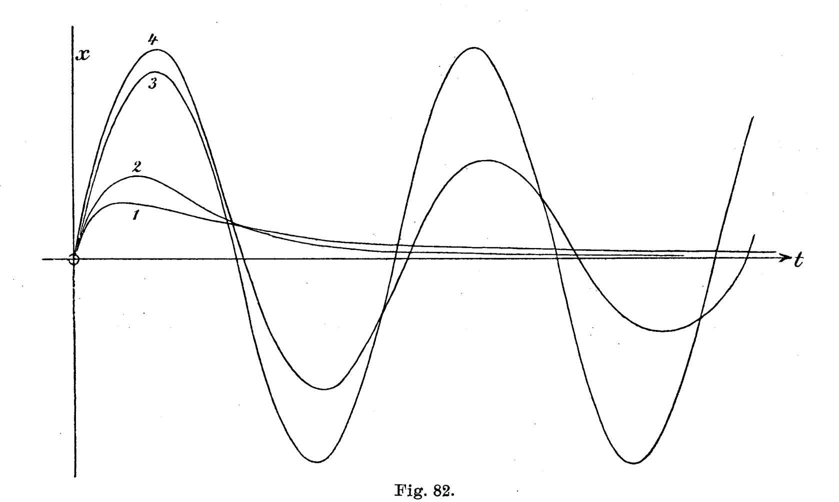


Fig. 82.

deuteten. Kapitel III wird uns viele Beispiele für diese Regel bringen. Indem wir sie einstweilen als bekannt voraussetzen, finden wir:

(2) $$\frac{dx}{dt} = -ae^{-at}(A \sin bt + B \cos bt) + be^{-at}(A \cos bt - B \sin bt).$$

Nun setzen wir die Werte $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = 6$ für den Augenblick $t = 0$ ein. Dann ergiebt sich aus (1): $B = 0$ und aus (2):

$$6 = bA; \quad A = \frac{6}{b} = \frac{6}{2,985} = 2,01.$$

Daraus folgt dann:

$$x = 2,01 \cdot e^{-0,3t} \sin 2,985\,t.$$

Diese Bewegung ist durch die Kurve 3 in Figur 82 dargestellt. Man beachte, dafs sich infolge der Reibung die Zeitdauer einer Periode gegenüber dem vorigen Falle geändert hat.

Fall II. Es sei $f = 3$. Dann sind die beiden Wurzeln m der Hilfsgleichung einander gleich, und zwar gleich -3. Folglich wird:

$$x = (A + Bt)e^{-3t}. \tag{3}$$

Hier haben wir wieder ein Produkt zu differenzieren und erhalten:

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-3t} - 3(A + Bt)e^{-3t}. \tag{4}$$

Wir setzen wieder die Anfangsbedingungen ein:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = 6 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Dann ergiebt Gleichung (3):

$$A = 0$$

und Gleichung (4):

$$B = 6.$$

Folglich wird:

$$x = 6t \cdot e^{-3t}.$$

Diese Funktion ist durch Kurve 2 in Figur 82 graphisch dargestellt.

Fall I. Es sei $f = 5$. Die Wurzeln der Hilfsgleichung sind dann -9 und -1. Also ergiebt sich:

$$x = Ae^{-9t} + Be^{-t},$$

$$\frac{dx}{dt} = -9Ae^{-9t} - Be^{-t}.$$

Nach Einsetzen der Anfangsbedingungen folgt:

$$0 = A + B, \quad 6 = -9A - B$$

und daraus:

$$A = -\tfrac{3}{4}, \quad B = +\tfrac{3}{4},$$

sodafs

$$x = \tfrac{3}{4}(e^{-t} - e^{-9t})$$

wird, wie es die Kurve 1 in Figur 82 darstellt.

Der Leser sollte nun als zweite Aufgabe ein ähnliches Beispiel mit den Anfangsbedingungen $x = 10$ und $\frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$ durchrechnen.

Dies würde sich auf die Bewegung eines Körpers beziehen, welcher im Augenblicke $t = 0$ sich selbst überlassen wird, oder bei dem elektrischen Beispiel auf den Entladestrom eines Kondensators, wenn die Entladung zur Zeit $t = 0$ beginnt.



Man beachte, dafs man durch Differentiation von Gleichung (1) Artikel 160 in Bezug auf t (wobei wir anstatt $\frac{dx}{dt}$ den Buchstaben v schreiben wollen) erhält:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{bg}{W}\frac{dv}{dt} + \frac{g}{Wh}v = 0.$$

Wir haben demnach genau dasselbe Gesetz für die Geschwindigkeit (sowie auch für die Beschleunigung), welches auch für x selbst gilt.

Ebenso finden wir bei dem elektrischen Beispiel, da $K\frac{dv}{dt}$ die Stromstärke angiebt, durch Differentiation genau dasselbe Gesetz für den Strom wie für die Spannung.

Natürlich können durch den Einflufs der Anfangsbedingungen Verschiedenheiten entstehen.

162. Wenn die rechte Seite einer linearen Differentialgleichung (wie in (2) Artikel 152) nicht gleich 0 ist, so kommt dies bei dem eben besprochenen mechanischen Probleme darauf hinaus, dafs unsere Lösung sowohl die erzwungene Bewegung eines Systems als auch seine natürlichen Schwingungen darstellen soll. Hier ist es der Mühe wert, das Problem von einem Gesichtspunkte aus zu betrachten, welcher durch das folgende einfache Beispiel illustriert wird.

Zu lösen sei Gleichung (11) aus Artikel 148:

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = n^2a \sin qt.$$

Das ist die Gleichung für die Bewegung eines Systems, welches mit einem Grade der Freiheit und ohne Reibung schwingt.

Wir differenzieren zweimal und finden:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + n^2\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2q^2a \sin qt.$$

Wir multiplizieren nun Gleichung (1) mit q^2 und addieren diese Gleichung zu der letzten. Dann erhalten wir:

(2) $$\frac{d^4x}{dt^4} + (n^2+q^2)\frac{d^2x}{dt^2} + q^2n^2x^2 = 0.$$

Die Hilfsgleichung zur Lösung von (2) heifst:

(3) $$m^4 + (n^2+q^2)m^2 + q^2n^2 = 0,$$

und wir finden, dafs dafür $\pm ni$ zwei Wurzeln und $\pm qi$ die beiden anderen Wurzeln sind. Folglich haben wir als allgemeine Lösung:

(4) $$x = A \sin nt + B \cos nt + C \sin qt + D \cos qt.$$



Nun haben wir aber erst durch die Differentiation von (1) die beiden Gröfsen C und D als neue willkürliche Konstanten eingeführt; folglich müssen wir dadurch, dafs wir (4) in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, die wahren Werte von C und D finden, die in der That nicht willkürlich sind. Es ist nämlich zu beachten, dafs wir durch Differentiation von (1) und Übergang zur Gleichung (2) **das System beweglicher machen** oder ihm einen höheren Grad der Freiheit geben. Wir können auch sagen, dafs wir es zu einem Teile eines gröfseren Systems machen, eines Systems, dessen natürliche Schwingungen durch Gleichung (4) gegeben sind.

Wenn wir eine Masse an dem Ende einer Feder schwingen lassen, so bleibt der gemeinsame Schwerpunkt der Masse, des tragenden Rahmens und des starr mit demselben verbundenen Raumes unbeweglich. Folglich treten *in dem stützenden Rahmen* Schwingungen auf und es entsteht eine Reibung, welche diese Schwingungen zu dämpfen sucht. Ist dagegen noch eine zweite ebenfalls schwingende Masse vorhanden, so kann dadurch dies Vibrieren des Fundamentes verringert werden.

Wenn z. B. in Figur 83 M am Ende der Blattfeder MA schwingt, welche in dem Schraubstock A fest eingeklemmt ist, so mufs jede Bewegung von M nach rechts begleitet sein von einer Bewegung von A und seiner Unterlage nach links. Haben wir aber zwei Massen M_1 und M_2 (wie bei einer Stimmgabel), welche sich in jedem Augenblick in entgegengesetzter Richtung bewegen, so braucht das Fundament keine Schwingungen mitzumachen. Folglich schwingt das System M_1, M_2 so, als ob weniger Reibung vorhanden wäre als bei nur einer Masse, d. h. längere Zeit. Dieser Kunstgriff findet bei der Stimmgabel praktische Anwendung. Sollten anfangs, beim Anschlagen der Stimmgabel, die Bewegungen von M_1 und M_2 nicht genau symmetrisch erfolgen, so wird die Symmetrie doch sehr bald eintreten; **denn jede Bewegungskomponente, welche eine Verschiebung des Schwerpunktes der unterstützenden Masse bedingt, wird durch die auftretende Reibung sehr schnell so gedämpft, dafs sie gänzlich verschwindet.**

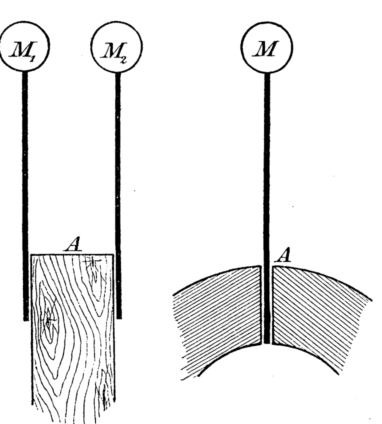


Fig. 83.

Der Konstrukteur von Dampfmaschinen und der Fabrikbesitzer,

welcher Dampfmaschinen in Städten aufstellen muſs, wo Erschütterungen des Bodens nicht zulässig sind, ist genötigt, auf diese Verhältnisse Rücksicht zu nehmen.

163. In Formel (3) Artikel 152 hatten wir auf die Funktion y von x eine ziemlich verwickelte Operation auszuüben. Manchmal schreiben wir diese Gleichung in der symbolischen Gestalt:

$$(\theta^4 + A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + E)y = X,$$

die durchaus dasselbe besagen soll, wie die Gleichung (3) Artikel 152. Hier schreibt θy einfach vor, daſs y nach x differenziert werden soll, entsprechend $\theta^2 y$, daſs y zweimal nach x zu differenzieren ist, u. s. w.

Man hat hier natürlich $\theta, \theta^2, \ldots$ nur als **Operationssymbole** aufzufassen, was ja nicht schwer sein wird. Wir brauchen sonach kaum auszusprechen, daſs $\theta^2 y$ nicht etwa das Quadrat einer Gröſse θ multipliziert mit y bedeutet; es ist dies vielmehr nur ein abgekürztes Zeichen für die Vorschrift, daſs y zweimal nach x zu differenzieren ist. Das Symbol $\theta\theta y$ würde dasselbe bedeuten. Was wird nun bei dieser Art symbolischer Schreibweise $(\theta + a)y$ bedeuten? Offenbar $\frac{dy}{dx} + ay$. Was bedeutet $(\theta^2 + A\theta + B)y$? Nichts anderes als:

$$\frac{dy^2}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By.$$

$(\theta + a)y$ schreibt also vor, daſs wir y differenzieren sollen und zum Differentialquotienten das Produkt von a und y zu addieren haben; denn a ist nur ein Multiplikator, während θ ein Operationssymbol ist. Gleichwohl beachte man, daſs $(\theta + a)y = \theta y + ay$ gilt, als ob θ ein Zahlenfaktor wäre.

In der That finden wir, daſs θ in derartigen Gleichungen zwischen Operationssymbolen vielfach das Verhalten einer Zahl besitzt, obwohl es natürlich keineswegs eine solche darstellt.

Sind u und v zwei Funktionen von x, so gilt bekanntlich:

$$\theta(u + v) = \theta u + \theta v.$$

Wir können sagen, daſs hierdurch das **distributive Gesetz** zum Ausdruck kommt.

Ist andrerseits a eine Constante, so gilt:

$$\theta(au) = a\theta u,$$

oder die Operation θa ist gleichwertig mit $a\theta$. Hier sprechen wir vom **kommutativen Gesetze.**

Endlich gilt $\theta^n\theta^m = \theta^{m+n}$, wodurch das **Exponentialgesetz** zum Ausdruck kommt.

Sind diese drei Gesetze erfüllt, so folgt aus ihnen eine Reihe weiterer Regeln zur Umformung algebraischer Ausdrücke. Nur mufs man sich hüten, das Operationssymbol θ etwa in *jedem* Falle wie eine Zahl zu behandeln. Man beachte z. B., dafs für den Fall, wo u und v Funktionen von x sind, $v\theta u$, was $v\frac{du}{dx}$ bedeutet, sehr verschieden von $\theta(uv)$ ist.

Man wolle jetzt die Operation $\theta + b$ auf $(\theta + a)y$ ausüben, wobei:

$$(\theta + a)y = \theta y + ay = \frac{dy}{dx} + ay$$

ist. Die Operation $\theta + b$ schreibt vor, den Ausdruck $\frac{dy}{dx} + ay$ nach x zu differenzieren (was $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx}$ ergiebt) und das b-fache von $\frac{dy}{dx} + ay$ zu addieren. Folglich erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + b\frac{dy}{dx} + aby \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} + (a+b)\frac{dy}{dx} + aby$$

oder

$$[\theta^2 + (a+b)\theta + ab]y.$$

Wir sehen demnach, dafs die Kombination:

$$(\theta + b)(\theta + a)$$

der beiden Operationen $\theta + a$ und $\theta + b$ dasselbe Resultat ergiebt, wie:

$$[\theta^2 + (a+b)\theta + ab].$$

Auf diese Weise überzeugt man sich, dafs das Operationssymbol θ in den hier betrachteten Kombinationen wieder das Verhalten wie eine Zahlgröfse zeigt, so lange die Gröfsen $a, b, \ldots$ Konstanten sind. Man beachte hierbei auch noch die Gleichung:

$$(\theta + a)(\theta + b) = (\theta + b)(\theta + a).$$

Der Leser wolle diese Formel entwickeln und sich von ihrer Richtigkeit überzeugen; er möge sich auf diese Weise vertraut machen mit der hier eingeführten symbolischen Schreibweise der Differentialquotienten. Er wird finden, dafs diese Schreibweise ganz bedeutende Kürzungen der Formeln ermöglicht. Man vergleiche z. B. den Ausdruck:

$$(a\theta + b)(\alpha\theta + \beta)y$$

mit:

$$[a\alpha\theta^2 + (a\beta + \alpha b)\theta + b\beta]y \text{ oder } a\alpha\frac{d^2y}{dx^2} + (a\beta + \alpha b)\frac{dy}{dx} + b\beta y.$$



164. Wir nehmen jetzt an, dafs in Dy unter D das Symbol für irgend eine bestimmte auf y auszuübende Operation verstanden ist, und setzen die Gleichung an:

$$Dy = X.$$

Es ist alsdann einleuchtend, dafs, wenn wir die Operation D umzukehren und damit die inverse Operation $D^{-1} = \frac{1}{D}$ herzustellen verstehen, die Gleichung:

$$y = D^{-1}X = \frac{X}{D}$$

gilt. Offenbar ist dabei die inverse Operation D^{-1} so zu verstehen, dafs D auf $D^{-1}X$ angewendet die Wirkung der Operation D^{-1} rückgängig macht und also zu X zurückführt.

Wählen wir jetzt eine spezielle Operation D, indem wir D mit der oben durch $(\theta + a)$ bezeichneten Operation identisch nehmen, so gilt:

$$\frac{dy}{dx} + ay = X \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx} + a\right) y = X \quad \text{oder} \quad (\theta + a)\, y = X.$$

Die zugehörige inverse Operation werden wir alsdann so bezeichnen:

(1) $$y = \left(\frac{d}{dx} + a\right)^{-1} X \quad \text{oder} \quad (\theta + a)^{-1} X$$

oder so:

(2) $$\frac{X}{\frac{d}{dx} + a} \quad \text{oder} \quad \frac{X}{\theta + a}.$$

Benutzen wir die letzte Schreibweise, so ist zunächst $\frac{1}{\theta + a}$ natürlich nur ein Operationssymbol. Gleichwohl gehorcht:

(3) $$y = \frac{X}{\theta + a}$$

den elementaren Regeln der Multiplikation, insofern die Gleichung (3) dasselbe besagt wie

(4) $$(\theta + a) y = X,$$

während doch Gleichung (4) aus (3) hervorgeht, indem man beide Seiten in (3) mit $(\theta + a)$ multipliziert.

Wir betrachten zweitens die Gleichung:

(5) $$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + b)\frac{dy}{dx} + aby = X,$$

die wir auch so schreiben können:

(6) $$[\theta^2 + (a + b)\theta + ab]y = X$$
oder so:
(7) $$(\theta + a)(\theta + b)y = X.$$

Hier führt die direkte Operation $\theta + a$, ausgeübt auf $(\theta + b)y$, zu X. Wir haben also nach der bisherigen Entwicklung:

(8) $$(\theta + b)y = \frac{X}{\theta + a}$$

und erhalten durch Wiederholung der gleichen Operationsweise:

(9) $$y = \frac{1}{(\theta + b)}\left(\frac{X}{\theta + a}\right).$$

Mit Benutzung unserer obigen Schreibweise inverser Operationen können wir die Gleichung (6) auch so umgestalten:

(10) $$y = \frac{X}{\theta^2 + (a + b)\theta + ab}.$$

Es ist also auch hier wieder zulässig, $\theta + a$ und $\theta + b$ in (9) so zu behandeln, als sei θ eine Zahlgröfse.

165. Wie wir gesehen haben, läfst sich die inverse Operation:

(1) $$[\theta^2 + (a + b)\theta + ab]^{-1}$$

in zwei Schritten ausführen, indem wir nämlich erstens $(\theta + a)^{-1}$ und sodann $(\theta + b)^{-1}$ ausüben.

Hier schliefst sich eine sehr interessante Frage an. Wäre [θ wirklich eine Zahlgröfse, so würde die Gleichung:

(2) $$\frac{1}{\theta^2 + (a + b)\theta + ab} = \frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{\theta + a} - \frac{1}{\theta + b}\right)$$

gelten. Es ist wichtig zu wissen, ob auch die Operation:

(3) $$\frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{\theta + a} - \frac{1}{\theta + b}\right)$$

die inverse Operation von:

(4) $$\theta^2 + (a + b)\theta + ab$$

ist. Der Weg, hierüber zu entscheiden, ist der folgende: Die Frage ist zu bejahen, falls die direkte Operation (4) die Wirkung der Operation (3) genau aufhebt. Man wende also die Operation (3) an und unterwerfe dann das Resultat der Operation (4). Wenn wir aber die letztere Operation auf $\frac{1}{\theta + a}X$ anwenden, so entspringt offenbar

$(\theta + b)X$ oder $\frac{dX}{dx} + bX$. Ebenso erhalten wir durch Anwendung der Operation (4) auf $\frac{1}{\theta + b}X$ offenbar $(\theta + a)X$ oder $\frac{dX}{dx} + aX$. In der That aber ist:

$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{dX}{dx} + bX - \left(\frac{dX}{dx} + aX\right)\right] = X.$$

Somit ist die Operation (3) thatsächlich invers zu (4); und wir dürfen demnach eine inverse Operation wie die in (2) linker Hand nach Art der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen in Teiloperationen wie in (2) rechter Hand zerlegen. Die lineare Differentialgleichung (1) des Artikel 159 können wir hier als Beispiel heranziehen. Nennen wir die Wurzeln der zugehörigen Hilfsgleichung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, so würden wir die Operation:

$$\theta^n + A\theta^{n-1} + B\theta^{n-2} + \cdots + G\theta + H,$$

welche auf der linken Seite der Gleichung steht, in die Faktoren: $(\theta - \alpha_1)(\theta - \alpha_2)\cdots$ zerlegen können.

Übrigens wolle man noch beachten, daſs, wenn man aus $\frac{dy}{dx} = X$ oder $\theta y = X$ die Gleichung $y = \frac{X}{\theta}$ oder $y = \theta^{-1}X$ folgert, die inverse Operation einfach vorschreibt, daſs X integriert werden soll. Entsprechend schreibt θ^{-2} eine zweimalige Integration vor u. s. w.*).

*) Angenommen, wir begegneten im Verlaufe unserer Entwickelungen gelegentlich auch einmal den Symbolen $\theta^{\frac{1}{2}}$ oder $\theta^{-\frac{1}{2}}$ oder $\theta^{\frac{3}{2}}, \ldots$; was sollen wir alsdann unter diesen verstehen? Wir geben die Betrachtung dieser Symbole hier nur beiläufig. Die Deutung, welche wir denselben geben wollen, darf natürlich in keiner Weise irgend einer schon gewonnenen Regel widersprechen. So z. B. wird $\theta^{\frac{3}{2}}$ dasselbe sein müssen wie $\theta\theta^{\frac{1}{2}}$ und $\theta^{-\frac{1}{2}}$ dasselbe wie $\theta^{-1}\theta^{\frac{1}{2}}$.

Wir haben uns zu erinnern, daſs das Symbol θ^n mit ganzzahligem positiven oder negativen Exponenten n Differentiationen bez. $(-n)$ Integrationen bedeutet. Wir bestimmen nun einfach, daſs die bei ganzzahligen n für die einzelnen Funktionen gültigen Regeln auch für gebrochene n bestehen bleiben sollen, was wir sogleich an einigen Beispielen näher ausführen wollen.

Viele von den Funktionen, mit denen wir zu arbeiten haben, sind in der Gestalt Ae^{ax} oder $B\sin bx$ oder aber durch Summen solcher Funktionen darstellbar. Man beachte nun, daſs:

$$\theta^n(Ae^{ax}) = Aa^n e^{ax}$$

gilt, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Nach dem eben angegebenen Prinzipe werden wir also haben:

$$\theta^{\frac{1}{2}}(Ae^{ax}) = Aa^{\frac{1}{2}}e^{ax}$$

oder:

(1) $$\theta^{\frac{1}{3}}(Ae^{ax}) = Aa^{\frac{1}{3}}e^{ax}.$$

Andrerseits hat man:

166. Elektrische Probleme. Für einen **Stromkreis** mit dem Widerstande R und der Selbstinduktion L gilt das Gesetz:

$$V = RC + L\frac{dC}{dt}.$$

Wir bezeichnen die Operation $\frac{d}{dt}$ mit dem Buchstaben θ; dann ist:

$$V = (R + L\theta)\,C; \quad C = \frac{V}{R + L\theta}.$$

In der That behandeln wir bei unseren sämtlichen algebraischen Berechnungen den Ausdruk $\boldsymbol{R + L\theta}$, als wenn er einen Widerstand bezeichnete.

$$\theta(B \sin bx) = Bb \cos bx = Bb \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\theta^2(B \sin bx) = -Bb^2 \sin bx = Bb^2 \sin(bx + \pi),$$

(2) $$\theta^n(B \sin bx) = Bb^n \sin\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Die letzte Formel gilt für jede ganze positive oder negative Zahl. Nehmen wir nun an, dafs dieselbe auch für gebrochene positive oder negative n gilt, so hat man z. B.:

(3) $$\theta^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B} \sin \boldsymbol{bx}) = \boldsymbol{Bb}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\boldsymbol{bx} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Es giebt noch gewisse andere wertvolle Funktionen, bei denen wir imstande sind, die Bedeutung der Operation $\theta^{\frac{1}{2}}$ anzugeben. So werden wir z. B. im Verlaufe unserer Untersuchungen von einer Funktion Gebrauch zu machen haben, welche für alle negativen Werte von x verschwindet und für alle positiven x konstant gleich a ist. Nennen wir diese Funktion $f(x)$, so wird sich zeigen, dafs:

(4) $$\theta^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\pi}}\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}$$

ist, worauf dann die Bedeutung von $\theta^{\frac{3}{2}}$ oder $\theta^{\frac{5}{2}}$ oder $\theta^{-\frac{1}{2}}$ oder $\theta^{-\frac{3}{2}}$, ... leicht durch Differentiation resp. Integration zu finden ist. Die Regel (4) wird wenigstens für positive x durch folgende Überlegung verständlich gemacht. Zunächst gilt für ganze positive Zahlen n und $m > n$:

$$\theta^n(x^m) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Hier ersetzen wir, um gebrochene n zugänglich zu machen, $m!$ und $(m-n)!$ durch ihre Ausdrücke in der später (cf. Art. 272) zu betrachtenden Γ-Funktion:

$$\theta^n(x^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}.$$

Setzt man jetzt $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$ ein, und nimmt das Fortbestehen der letzten Gleichung an, so sind die Funktionswerte

$$\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

zu benutzen, womit sich die Gleichung (4) bestätigt.

Kondensator von der Kapazität K Farad. Die Spannung zwischen den beiden Belegungen betrage V Volt. C sei der Strom in Ampère, welcher in den Kondensator hineinfliefst, d. h. der Betrag, um welchen die Ladung Q des Kondensators (in Coulomb) pro Sekunde zunimmt. Mit anderen Worten: Es ist

$$C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(KV)$$

oder, da wir K gewöhnlich als konstant annehmen:

$$C = K\frac{dV}{dt}.$$

Die Leitungsfähigkeit des Kondensators ist $K\theta$; daher ist:

$$C = K\theta V = \frac{V}{\frac{1}{K\theta}}.$$

Der Strom, welcher *in* den Kondensator *hineinfliefst,* ist demnach so grofs, als wenn der Kondensator einen Widerstand $\frac{1}{K\theta}$ hätte.

Fig. 84.

Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität (Figur 84). Alle Aufgaben werden so behandelt, als wenn wir einen gesamten Widerstand hätten von der Gröfse:

(1) $$R + L\theta + \frac{1}{K\theta}.$$

167. In irgend einem **Leitungsnetz** können wir stets genau angeben, wie grofs der Gesamtwiderstand (für Gleichstrom) zwischen einem Punkte A und einem anderen Punkte B ist, wenn wir die sämtlichen Widerstände r_1, r_2, r_3 u. s. w. der einzelnen Zweige kennen.

Nun möge jeder dieser Zweige eine Selbstinduktion l_1, l_2, l_3 u. s. w. und eine Kapazität K_1, K_2, K_3 u. s. w. besitzen; dann brauchen wir, um den Widerstand für Wechselstrom zwischen zwei Punkten festzustellen, in den betreffenden mathematischen Ausdruck für r_1, r_2 u. s. w. nur jedesmal $r_1 + l_1\theta + \frac{1}{K_1\theta}$ u. s. w. einzusetzen.

Dieses Resultat ist folgendermafsen zu verstehen: Wenn wir aus unserer Grundoperation θ in der bisherigen Weise eine beliebige noch so komplizierte Operation herstellen, so wird sich das Symbol

dieser letzteren doch immer als *ein in θ rationaler Ausdruck* darstellen, der sich auf die folgende Normalform bringen läſst:

(1) $$\frac{a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + e\theta^4 + f\theta^5 + \cdots}{a' + b'\theta + c'\theta^2 + d'\theta^3 + e'\theta^4 + f'\theta^5 + \cdots}.$$

Diese Operation soll nun auf eine Spannung ausgeübt werden, die als Funktion der Zeit gegeben ist.

Für einige Funktionen der Zeit, welche wir bereits betrachtet haben, kennen wir schon die Antwort, die wir bei Ausübung von (1) erhalten werden. So z. B. wissen wir, daſs die Anwendung der Operation $(a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3 + e\theta^4 + f\theta^5)$ auf die Funktion $e^{\alpha t}$ das Resultat ergiebt:

(2) $$(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + f\alpha^5)\, e^{\alpha t}.$$

Daraufhin läſst sich also die komplizierte Operation (1) bei $e^{\alpha t}$ durch bloſse Multiplikation mit A und Division mit A' ableiten, wobei A die Zahl $(a + b\alpha + c\alpha^2 + \cdots)$ ist und A' die Zahl $(a' + b'\alpha + c'\alpha^2 + \cdots)$ bedeutet.

Wenden wir uns zweitens zur Funktion $m \sin(nt + \varepsilon)$, so wissen wir, daſs

$$\begin{array}{lll} \theta^2 & \text{den Wert} & -mn^2 \sin(nt+\varepsilon), \\ \theta^4 & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} & +mn^4 \sin(nt+\varepsilon) \end{array}$$

ergiebt u. s. w., während

$$\begin{array}{lll} \theta & \text{den Wert} & mn \cos(nt+\varepsilon), \\ \theta^3 & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} & -mn^3 \cos(nt+\varepsilon), \\ \theta^5 & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} & +mn^5 \cos(nt+\varepsilon) \end{array}$$

hat.

Demnach läſst sich die fragliche komplizierte Operation (1) ersetzen durch $\frac{p + q\theta}{\alpha + \beta\theta}$, worin die vier Konstanten folgende Werte haben:

$$p = a - cn^2 + en^4 - \cdots, \qquad q = b - dn^2 + fn^4 - \cdots,$$
$$\alpha = a' - c'n^2 + e'n^4 - \cdots, \quad \beta = b' - d'n^2 + f'n^4 - \cdots.$$

Wir sahen schon in Art. 118, daſs die Anwendung der Operation $p + q\theta$ auf die Funktion $m \sin(nt + \varepsilon)$ die Amplitude der Schwingung im Verhältnis von $\sqrt{p^2 + q^2n^2} : 1$ vergröſsert und eine Voreilung der Phase um den Winkel $\operatorname{arc\,tang} \frac{qn}{p}$ erzeugt.

Der Leser sollte versuchen, dies nochmals selbständig nachzuweisen, obwohl er es auf anderem Wege bereits gefunden hat; d. h. er möge zeigen, daſs die Gleichung gilt:

$$(p + q\theta) \sin nt = \sqrt{p^2 + q^2n^2} \cdot \sin\left(nt + \operatorname{arc\,tang} \frac{qn}{p}\right).$$



In ähnlicher Weise dividiert die umgekehrte Operation $\frac{1}{\alpha+\beta\theta}$ die Amplitude durch $\sqrt{\alpha^2+\beta^2 n^2}$ und bewirkt eine Nacheilung der Phase um den Winkel arc tang $\frac{\beta n}{\alpha}$.

Als Schlufsresultat ergiebt sich mithin:

$$\frac{p+q\theta}{\alpha+\beta\theta}\, m \sin(nt+\varepsilon)$$
$$= m\sqrt{\frac{p^2+q^2n^2}{\alpha^2+\beta^2n^2}} \cdot \sin\left(nt+\varepsilon+\operatorname{arc\,tang}\frac{qn}{p}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta n}{\alpha}\right),$$

eine Regel von aufserordentlicher Wichtigkeit, durch deren Anwendung man sich **viel Mühe ersparen** kann.

168. Bei allen diesen Beispielen hatten wir **nur die erzwungenen Schwingungen** eines Systems im Auge. Wir haben nun bereits bemerkt, dafs bei einer Gleichung von der Gestalt (2) in Art. 152 die Lösung als Summe zweier Funktionen darstellbar ist:

$$y = f(x) + F(x).$$

Darin ist $f(x)$ die Lösung für den Fall, dafs X in der genannten Gleichung gleich 0 ist, also für die natürliche Schwingung des sich selbst überlassenen Systems, während $F(x)$ die erzwungene Bewegung angiebt. Bezeichnen wir nun in der fraglichen Gleichung (2) Art. 152 die Operation:

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} + A\frac{d^3}{dx^3} + B\frac{d^2}{dx^2} + C\frac{d}{dx} + E\right) y$$

symbolisch mit $D(y)$, so folgt aus der Gleichung $D(y) = X$:

$$y = D^{-1}(0) + D^{-1}(X).$$

Darin deutet $D^{-1}(0)$ symbolisch die Funktion $f(x)$ und $D^{-1}(X)$ die Funktion $F(x)$ an.

Als Beispiel wählen wir die Gleichung:

(1) $$\frac{dy}{dx} + ay = X.$$

Um $f(x)$ zu finden, setzen wir $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ oder $\left(\frac{d}{dx}+a\right) y = 0$ oder $(\theta + a)y = 0$.

Aus Art. 97 wissen wir, dafs dann $y = Ae^{-ax}$ ist. Wir sehen also, **dafs $\frac{0}{\theta+a}$ keineswegs Null ist,** sondern das Produkt einer will-



kürlichen Konstanten und der Exponentialfunktion e^{-ax} bedeutet. Die Lösung der vorgelegten Gleichung (1) lautet demnach:

$$y = Ae^{-ax} + \frac{X}{\theta + a}.$$

Wir wollen nun das zweite Glied dieser Lösung genauer betrachten, d. h. nur den erzwungenen Teil der Bewegung. Bei den meisten derartigen in der Praxis vorkommenden Fällen wird nämlich der Exponentialausdruck im ersten Gliede sehr schnell außerordentlich klein.

169. Beispielsweise ändere sich in einem elektrischen Stromkreise, für welchen $V = (R + L\theta)C$ ist, die Spannung sinusartig:

$$\boldsymbol{V = V_0 \sin qt.}$$

Dann wird, wie wir bereits gefunden haben, der erzwungene Wert der Stromstärke:

$$C = \frac{V_0 \sin qt}{R + L\theta},$$

und nach unserer neuen Regel oder auch nach Art. 118 wird daraus:

$$(1) \qquad C = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \sin\left(qt - \text{arc tang}\,\frac{Lq}{R}\right).$$

Nun haben wir aber außer diesem Ausdruck noch ein zweites Glied für die Stromstärke, nämlich:

$$\frac{0}{R + L\theta} \quad \text{oder:} \quad \frac{0}{\theta + \frac{R}{L}},$$

und gemäß unserer obigen Regel (Art. 168) ergiebt sich daraus:

$$(2) \qquad A_1 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Wir können diesen Ausdruck auch wie in Art. 97 finden, nämlich auf Grund von:

$$RC + L\frac{dC}{dt} = 0, \quad \frac{dC}{dt} = -\frac{R}{L}C.$$

Diese Differentialgleichung führt auf die Exponentialfunktion und giebt uns ebenfalls das Resultat (2).

Die Summe von (2) und (1) bildet die vollständige Lösung. Kennen wir noch den Wert von C für $t = 0$, so können wir auch den Wert der Konstanten A_1 bestimmen. Das Glied (2) verschwindet offenbar mit wachsender Zeit sehr schnell.

Als zweites Beispiel wollen wir annehmen, **dafs V konstant sei: $V = V_0$**. Dann ist:

$$C = \frac{V_0}{R + L\theta}.$$

Es liegt auf der Hand, dafs $C = \frac{V_0}{R}$ die erzwungene Stromstärke ist; denn wenn wir auf $C = \frac{V_0}{R}$ die Operation $R + L\theta$ anwenden, so erhalten wir V_0. Das verschwindende Glied der Stromstärke ist bei denselben Werten von R und L stets dasselbe, nämlich $A_1 e^{-\frac{R}{L}t}$, welchem Gesetze auch V unterliegt.

Die vollständige Lösung lautet also jetzt:

(3) $$C = A_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}.$$

Beispielsweise sei $C = 0$ für $t = 0$; dann wird:

$$0 = A_1 + \frac{V_0}{R}; \; A_1 = -\frac{V_0}{R},$$

sodafs (3) übergeht in:

(4) $$C = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Der Leser möge für ein weiteres Beispiel folgende Zahlenwerte wählen:

$$V_0 = 100 \text{ Volt}, \; R = 1 \text{ Ohm}, \; L = 0{,}1 \text{ Henry}$$

und möge zeigen, wie C anwächst. Wir haben das hierfür geltende Gesetz schon früher gefunden.

170. Beispiel. **Ein Kondensator von der Kapazität K sei mit einem induktionsfreien Widerstand r parallel geschaltet.** V sei die Spannung zwischen den beiden Verzweigungspunkten v und o (Figur 85). Die zwei Ströme sind dann $c = \frac{V}{r}$ und $C = K \cdot \theta V$, und ihre Summe ist:

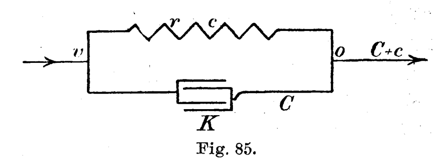


Fig. 85.

$$C + c = V\left(\frac{1}{r} + K\theta\right) = V\left(\frac{1 + rK\theta}{r}\right).$$

Der Kondensator und der induktionsfreie Widerstand wirken also bei Parallelschaltung wie ein einzelner Widerstand von der Gröfse $\frac{r}{1 + rK\theta}$.

Beispielsweise sei: $V = V_0 \sin nt$. Dann ist:

$$C + c = \frac{(1 + rK\theta)\, V_0 \sin nt}{r},$$

und mit Rücksicht auf Art. 167:

$$C + c = \frac{V_0}{r} \sqrt{1 + r^2 K^2 n^2} \cdot \sin(nt + \operatorname{arc\,tang} rKn),$$

$$c = \frac{V_0}{r} \sin nt, \quad C = V_0 Kn \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\right).$$

171. Auf einen **Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität** (Figur 86) wirke eine **veränderliche Spannung** $V = V_0 \sin nt$, gemessen zwischen den Punkten v und o. Wie grofs ist der entstehende Strom?

Fig. 86.

Antwort:

$$C = \frac{V}{R + L\theta + \frac{1}{K\theta}}$$

oder unter Anwendung der Regel aus Art. 167:

$$C = \frac{K\theta V}{1 + RK\theta + LK\theta^2} = \frac{K\theta}{(1 - LKn^2) + RK\theta} V,$$

$$C = \frac{KnV_0}{\sqrt{(1 - LKn^2)^2 + R^2K^2n^2}} \sin\left(nt + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{RKn}{1 - LKn^2}\right).$$

Der eifrige Leser wird auch noch Zahlenwerte einsetzen und durch mehrere numerische Rechnungen die Bedeutung dieses Resultates noch deutlicher erkennen. Wenn er auch nur das folgende eine Beispiel durchrechnet, so wird er doch allein daran schon sehen, dafs er jetzt ein Mittel hat, um in wenigen Zeilen ein Problem zu lösen, zu dem manche Autoren viele Seiten brauchen; sie verwenden dabei die kompliziertesten mathematischen Ausdrücke, welche zum wenigsten sehr leicht verwirren, wenn es nicht gar unmöglich ist, ihre physikalische Bedeutung überhaupt zu durchblicken. Hier ist dagegen die physikalische Bedeutung einer jeden Gleichung leicht zu verstehen.

Numerisches Übungsbeispiel*): Man wähle $V_0 = 1414$ Volt, $K = 1$ Mikrofarad oder 10^{-6} C.G.S., $R = 100$ Ohm und $n = 1000$.

*) Man erinnere sich daran, dafs der *effektive* Wert von $a \cdot \sin(nt + \varepsilon)$ gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

Jetzt setzen wir für die Selbstinduktion L verschiedene Werte ein, und finden dann für die Stromstärke und die Phasenverschiebung die Resultate, welche in der folgenden Tabelle und in den Kurven der Figur 87 angegeben sind.

L (in Henries)	Effektive Stromstärke (in Ampère)	Phasenverschiebung (in Graden) [Voreilung des Stromes]	L (in Henries)	Effektive Stromstärke (in Ampère)	Phasenverschiebung (in Graden) [Voreilung des Stromes]
0	0,995	84,28	1,05	8,944	— 26,57
0,1	1,110	83,67	1,1	7,071	— 45,00
0,2	1,240	82,87	1,2	4,472	— 63,43
0,3	1,414	81,87	1,3	3,162	— 71,57
0,4	1,644	80,53	1,4	2,425	— 75,97
0,5	1,961	78,67	1,5	1,961	— 78,67
0,6	2,425	75,97	1,6	1,644	— 80,53
0,7	3,162	71,57	1,7	1,414	— 81,87
0,8	4,472	63,43	1,8	1,240	— 82,87
0,9	7,071	45,00	1,9	1,110	— 83,67
0,95	8,944	26,57	2,0	0,995	— 84,28
0,975	9,701	14,03	2,5	0,665	— 86,18
1,00	10,000	0	3,0	0,499	— 87,13
1,025	9,701	— 14,03			

Die Kurve $ABCD$ zeigt, wie der Strom von A, wo $L = 0$ ist mit wachsendem L zuerst langsam, dann immer schneller ansteigt, wie er bei $L = 1$ Henry ein Maximum erreicht und dann genau in derselben Weise, wie er vorhin anstieg, wieder abfällt.

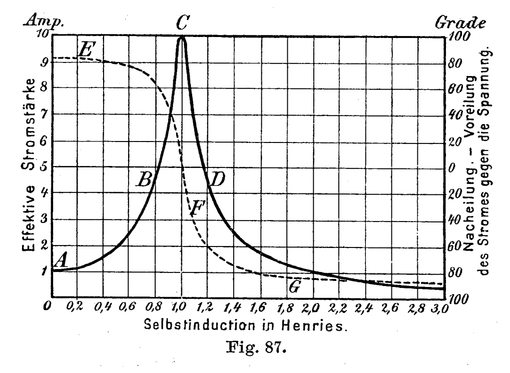


Fig. 87.

Die Kurve EFG zeigt die Gröfse der Voreilung des Stromes gegen die Spannung, welche sich bei $L = 1$ fast plötzlich in eine Nacheilung verwandelt. Das Maximum des Stromes bei $LKn^2 = 1$ ist ebenso grofs, als wenn wir keinen Kondensator und keine Selbstinduktion

hätten, sondern nur einen induktionsfreien Widerstand R. Es ist interessant zu beachten, dafs in den Beispielen des Art. 160 die gleiche Beziehung: $LKn^2 = 1$ zwischen L, K und n (unter Vernachlässigung des kleinen Widerstandsausdruckes) besteht, wenn der Kondensator einen Wechselstrom durch den Stromkreis R, L sendet, der seine beiden Belegungen mit einander verbindet.

Mit Zahlen zu rechnen, wie wir in diesem Beispiel gethan haben, ist viel billiger, übersichtlicher und fruchtbarer, als mit Wechselstrommaschinen, Spulen und Kondensatoren zu experimentieren.

172. In einem **Transformator** geht selbst dann, wenn sein sekundärer Stromkreis offen ist, durch Hysteresis und Wirbelströme Arbeit verloren; und zwar ist das Resultat im wesentlichen dasselbe, als wenn kein derartiger innerer Verlust, sondern statt dessen eine kleine äufsere Belastung vorhanden wäre. Indes wollen wir hier auch von dieser Belastung einmal ganz absehen und einen idealen Transformator voraussetzen. Es soll nun der **Einflufs eines Kondensators im Nebenschlufs** betrachtet werden, **der den „wattlosen Strom" unterstützt.**

Der primäre Strom eines unbelasteten Transformators besteht aus einer Grundschwingung von derselben Wechselzahl wie die Primärspannung, und aus Obertönen von der dreifachen und fünffachen Periodenzahl, welche auf eine eigenartige Weise durch die Änderung der Permeabilität des Eisens zustande kommen. Mit diesen Obertönen hat der Kondensator nichts zu schaffen. Er kann sie in keiner Weise verdecken; der gemeinsame Strom behält diese Schwingungen unter allen Umständen bei; wir werden sie aber hier nicht weiter erwähnen, sondern uns vorstellen, dafs sie nachher einfach addiert werden. Dies bewahrt uns vor Irrtümern; denn wenn wir nur die Grundschwingung betrachten, so können wir annehmen, dafs die Permeabilität konstant ist, d. h. dafs der primäre Stromkreis des unbelasteten Transformators eine konstante Selbstinduktion hat.

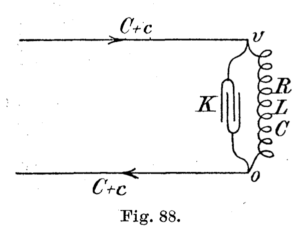


Fig. 88.

Wir wollen nun einen Kondensator von der Kapazität K mit den Enden der Spule verbinden (Figur 88), die einen Widerstand R und eine Selbstinduktion L haben möge. Die Spannung zwischen den beiden Endpunkten sei $V = V_0 \sin nt$; ferner sei C der momentane Wert des Stromes in der Spule und c der des Stromes im Kondensator; dann ist $C + c$ der dem Stromsystem zugeführte Gesamtstrom.

Nun ist aber:

$$C = \frac{V_0 \sin nt}{R + L\theta}$$

und

$$c = \frac{V_0 \sin nt}{\frac{1}{K\theta}} = K n V_0 \cos nt.$$

Also:

$$C + c = \left(\frac{1}{R + L\theta} + K\theta\right) V_0 \sin nt$$

oder nach Anwendung unserer Regel aus Artikel 167:

$$C + c = \frac{1 + RK\theta + LK\theta^2}{R + L\theta} V = \frac{1 - LKn^2 + RK\theta}{R + L\theta} V.$$

Es ist nun ein Leichtes, durch Anwendung des Artikels 167 den vollständigen Ausdruck für $C + c$ hinzuschreiben; aber da wir uns vorläufig um die Voreilung oder Nacheilung nicht kümmern wollen, so bestimmen wir zunächst nur die Amplitude. Dieselbe ist offenbar:

$$V_0 \sqrt{\frac{(1 - LKn^2)^2 + R^2 K^2 n^2}{R^2 + L^2 n^2}}.$$

Den *effektiven* Wert von $C + c$, den ein Ampèremeter als Gröſse des Stromes anzeigen würde, erhält man aus diesem Werte durch Division mit $\sqrt{2}$.

Den kleinsten Wert für $C + c$ erhält man bei

$$K = \frac{L}{R^2 + L^2 n^2}.$$

Es ist also möglich, durch Verwendung eines richtig bemessenen Kondensators den *Leerlaufstrom* in der Zuleitung zum Transformator und damit die *Verluste in der Leitung* zu vermindern.

Man beachte hierbei, daſs, wenn L in Henries ausgedrückt wird und n das 2π-fache der sekundlichen Periodenzahl ist (so daſs in der Praxis der Wert von n etwa um 500 herum liegt)*), K in Farad gefunden wird. Nun kostet ein Kondensator von nur 1 Mikrofarad oder 10^{-6} Farad schon einige hundert Mark. Nur ein ganz unpraktischer Mann kann daher im Ernste den Vorschlag machen, für den eben genannten Zweck einen Kondensator zu verwenden. Er würde Millionen kosten.

---

*) In England ist $f = 80$ ein üblicher Mittelwert; bei deutschen Maschinen pflegt die Periodenzahl annähernd 50 zu sein.

Der äufserste Wert, auf welchen sich in dieser Weise der Strom $C + c$ herabdrücken läfst, verhält sich zu C wie $R : \sqrt{R^2 + L^2 n^2}$.

Der Leser sollte nun auch ein numerisches Beispiel dafür durchrechnen, z. B. nehme er für einen Igeltransformator an: $R = 24$ Ohm, $L = 6{,}23$ Henries, $n = 509$, entsprechend einer sekundlichen Periodenzahl von etwa 81,1. Die effektive Spannung, d. i. $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$, betrage 2400 Volt. Figur 89 zeigt dann den effektiven Strom, welcher sich für die verschiedenen Werte von K ergiebt.

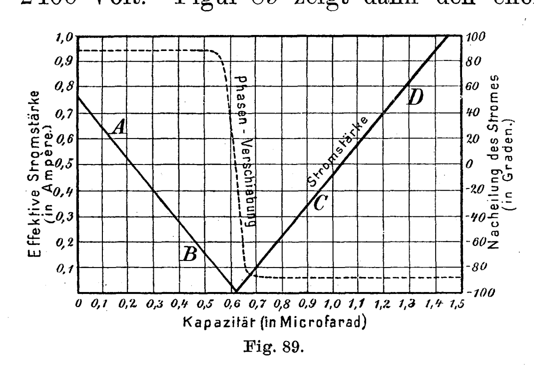


Fig. 89.

Die Stromkurve ist eine Hyperbel, die von einem Geradenpaar kaum zu unterscheiden ist. Der Gesamtstrom wird ein Minimum bei $K = \frac{L}{R^2 + L^2 n^2}$, d. i. in diesem Falle bei $K = 0{,}618$ Mikrofarad; die Wirkung des Kondensators besteht darin, dafs er den Strom im Verhältnis des Ohmschen Widerstandes zur Impedanz verringert. Interessant ist es auch, darauf zu achten, wie die grofse Nacheilung ganz plötzlich in eine grofse Voreilung übergeht.

173. In einem Gleichstromnetze seien die Punkte A und B durch die parallel geschalteten Widerstände r_1, r_2, r_3 mit einander verbunden. Bezeichnet dann V die Spannung zwischen A und B, c_1, c_2, c_3 die drei Einzelströme und C den Gesamtstrom, so ist:

$$c_1 = \frac{V}{r_1}, \quad c_2 = \frac{V}{r_2}, \quad c_3 = \frac{V}{r_3},$$

$$C = V\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

Demnach haben die drei parallelen Leiter zusammen eine Leitungsfähigkeit von der Gröfse:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right),$$

und es ergiebt sich, wenn C bekannt ist:

$$c_1 = \frac{C}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) r_1}.$$

Nun möge jeder Zweig noch eine Selbstinduktion l und einen Kondensator von der Kapazität k enthalten; dann gelten für jeden Augenblick genau die obigen Formeln, wenn wir nur statt des Widerstandes r jedesmal den Ausdruck:

$$r + l\theta + \frac{1}{k\theta}$$

mit dem betreffenden Index einsetzen. Die algebraischen Ausdrücke werden indessen schwerfällig, und deswegen empfehlen wir dem Leser auch hier wieder, die Rechnung an einem numerischen Beispiele zu Ende zu führen.

174. Zwei Stromkreise in Parallelschaltung. Die Stromkreise mögen die Widerstände r_1 und r_2 und die Selbstinduktionen l_1 und l_2 enthalten. Die Aufgabe besteht darin, zu bestimmen, wie sich ein Strom C auf die beiden Zweige verteilt.

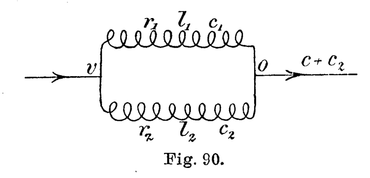


Fig. 90.

Handelte es sich um Gleichstrom, so würde sich für den Strom c_1 (Figur 90) im Zweige r_1 ergeben:

$$c_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} C.$$

Folglich erhalten wir bei Wechselstrom:

$$c_1 = \frac{r_2 + l_2\theta}{r_1 + r_2 + (l_1 + l_2)\theta} C.$$

Ist $C = C_0 \sin nt$, so ergiebt sich gemäfs Artikel 167:

$$c_1 = C_0 \sqrt{\frac{r_2^2 + l_2^2 n^2}{(r_1 + r_2)^2 + (l_1 + l_2)^2 n^2}} \sin\left(nt + \operatorname{arc\,tang}\frac{l_2 n}{r_2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{(l_1 + l_2)n}{r_1 + r_2}\right).$$

Angenommen, es sei nun in diesem letztgenannten Falle **beabsichtigt,** zum Zwecke irgend einer Messung **einen Zweigstrom von C herzustellen, der eine vorgeschriebene Voreilung besitzt,** dann müssen wir die Anordnung so treffen, dafs:

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{l_2 n}{r_2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{(l_1 + l_2)n}{r_1 + r_2}$$

gleich dem verlangten Voreilungswinkel wird, und dann den Strom im Zweige r_1 für unseren Zweck benutzen.

175. Kondensator zur Kompensation des Einflusses der Selbstinduktion. Zwischen den Punkten A und B (Figur 91) herrsche

eine **Spannung** V, die sich **nach irgend einem beliebigen Gesetze ändern** mag. AB sei eine Spule mit dem Widerstande R und der Selbstinduktion L.

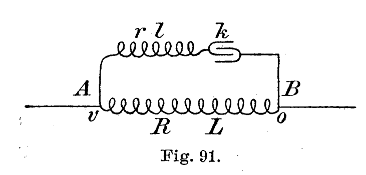


Fig. 91.

Es wird dann im allgemeinen die Stärke des Stromes nicht gleich $\frac{V}{R}$ sein. Durch Parallelschalten eines Nebenschlusses mit einem Kondensator soll nun bewirkt werden, dafs diese einfachste Beziehung: $C = \frac{V}{R}$ aufserhalb der Strecke AB dennoch zutrifft. Wie mufs der Nebenschlufs bemessen sein?

Der Gesamtstrom ist offenbar:

$$C = \frac{V}{R + L\theta} + \frac{V}{r + l\theta + \frac{1}{K\theta}},$$

oder, indem wir alles auf einen gemeinsamen Nenner bringen und die Glieder nach Potenzen von θ ordnen:

$$C = \frac{1 + \theta(rK + RK) + \theta^2(lK + LK)}{R + \theta(RrK + L) + \theta^2(RlK + LrK) + LlK\theta^3} V.$$

Da hier V irgend eine ganz beliebige Funktion der Zeit sein darf, so können wir mit der rechten Seite dieser Gleichung weitere Vereinfachungen, wie in Artikel 167, nicht vornehmen.

Nun wünschen wir, dafs das Resultat der Operation gleich $\frac{1}{R} V$ sein soll. Wir setzen beide Ausdrücke gleich, entfernen die Brüche und sehen dann, dafs:

$$R + \theta(RrK + R^2K) + \theta^2(RlK + RLK)$$

identisch sein mufs mit:

$$R + \theta(RrK + L) + \theta^2(RlK + LrK) + LlK\theta^3.$$

Da nun V irgend eine *beliebige* Funktion der Zeit sein soll, so können die obigen Ausdrücke nur dann gleich sein, wenn $LlK = 0$ ist. Das heifst aber: l mufs gleich 0 sein, der Kondensatorstromkreis darf keine Selbstinduktion enthalten. Ferner ergeben sich die Bedingungen:

$$RrK + R^2K = RrK + L,$$

woraus $K = \frac{L}{R^2}$ folgt, und

$$RlK + RLK = RlK + LrK,$$

woraus $R = r$ folgt.



Der Widerstand im Kondensatorstromkreise mufs also gleich dem des anderen Kreises sein.

Schlufsresultat: Parallel zum Stromzweige $R + L\theta$ ist ein Kondensatorzweig $R + \frac{1}{K\theta}$ zu schalten, wobei $K = \frac{L}{R^2}$ ist.

176. Es sei bei dem vorigen Beispiele: $V = V_0 \sin nt$; dann kann man der auf V auszuübenden Operation die einfachere Gestalt geben:

$$\frac{1 - K(l + L)n^2 + K(r + R)\theta}{R - K(Rl + rL)n^2 + \theta(RrK + L - LlKn^2)}.$$

Wenn nun die Proportion gilt:

$$\frac{R - K(Rl + rL)n^2}{1 - K(l + L)n^2} = \frac{RrK + L - LlKn^2}{K(r + R)},$$

so ist der bei A ein- und bei B austretende Gesamtstrom mit V proportional und hat keine Phasenverschiebung gegen die Spannung. Ist dabei auch noch $R = r$, so wird der Strom $= \frac{V}{R}$. Allerdings mufs diese Justierung der Gröfsen R, r, L, l, K zu einander für jede Periodenzahl besonders erfolgen; bei einer Änderung von n stimmt sie nicht mehr.

177. Es soll erklärt werden, dafs **die effektive Spannung zwischen den beiden Hauptkabeln an einer Stelle D** (Figur 92) **unter Umständen kleiner sein kann als an einer Stelle C, welche vom Generator weiter entfernt liegt.** Diese Erscheinung rührt gewöhnlich von der Eigenkapazität der Kabel her, welche sich auf ihre ganze Länge verteilt (ein häufig vorkommender Wert ist 0,2 Mikrofarad pro km). Wir wollen indessen den Einflufs der *verteilten* Kapazität später betrachten; für die jetzige Untersuchung denken wir sie uns *konzentriert* und nehmen einen Kondensator von der Kapazität K an, der bei B zwischen die Hauptkabel geschaltet ist. Der induktionsfreie Widerstand, welcher etwa aus Glühlampen bestehen mag und ebenfalls bei B an die Hauptkabel angeschlossen ist, sei r. Der Widerstand und die Selbstinduktion der Kabel zwischen D und B sei R und L. Ferner sei v die Spannung bei B und C der Strom in der Leitung DB. Der Strom, welcher in den Kondensator hineinfliefst, ist dann:

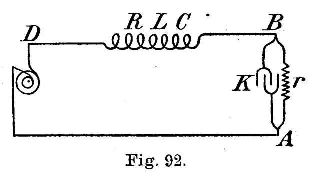


Fig. 92.

$$\frac{v}{\frac{1}{K\theta}} = K\theta v.$$

Der durch r fliefsende Strom ist $\frac{v}{r}$, sodafs also der Gesamtstrom

(1) $$C = \left(K\theta + \frac{1}{r}\right) v$$

wird.

Der Spannungsverlust von D nach B beträgt (in Volt):

$$(R + L\theta) C$$

oder:

$$(R + L\theta)\left(K\theta + \frac{1}{r}\right) v,$$

oder:

$$\left\{\frac{R}{r} + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta + LK\theta^2\right\} v.$$

Ist nun $v = v_0 \sin nt$, so wird dieser Spannungsabfall:

$$\left\{\left(\frac{R}{r} - LKn^2\right) + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta\right\} v.$$

Die Spannung bei D ist um diesen Spannungsverlust gröfser als v, also gleich:

$$\left\{\left(1 + \frac{R}{r} - LKn^2\right) + \left(RK + \frac{L}{r}\right)\theta\right\} v.$$

Unter Anwendung von Artikel 167 ergiebt sich daraus für das Verhältnis der Spannungen bei D und B:

$$\frac{\text{Quadrat der effektiven Spannung bei } D}{\text{Quadrat der effektiven Spannung bei } B} = \left(1 + \frac{R}{r} - LKn^2\right)^2 + \left(RK + \frac{L}{r}\right)^2 n^2.$$

Nun giebt es aber Werte für die Konstanten, bei denen dieser Quotient kleiner als 1 wird.

Um ein numerisches Beispiel durchzuführen, nehmen wir:

$$r = 10, \quad R = 0{,}1, \quad K = 10^{-6}, \quad n = 1000$$

und setzen für L nach einander die Werte 0, 0,005, 0,01, 0,02, 0,03 etc. ein.

Der Leser wird ohne Schwierigkeiten diese Aufgaben auch dann zu behandeln imstande sein, wenn $r + l\theta$ an die Stelle des Buchstabens r in (1) treten mufs, d. h. wenn bei B nicht nur Lampen, sondern auch Spulen mit Selbstinduktion angeschlossen sind.

178. Allgemeiner Fall der Wirkung von zwei Spulen auf einander. Gegeben seien zwei Spulen, Figur 93; bei der einen liege eine elektromotorische Kraft E, ein Widerstand R, eine Selbstinduk-

tion L und eine Kapazität K vor; bei der anderen seien die entsprechenden Werte: e, r, l, k; der gegenseitige Induktionskoeffizient sei m.

Wir benutzen nun die Abkürzungen:
R' für $R + L\theta + \frac{1}{K\theta}$ und r' für $r + l\theta + \frac{1}{k\theta}$.

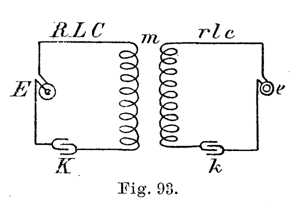


Fig. 93.

Dann gelten die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} E = R'C + m\theta c, \\ e = m\theta C + r'c. \end{cases}$$

(Man achte darauf, wie wichtig es ist, sich bei der Berechnung des Resultates in Bezug auf die Vorzeichen von C, c, E und e nicht zu irren.)

Aus den Gleichungen (1) folgt nun:

$$(2) \qquad c = \frac{R'e - m\theta E}{R'r' - m^2\theta^2},$$

$$(3) \qquad C = \frac{r'E - m\theta e}{R'r' - m^2\theta^2}.$$

Darin können wir für R', r', E, e ihre Werte einsetzen und so die Stromstärken finden.

Man beachte, dafs E auch eine Spannung sein kann, welche nur an den Enden *eines Teiles* des betreffenden Kreises wirkt, und dafs dann R nur den Widerstand dieses Teiles bedeutet.

Die folgenden Übungen sind Einzelbeispiele dieses allgemeinen Falles, der aber mit denselben keineswegs erschöpft ist.

179. Zwei Stromkreise (Figur 94) **mit Selbstinduktion seien parallel geschaltet; ihre gegenseitige Induktion sei m.**

1. Zwischen den beiden Verzweigungspunkten herrsche eine Spannungsdifferenz $v = v_0 \sin nt$; dann geht Gleichung (2) der letzten Aufgabe über in:

$$c = \frac{R' - m\theta}{R'r' - m^2\theta^2} v.$$

Fig. 94.

Setzen wir nun für R' seinen Wert $R + L\theta$ und für r' seinen Wert $r + l\theta$ ein, so ergiebt sich:

$$c = \frac{R + (L - m)\theta}{\{Rr - (Ll - m^2)n^2\} + (Lr + lR)\theta} v.$$

2. Wie verteilt sich ein Strom $A \cdot \sin nt$ auf zwei derartige Stromkreise?

Wir wissen, dafs $\frac{c}{C} = \frac{R' - m\theta}{r' - m\theta}$ ist, und können daraus sofort $\frac{c}{C + c}$ und $\frac{C}{C + c}$ finden. Die Stromstärke c ergiebt sich dann durch Anwendung der Operation:

$$\frac{R + (L - m)\theta}{(R + r) + (L + l - 2m)\theta}$$

auf $A \sin nt$.

Wir halten es kaum für nötig, dieses Beispiel noch ausführlicher zu behandeln; denn die weitere Rechnung besteht lediglich in der Anwendung der in Art. 167 gegebenen Regel.

180. Wir wollen annehmen, dafs in dem obigen Beispiel **jeder der beiden Stromkreise auch noch eine gegenseitige Induktion mit dem Gesamtstrom besitzt.** Der besseren Übersichtlichkeit wegen führen wir neue Bezeichnungen ein, welche in Figur 95 angeben sind.

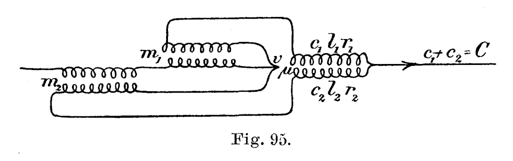


Fig. 95.

Es sei v die Spannungsdifferenz zwischen den Enden der beiden parallel geschalteten Zweige. Ferner wollen wir zur Abkürzung die Buchstaben r', μ' und m' für $r + l\theta$, $\mu\theta$ und $m\theta$ setzen. Dann ist:

$$v = r_1' c_1 + \mu' c_2 + m_1' (c_1 + c_2),$$

und daraus ergeben sich für die beiden Zweige die Gleichungen:

$$v = (r_1' + m_1')\, c_1 + (\mu' + m_1')\, c_2,$$
$$v = (\mu' + m_2')\, c_1 + (r_2' + m_2')\, c_2.$$

Durch Kombination erhalten wir dann:

(1) $$c_1 = \frac{(r_2' + m_2') - (\mu' + m_1')}{(r_1' + m_1')(r_2' + m_2') - (\mu' + m_1')(\mu' + m_2')}\, v$$

und einen ähnlichen Ausdruck für c_2.

Die Verteilung des Gesamtstromes C auf die beiden Zweige läfst sich also folgendermafsen darstellen:

(2) $$c_1 = \frac{(r_2' + m_2') - (\mu' + m_1')}{r_1' + r_2' - 2\mu'}\, C.$$

Wenn wir diesen Quotienten vollständig ausschreiben, so können wir an denselben recht interessante Aufgaben knüpfen; die Durchführung derselben wolle man etwa dadurch vereinfachen, dafs man für einige der Gröfsen spezielle Zahlenwerte einsetzt.

Wollen wir in den einzelnen Zweigen auch noch Kapazitäten annehmen, so brauchen wir nur anstatt eines jeden r' zu schreiben $r + l\theta + \frac{1}{k\theta}$ mit dem entsprechenden Index.

Im übrigen ist $\mu\theta$ für μ' und $m\theta$ für m' einzusetzen. Für Stromkreise ohne Kondensatoren ergiebt z. B. die Gleichung (2):

$$c_1 = \frac{r_2 + \theta(l_2 + m_2 - \mu - m_1)}{r_1 + r_2 + \theta(l_1 + l_2 - 2\mu)} C.$$

181. Rotierendes Feld. Ein Strom fliefse durch zwei hinter einander geschaltete Spulen, von denen die eine auf einen nichtleitenden Kern gewickelt ist, während die andere einen leitenden Kern enthält. Die Spulen kreuzen einander rechtwinkelig und sollen keine gegenseitige Induktion haben; gesucht wird der Charakter der beiden rechtwinkelig zu einander stehenden Felder in der Mitte der beiden Kerne.

Es seien n_1 und n_2 die Windungszahlen der beiden Spulen. Den leitenden Kern können wir uns auch durch eine dritte in sich selbst geschlossene Spule mit einem Widerstand r_3, einer Windungszahl n_3 und einem Strome c ersetzt denken. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs alle drei Hauptwindungsradien gleich grofs sind, und dafs die Spulen n_2 und n_3 sorgfältig durcheinander gewickelt wurden. Das eine Feld, F_1, ist dann proportional mit $n_1 C$, den Ampèrewindungen der ersten Spule; wir wollen es geradezu mit $n_1 C$ bezeichnen; das andere Feld, F_2, ist entsprechend gleich $n_2 C + n_3 c$ zu setzen. Wir nehmen nun an, dafs die gesamte Kraftlinienzahl I für jede der beiden Spulen proportional der Feldintensität in ihrem Centrum ist, sagen wir b-mal so grofs. Dann erhalten wir für die dritte Spule die Gleichung:

$$0 = r_3 c + n_3 \theta I = r_3 c + b n_3 \theta (n_2 C + n_3 c),$$

sodafs also:

$$-c = \frac{b n_3 n_2 \theta C}{r_3 + b n_3^2 \theta},$$

und damit:

$$F_2 = n_2 C - \frac{b n_3^2 n_2 \theta C}{r_3 + b n_3^2 \theta} = \frac{n_2 r_3 C}{r_3 + b n_3^2 \theta}$$

wird.

Ist nun $C = C_0 \sin qt$, so gilt:

$$F_1 = n_1 C_0 \sin qt,$$

$$F_2 = \frac{n_2 C_0 \sin qt}{1 + b \frac{n_3^2}{r_3} \theta} = \frac{n_2 C_0}{\sqrt{1 + b^2 \frac{n_3^4}{r_3^2} q^2}} \sin\left(qt - \operatorname{arctang} \frac{b n_3^2}{r_3} q\right).$$

Art. 126 zeigt uns für diesen Fall den Charakter des resultierenden Feldes. Wir versichern dem Leser, daſs er auf diese Weise ein ausgezeichnetes rotierendes Feld erhalten wird.

Es ist leicht einzusehen, daſs bn_3^2 in Wirklichkeit die Selbstinduktion der dritten Spule und $\frac{bn_3^2}{r_3}$ ihre Zeitkonstante ist. Eine Spule von nur einer Windung, d. h. ein leitender Kern, wird eine gröſsere Zeitkonstante haben, als irgend eine in demselben Volumen untergebrachte Spule von mehr als einer Windung (infolge des durch die Isolation verlorenen Raumes). Ferner ist es einleuchtend, daſs wir bei hinreichender Dimensionierung des Kernes für eine gegebene Wechselzahl ein fast gleichförmiges und gleichförmig rotierendes Feld erhalten können, wenn wir

$$\frac{n_2}{b\frac{n_3^2}{r_3}q} = n_1$$

machen.

Dies Beispiel, dem wir leicht noch eine ganze Reihe ähnlicher anfügen könnten, zeigt so recht den Vorteil, den die Anwendung unseres Operationszeichens θ bietet.

182. In Art. 178 bedeute $E = V$ die primäre Spannung eines **Transformators**, dessen primärer Stromkreis einen inneren Widerstand R und eine Selbstinduktion L enthalten mag. Im sekundären Stromkreise sei keine eigene elektromotorische Kraft vorhanden; sein innerer Widerstand sei r_1, seine Selbstinduktion l und sein äuſserer Widerstand ϱ; der letztere sei induktionsfrei und bestehe z. B. aus Glühlampen. Die Spannung an den sekundären Klemmen sei: $v = c\varrho$.

Dann ist in (1), (2) und (3) des Art. 178: V für E, 0 für e, und $R + L\theta$ für R' einzusetzen.

Anstatt r' schreiben wir $r + l\theta$, was eigentlich gleich $r_1 + \varrho + l\theta$ ist. Dann ergiebt sich:

(1) $$c = \frac{-m\theta V}{Rr + (Rl + rL)\theta + (Ll - m^2)\theta^2},$$

(2) $$C = \frac{(r + l\theta)V}{Rr + (Rl + rL)\theta + (Ll - m^2)\theta^2}.$$

Die zweite der beiden Gleichungen (1) in Art. 178 lautet jetzt:

(2*) $$0 = m\theta C + (r + l\theta)c.$$

Fall I: Es sei: $\boldsymbol{C = C_0 e^{at}}$.

Dann folgt aus (2*):

$$c = \frac{-maC_0e^{at}}{r + la}, \qquad \frac{-c}{C} = \frac{ma}{r + la} = \frac{m}{l}\left(\frac{1}{1 + \frac{r}{la}}\right).$$

Ist nun r klein im Vergleich mit la, so kann man setzen:

$$\frac{-c}{C} = \frac{m}{l}.$$

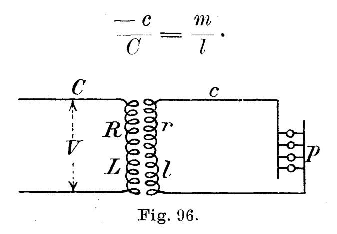


Fig. 96.

Fall II: Es sei $\boldsymbol{C = C_0 \sin qt}$.

Nun folgt aus (2*):

$$-c = \frac{mq}{\sqrt{r^2 + l^2 q^2}} C_0 \sin\left(qt + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{lq}{r}\right)$$

und daraus:

$$\frac{c \text{ effektiv}}{C \text{ effektiv}} = \frac{m}{l} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2 q^2}}}.$$

Dabei darf aber praktisch r gegenüber lq vernachlässigt werden, wenn nicht der Transformator für ganz aufserordentlich kleine sekundäre Belastung konstruiert ist. (Eine Probe mit Zahlen, die einem normalen Transformator entnommen ist, wird diese Behauptung bestätigen.) Dadurch vereinfachen wir aber unsere Resultate in folgender Weise:

$$C = C_0 \sin qt, \quad c = C_0 \frac{m}{l} \sin(qt - \pi),$$

(3)
$$\boldsymbol{\frac{-c}{C} = \frac{m}{l}}.$$

Für die Anwendung dieser Gleichungen mag man sich daran erinnern, dafs der Quotient aus den Momentanwerten von $-c$ und C gleich:

$$\frac{r \sin qt + lq \cos qt}{mq \cos qt}$$

ist, und dafs dieser Ausdruck in gewissen Augenblicken unendlich grofs wird*).

Wir kehren jetzt zu Gleichung (1) zurück. Es sei $Ll = m^2$ (dies ist die Bedingung dafür, dafs **keine magnetische Streuung** stattfindet), und es möge der Wert Rr vernachlässigt werden können. In

*) Hier empfehlen wir dem Leser wieder die Durchführung eines Zahlenbeispiels.

irgend einem praktischen Falle wird man finden, daſs Rr sogar dann vernachlässigt werden kann, wenn r einige 100 Ohm beträgt*).

Dann gilt:

(4) $$-c = \frac{mV}{Rl + rL},$$

sodaſs also $-c$ eine genaue Kopie der Kurve von V als Funktion der Zeit bildet. Genau ebenso verhält sich C.

Sind N und n die Windungszahlen der beiden Spulen, welche denselben Eisenkern einschlieſsen, so wird:

(5) $$m : L : l = Nn : N^2 : n^2$$

und damit:

(6) $$-c = \frac{\frac{n}{N} V}{r + R\frac{n^2}{N^2}}.$$

Das heiſst: der sekundäre Widerstand scheint um den Wert $\left(R\frac{n^2}{N^2}\right)$, den wir den „transformierten primären Widerstand" nennen wollen, vergröſsert zu sein. Unter dieser Annahme ist dann der sekundäre Strom durch die transformierte Spannung $\left(-\frac{n}{N} V\right)$ und den sekundären Widerstand gegeben.

Wären die Volumina der beiden Spulen gleich, und ebenso die durch die Isolation bedingten Volumverluste, so würde $R\frac{n^2}{N^2}$ gleich r_1, dem inneren Widerstand der sekundären Spule, sein. Wir wollen annehmen, daſs dies zutrifft, und erhalten dann:

(7) $$-c = \frac{\frac{n}{N} V}{2r_1 + \varrho},$$

also:

(8) $$\varrho c = v = -\frac{\frac{n}{N} V}{1 + \frac{2r_1}{\varrho}}.$$

Nun ist meistens r_1 klein im Vergleich mit ϱ, sodaſs wir setzen können:

$$-v = \frac{n}{N} V\left(1 - \frac{2r_1}{\varrho}\right).$$

*) Man überzeuge sich hiervon selbst durch Einsetzen von Zahlenwerten.

$\frac{2r_1}{\varrho}$ kann demnach als **der durch die Belastung bedingte Abfall der sekundären Spannung** angesehen werden.

Ferner ist $\frac{v^2}{\varrho} = P$, der an die Lampen abgegebenen Leistung, also $\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{v^2}$. Der prozentuale Spannungsabfall ist also $\frac{2r_1}{v^2} P$, d. h. proportional der Nutzleistung oder der Anzahl der brennenden Lampen.

183. Die obigen Resultate können wir auch noch auf einem anderen Wege erhalten: Es sei I die Induktion, und zwar möge sie in beiden Spulen den gleichen Wert haben. Wir nehmen also wiederum an, dafs keine magnetische Streuung vorhanden ist. Dann gilt:

$$V = RC + N\theta I, \tag{1}$$

$$0 = rc + n\theta I. \tag{2}$$

Wir multiplizieren jede der beiden Gleichungen mit der betreffenden Windungszahl (N resp. n), dividieren durch den Widerstand (R resp. r) und addieren die Gleichungen zu einander; dann erhalten wir:

$$\frac{NV}{R} = A + \left(\frac{N^2}{R} + \frac{n^2}{r}\right) \theta I, \tag{3}$$

worin $A = NC + nc$ ist und die Gesamt-Ampère-Windungszahl genannt wird.

Wenn wir nun die Natur des magnetischen Kreises kennen, d. h. die Permeabilität des Eisens, seinen Querschnitt α in qcm und die mittlere Länge λ der Kraftlinien in cm, so kennen wir damit auch die Beziehung zwischen A und I.

Wir haben diese Verhältnisse eingehend untersucht und gefunden, dafs der Ausdruck A in Gleichung (3) gegenüber dem zweiten Gliede immer ganz unbedeutend ist, wie auch das periodische Gesetz für A lauten mag, so lange nur die Wechselzahl und die Dimensionen des Eisens sich innerhalb der in der Praxis gebräuchlichen Grenzen halten. Wir wollen ihn daher vernachlässigen und finden dann näherungsweise:

$$I = \frac{\theta^{-1} V}{N\left(1 + \frac{n^2 R}{N^2 r}\right)} = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{n^2 R}{N^2 r}\right) \theta^{-1} V. \tag{4}$$

Für ein Beispiel legen wir folgende Daten eines wirklich ausgeführten Transformators von 1,5 Kilowatt Leistung zu Grunde.

Primäre Spule: $R = 27$ Ohm. $N = 460$ Windungen,

Sekundäre Spule: Eigenwiderstand der Wickelung: $r_1 = 0{,}067$ Ohm, $n = 24$ Windungen.

Effektive primäre Spannung: 2000 Volt oder $V = 2828 \sin qt$ Volt, worin $q = 600$ sein mag.

Ferner ist $\alpha = 360$ qcm und $\lambda = 31$ cm. Im unbelasteten Zustande des Transformators ist $r = \infty$; bei voller Belastung wird r nahezu gleich 7 Ohm.

Wir haben vorhin den Wert $R\frac{n^2}{N^2}$ den transformierten Widerstand des primären Kreises genannt. Er ist in diesem Falle gleich $27\left(\frac{24}{460}\right)^2$ oder gleich 0,073 Ohm. Wenn die primäre und die sekundäre Spule gleiches Kupfervolumen und gleichen Volumverlust durch die Isolation hätten, so würde sich dieser Widerstand mehr dem Werte 0,067 nähern, d. h. dem inneren Widerstande der sekundären Spule.

$\frac{n^2 R}{N^2 r}$ oder $\frac{0{,}073}{r}$ ist die prozentuale Verminderung der Kraftlinienzahl bei Belastung gegenüber ihrem Werte bei Leerlauf. Bei Vollbelastung mit $r = 7$ Ohm ist dieser prozentuale Abfall am gröſsten, beträgt aber selbst dann nur $1\,\%$. Wegen seiner Kleinheit durften wir im Ausdruck (4) ein Anwachsen des Nenners durch eine prozentual gleich groſse Verkleinerung des Zählers ersetzen.

Wir betrachten nun den Wert I bei seinem Maximum, d. h. bei Leerlauf; $\frac{1}{\theta}V$ ist das Integral von V, also $-\frac{2828}{600}\cos 600\,t$; daher ist die **Amplitude von I gleich** $\frac{2828}{600 \cdot 460}$.

Um diesen Maximalwert von I, welcher jetzt in Weber ausgedrückt ist, in C.G.S.-Einheiten zu erhalten, multiplizieren wir mit 10^8. Dividieren wir dann noch durch $\alpha = 360$, so finden wir für diesen Transformator 2856 C.G.S.-Einheiten als das Maximum der Induktion pro qcm, welches in jeder Periode zweimal erreicht wird.

Da θI gleich $\dfrac{\frac{1}{N}V}{1 + \frac{n^2}{N^2}\frac{R}{r}}$ ist, so erhalten wir aus Gleichung (2) denselben Wert von $-rc$, den wir schon vorhin in Gleichung (6) des Art. 182 ermittelt hatten.

184. Wir kehren nun zu Gleichung (7) des Art. 182 zurück, wollen aber jetzt annehmen, daſs **magnetische Streuung vorhanden** ist, und daſs wir also für r_1 jetzt $r_1 + l'\theta$ setzen müssen. Bei einiger Überlegung wird man nämlich erkennen, daſs damit die magnetische Streuung berücksichtigt ist. Dann heiſst der Divisor:

$$\varrho + 2r_1 + 2l'\theta$$

anstatt $\varrho + 2r_1$; wir müssen also unser damaliges Resultat dividieren durch

$$1 + \frac{2l'}{\varrho + 2r_1}\theta,$$

oder, wenn wir $2r_1$ gegenüber ϱ vernachlässigen, durch:

$$1 + \frac{2l'}{\varrho}\theta.$$

Die frühere Amplitude von v ist demnach zu dividieren durch:

$$\sqrt{1 + \frac{4l'^2q^2}{\varrho^2}},$$

und dies ist nahezu gleich:

$$1 + \frac{2l'^2q^2}{\varrho^2},$$

wenn die magnetische Streuung nur gering ist.

Aufserdem entsteht aber eine Nacheilung des Stromes um den Winkel:

$$\text{arc tang}\frac{2l'q}{\varrho}.$$

Nun müssen wir uns daran erinnern, dafs $q = 2\pi f$ ist, wobei f die sekundliche Periodenzahl bedeutet, und ferner, dafs P, die an die Lampen abgegebene Leistung, umgekehrt proportional mit ϱ ist. Daraus erkennen wir jetzt, dafs **der vom Widerstand herrührende prozentuale Spannungsabfall** gleich $\frac{2r_1P}{v^2}$ ist, **der von der magnetischen Streuung herrührende** dagegen gleich $\frac{1}{2}a^2f^2P^2$, und dafs die Streuung eine **Phasenverschiebung** um den Winkel afP erzeugt. Darin bezeichnet a eine Konstante, die von denjenigen Konstruktionsdaten des Transformators abhängt, welche auf die Streuung Einflufs haben.

185. Zum Schlufs mag der Zusammenhang der wichtigsten Gröfsen beim Transformator noch einmal kurz beleuchtet werden. Wenn V bekannt ist, so braucht man es nur zu integrieren und durch N zu dividieren, um I zu erhalten. Nach Multiplikation mit 10^8 und Division durch den Querschnitt des Eisens (in qcm) erhalten wir dann B, die Induktion pro qcm im Eisen, als Funktion der Zeit. Die für die betreffende Eisensorte experimentell ermittelte Kurve $\frac{B}{H}$ setzt uns nun in den Stand, für jeden Wert von B den zu-

gehörigen Wert H zu finden, und dieser, multipliziert mit der Länge des magnetischen Kreises im Eisen, ergiebt uns die erforderliche magnetomotorische Kraft (die „Gaussage“) oder das $\frac{4\pi}{10}$-fache der Ampèrewindungen. Damit ist dann das Gesetz für die Änderung von A gefunden.

Wenn nun ein *sekundärer Strom* nicht vorhanden ist, so ergiebt A direkt **den primären Strom,** und unsere Ableitung müfste daher für einen unbelasteten Transformator oder eine Drosselspule zutreffen. Dies ist indessen nicht ganz richtig, da man niemals mit einem wirklich unbelasteten Transformator zu thun hat, selbst wenn der Stromkreis, den man gewöhnlich als den sekundären bezeichnet, einen unendlich grofsen Widerstand besitzt.

186. Das Grovesche Problem: Wirkung eines **Kondensators im primären Stromkreise eines Transformators.**

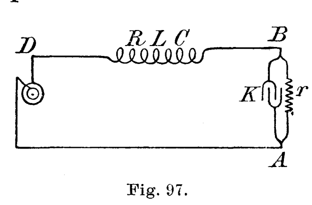


Fig. 97.

ADB (Figur 97) sei der primäre Stromkreis mit einer elektromotorischen Kraft $E = E_0 \sin nt$, einem Widerstande R und einer Selbstinduktion L. BA ist ein Kondensator von der Kapazität K, r ein parallel zum Kondensator geschalteter induktionsfreier Widerstand. Der Strom im primären Stromkreise sei C und habe die Amplitude C_0. Der Widerstand des Kondensators beträgt $\frac{1}{K\theta}$ Ohm.

Es ist nun ein leichtes, den Wert von C_0 auch für den Fall hinzuschreiben, dafs r und K irgend welche endlichen Werte besitzen*). Aber für unsere Aufgabe wollen wir annehmen, dafs ent-

*) Haben sowohl r als auch K endliche Werte, so bilden die parallel geschalteten Widerstände zwischen B und A zusammen einen Widerstand $\frac{r}{1 + rK\theta}$ und der gesamte für die Bestimmung von C mafsgebende Widerstand des Stromkreises beträgt:

$$R + L\theta + \frac{r}{1 + rK\theta}.$$

Infolge dessen wird:

$$C = \frac{(1 + rK\theta)\, E_0 \sin nt}{(R + r - LrKn^2) + (RrK + L)\,\theta},$$

$$C_0{}^2 = \frac{(1 + r^2K^2n^2)\, E_0{}^2}{(R + r - LrKn^2)^2 + (RrK + L)^2 n^2},$$

und danach läfst sich dann auch die Phasenverschiebung für den Strom leicht niederschreiben.

weder $r = 0$ oder $r = \infty$ sei. Wenn $r = 0$ ist, so ist der Gesamtwiderstand gleich $R + L\theta$, der Strom wird gleich $\frac{E}{R + L\theta}$, und es gilt:

$$C_0^2 = \frac{E_0^2}{R^2 + L^2 n^2}. \tag{1}$$

Ist dagegen $r = \infty$, so wird der Widerstand:

$$R + L\theta + \frac{1}{K\theta} \quad \text{oder} \quad \frac{1 + RK\theta + LK\theta^2}{K\theta}$$

oder gemäfs Art. 167:

$$\frac{(1 - LKn^2) + RK\theta}{K\theta},$$

und demnach findet man:

$$C_0^2 = \frac{E_0^2 K^2 n^2}{(1 - LKn^2)^2 + R^2 K^2 n^2} = \frac{E_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{Kn} - Ln\right)^2}. \tag{2}$$

Nun ist aber der Ausdruck (2) gröfser als der Ausdruck (1), sobald $2KLn^2$ gröfser als 1 ist. Der primäre Strom wird also durch einen Kondensator verstärkt, wenn dessen Kapazität gröfser als $\frac{1}{2Ln^2}$ ist. Die verstärkende Wirkung erreicht ein Maximum bei $K = \frac{1}{Ln^2}$; in diesem Falle kompensiert der Kondensator die Selbstinduktion der primären Spule vollständig.

187. Wechselstromgeneratoren in Reihenschaltung.

Die elektromotorischen Kräfte der Maschinen seien e_1 und e_2; C sei der Strom, welcher beide durchfliefst. Die Leistungen der Generatoren sind also $e_1 C$ und $e_2 C$. Nun sei:

$$e_1 = E \sin(nt + \alpha); \quad e_2 = E \sin(nt - \alpha),$$
$$e_1 + e_2 = 2E \cos\alpha \cdot \sin nt \text{*)}.$$

Ist l die Selbstinduktion jeder Maschine, r ihr innerer Widerstand, ist ferner $2R$ der äufsere Widerstand des Stromkreises und sind P_1 und P_2 die Mittelwerte der von den beiden Dampfmaschinen abgegebenen Leistungen, so ist:

$$C = \frac{2E\cos\alpha \cdot \sin nt}{2l\theta + 2r + 2R} = \frac{E\cos\alpha}{\sqrt{(R+r)^2 + l^2 n^2}} \sin\left(nt - \text{arc tang}\frac{ln}{R+r}\right)$$

oder nach Zusammenziehung der Konstanten:

$$C = M\cos\alpha \sin(nt - \varepsilon).$$

*) Vergleiche Art. 109.

Daraus folgt dann:

$$P_1 = \tfrac{1}{2} ME \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \varepsilon),$$
$$P_2 = \tfrac{1}{2} ME \cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \varepsilon).$$

Demnach ist also P_2 gröfser als P_1, und die Maschine II wird verzögert, während Maschine I eine Beschleunigung erfährt; folglich wächst α immer weiter an, bis zum Werte $\frac{\pi}{2}$. Sobald dieser Fall eintritt, wird $\cos\alpha = 0$ und damit $P_1 = P_2 = 0$: die Maschinen neutralisieren einander und erzeugen im äufseren Kreise keinen Strom mehr. **Generatoren können daher nur dann in Serienschaltung arbeiten, wenn sie mechanisch mit einander gekuppelt sind.**

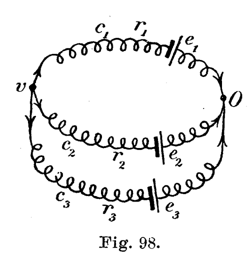


Fig. 98.

188. Da wir sehr häufig mit Stromzweigen in Parallelschaltung zu thun haben, so wollen wir im folgenden eine allgemein gültige Formel für diese Fälle geben.

Wenn die elektromotorischen Kräfte e_1, e_2, e_3 (Figur 98) *konstant* sind, so gelten die Gleichungen:

$$(1) \qquad v = e_1 - c_1 r_1 = e_2 - c_2 r_2 = e_3 - c_3 r_3,$$
$$(2) \qquad c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Sind nun die Werte e_1, e_2, e_3 und r_1, r_2, r_3 gegeben, so finden wir daraus leicht die Ströme; denn es gilt:

$$(3) \qquad v = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}.$$

Sind dagegen die elektromotorischen Kräfte e nicht konstant, so haben wir in unseren Formeln an die Stelle der blofsen Widerstandswerte r_1 u. s. w. die Ausdrücke $r_1 + l_1\theta$ u. s. w. zu setzen.

189. Generatoren in Parallelschaltung. Zwei gleiche Generatoren seien parallel auf einen induktionsfreien Stromkreis vom Widerstande R geschaltet.

Jeder Generator besitze einen Widerstand r und eine Selbstinduktion l. Die elektromotorischen Kräfte der beiden Maschinen seien:

$$e_1 = E \sin(nt + \alpha), \qquad e_2 = E \sin(nt - \alpha).$$

Welche mittlere elektrische Leistung wird dann jede der Maschinen übernehmen? Werden sie bestrebt sein, den gestörten Synchronismus wieder herzustellen?

Wenn e_1 und e_2 konstant wären, oder wenn $l = 0$ wäre, so würde $v = e_1 - c_1 r = e_2 - c_2 r = (c_1 + c_2) R$ sein; und folglich würde dann gelten:

$$c_1 = \frac{R}{2rR + r^2}\left\{e_1\left(1 + \frac{r}{R}\right) - e_2\right\},$$

$$c_2 = \frac{R}{2rR + r^2}\left\{e_2\left(1 + \frac{r}{R}\right) - e_1\right\}.$$

Bei Wechselstrom und Selbstinduktion müssen wir nun für r den entsprechenden Wert $r + l\theta$ einsetzen. Der Leser wird leicht einsehen, dafs wir dann schreiben können:

$$e_2 = e_1(a - b\theta), \qquad e_1 = e_2(a + b\theta),$$

wobei die Beziehungen gelten:

$$a^2 + b^2 n^2 = 1, \quad a = \cos 2\alpha, \quad bn = \sin 2\alpha.$$

Dann ergiebt sich:

$$(1) \qquad c_1 = \frac{\left(1 + \frac{r}{R} - a\right) + \theta\left(\frac{l}{R} + b\right)}{\left(2r + \frac{r^2}{R} - \frac{l^2 n^2}{R}\right) + \theta\, 2l\left(1 + \frac{r}{R}\right)}\, e_1$$

und für c_2 ein analoger Ausdruck mit dem Faktor e_2, nur dafs darin b negativ wird.

Wollen wir die Gleichung (1) unter Benutzung der Regel des Art. 167 vollständig ausführen, so erreichen wir eine wesentliche Vereinfachung durch Einführung von drei neuen Winkeln:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2ln(R + r)}{2Rr + r^2 - l^2 n^2},$$

$$\operatorname{tang}\psi_1 = \frac{(l + bR)n}{R + r - aR},$$

$$\operatorname{tang}\psi_2 = \frac{(l - bR)n}{R + r - aR}.$$

Dann wird nämlich:

$$c_1 = M \sin(nt + \alpha - \varphi + \psi_1),$$

$$c_2 = M \sin(nt - \alpha - \varphi + \psi_2),$$

wobei die Winkel φ, ψ_1, ψ_2 sämtlich zwischen 0 und $\pm 90^0$ angenommen sein sollen. Die mittleren Leistungen der beiden Maschinen sind dann:

$$P_1 = ME \cos(\varphi - \psi_1),$$
$$P_2 = ME \cos(\varphi - \psi_2),$$

worin

$$M^2 \text{ für } \frac{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(1+\frac{r}{R}\right)\cos 2\alpha + 1 + \frac{l^2n^2}{R^2}}{\left(2r+\frac{r^2}{R}-\frac{l^2n^2}{R}\right)^2 + 4l^2n^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} E^2 \text{ steht.}$$

Das Verhältnis der beiden Leistungen zu einander wird:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(\varphi - \psi_1)}{\cos(\varphi - \psi_2)}.$$

Für offenen Stromkreis ($R = \infty$) erhalten wir:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{ln}{r}, \ \operatorname{tang} \psi_1 = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = - \operatorname{tang} \psi_2$$

und somit:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(\varphi - \psi_1)}{\cos(\varphi + \psi_1)}.$$

In diesem Falle ist offenbar P_1 gröſser als P_2. Den *allgemeinen* Ausdruck für $\frac{P_1}{P_2}$ haben wir nicht selbst eingehend studiert, aber andere, welche dies gethan haben, behaupten, daſs P_1 unter allen Umständen gröſser als P_2 werden muſs. Wir empfehlen dem Leser, bestimmte Werte für r, l, R und α einzusetzen und selbst eine Probe anzustellen. Wenn wirklich P_1 *immer* gröſser ist als P_2, so bedeutet dies, daſs *unter allen Umständen* der voreilende Generator mehr Arbeit leistet und also in seiner Geschwindigkeit nachläſst, während der nacheilende entlastet wird und infolge dessen schneller zu laufen strebt. **Es besteht also eine Tendenz zum Synchronismus, und folglich können mehrere Wechselstromgeneratoren parallel auf ein Netz arbeiten.**

190. Knickfestigkeit. Wir betrachten eine Stütze aus homogenem Material mit vollständig prismatischem Querschnitt unter dem Einfluſs zweier Kräfte F, welche an den beiden Enden angreifen und durch die Zentren der Endquerschnitte gehen. Das Eigengewicht der Strebe wollen wir dabei vernachlässigen.

In Figur 99 bedeute ACB die Mittellinie der Stütze in gebogenem Zustande. Es sei $\overline{PQ} = y$ die Durchbiegung bei P, wo $\overline{OQ} = x$ ist; ferner werde die Länge $\overline{OA} = \overline{OB}$ mit l bezeichnet. y möge überall als klein angenommen werden können im Vergleich mit der Strebenlänge $2l$.

Fy ist das biegende Moment und $\frac{Fy}{EJ}$ folglich die Krümmung im Punkte P, wenn E den Elastizitätsmodul für das Material bedeutet und J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Gerade. Da nun in Art. 60 die Krümmung sich gleich $-\frac{d^2y}{dx^2}$ ergab*), so erhalten wir hier:

$$\frac{Fy}{EJ} = -\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{1}$$

Durch Probieren kann sich nun der Leser leicht überzeugen, daſs der Gleichung (1), die wir schon früher benutzten (Artikel 119) und auch später noch wieder anwenden werden, Genüge geleistet wird durch die Funktion:

$$y = a\cos\left(x\sqrt{\frac{F}{EJ}}\right), \tag{2}$$

worin a irgend einen beliebigen Wert haben kann.

Für $x = 0$ wird offenbar $y = a$, woraus sich die Bedeutung von a ergiebt; es ist die Durchbiegung des Balkens in der Mitte.

F A P Q C O B F

Fig. 99.

Die nächsten Schlüsse muſs der Leser mit besonderer Sorgfalt verfolgen.

---

*) Bezüglich des Vorzeichens beachte man folgendes: Bezeichnen wir mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ die „Krümmung" einer von der x-Axe nur wenig abweichenden Kurve, und ist der Ausdruck, durch den wir die Krümmung messen wollen, im wesentlichen positiv, so müssen wir dem Ausdrucke $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein solches Vorzeichen geben, daſs er ebenfalls positiv wird. Betrachten wir nun die „Neigung" der Kurve in Figur 99 so, wie wir es früher bei Figur 6 (S. 23) thaten, so werden wir finden, daſs $\frac{d^2y}{dx^2}$ jedenfalls von $x = 0$ bis $x = \overline{OA}$ negativ ist. Da nun y positiv ist, sodaſs also $\frac{Fy}{EJ}$ ebenfalls positiv wird, so müssen wir auf der rechten Seite der Gleichung (1) $-\frac{d^2y}{dx^2}$ schreiben.

Es läſst sich zeigen, daſs die *allgemeine* Lösung (vergleiche Artikel 154 und 159) irgend einer derartigen Gleichung wie (1), welche geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0,$$

folgendermaſsen lautet:

$$y = A\cos nx + B\sin nx,$$

wobei A und B beliebige Konstanten sind. A und B sind dabei so zu wählen,

Bei $x = l$ wird $y = 0$. Daraus folgt:

$$(3) \qquad a \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{F}{EJ}}\right) = 0.$$

Diese Beziehung ist aber nur möglich, wenn entweder a oder der Cosinus gleich 0 ist. Wenn daher überhaupt eine Biegung eintritt, sodafs also a einen von 0 verschiedenen Wert hat, so mufs der Cosinus gleich 0 sein. Nun ist aber der Cosinus eines Winkels nur dann gleich 0, wenn der Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ oder $\frac{5\pi}{2}$ u. s. w. ist. Es liegt auf der Hand, warum wir hier unsere Aufmerksamkeit auf den Fall beschränken, dafs der Winkel $\frac{\pi}{2}$ beträgt*). Die **Bedingung dafür, dafs überhaupt eine Biegung eintritt,** lautet also:

$$l\sqrt{\frac{F}{EJ}} = \frac{\pi}{2},$$

und daraus ergiebt sich:

$$(4) \qquad \boldsymbol{F = \frac{EJ\pi^2}{4l^2}}$$

als die zulässige Belastung des Balkens.

Diese letzte Gleichung ist bekannt unter dem Namen der Eulerschen Knickformel. Die Last, welche durch (4) angegeben wird, kann *ebensowohl eine sehr kleine als eine sehr grofse Biegung erzeugen.* Es ist ein leichtes, diese Theorie auf Stützen auszudehnen, die an einem Ende oder an beiden eingespannt sind.

Für die Gleichgewichtsbedingung bei sehr grofser Belastung ist die Gleichung (1) nicht mehr genau richtig, da bei starker Biegung der Wert $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die Krümmung nicht mehr zutrifft; aber für alle in der technischen Praxis vorkommenden Fälle kann sie als zutreffend angenommen werden.

---

dafs sie der speziellen Aufgabe entsprechen, welche gelöst werden soll. In dem vorliegenden Falle ist $y = 0$ für $x = l$ und ebenfalls für $x = -l$.

Daraus ergiebt sich dann sofort, dafs hier gilt:

$$0 = A \cos nl + B \sin nl,$$
$$0 = A \cos nl - B \sin nl,$$

woraus $B = 0$ folgt.

*) Dieser Fall ergiebt nämlich den geringsten Wert für die Tragfähigkeit F. Die übrigen Möglichkeiten: $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ u. s. w. bedeuten, dafs y auch *zwischen* den Grenzen $x = -l$ und $x = l$ einmal oder öfter gleich Null werden soll, so dafs also die Biegungslinie Wendepunkte besitzt.

191. Wir wollen nun annehmen, dafs der durch (4) angegebene Wert von F diejenige Belastung ist, welche den Balken zum Brechen bringt, wenn er infolge der Biegung überhaupt bricht. Ist andrerseits f diejenige *Druckspannung*, welche ein Zerdrücken des Balkens zur Folge hat, und A seine Querschnittsfläche, so wird die Belastung fA den Balken durch unmittelbares Zerdrücken (Zermalmen) zerstören; als zulässige Last müssen wir natürlich das kleinere der beiden Resultate annehmen. Es ist leicht einzusehen, dafs der Wert fA für kurze Streben in Frage kommt oder für solche, welche durch einen Kunstgriff an der Biegung verhindert werden*), während (4) für lange Streben mafsgebend ist.

Nun ist es aber selbst bei gröfster Sorgfalt nicht möglich, Streben ganz gerade oder ganz homogen herzustellen; auch ist es nicht leicht, sie genau in der angegebenen Weise zu belasten. Die Folge ist, dafs sie sich auch schon **bei geringer Belastung durchbiegen,** und dafs sie viel früher brechen, als der Wert fA bezw. die Gleichung (4) angiebt.

Überraschenderweise bestätigt aber trotzdem der Versuch, dafs die zulässige Belastung (bei gleichem Querschnitt der Stütze) näherungsweise dem Quadrat ihrer Länge umgekehrt proportional ist.

Die beiden Formeln für kurze und lange Stützen können wir nun in folgende Gleichung für die Grenze F der Tragfähigkeit zusammenfassen:

(5) $$F = \frac{fA}{1 + \frac{fA\,4\,l^2}{EJ\pi^2}},$$

und **diese Formel auf Stützen von jeder Länge anwenden.** Wenn nämlich l grofs ist, können wir die 1 im Nenner vernachlässigen, so dafs der Ausdruck (5) mit dem Ausdruck (4) identisch wird. Ist andrerseits l klein, so können wir näherungsweise den Nenner gleich 1 setzen und erhalten also $F = fA$.

Wir haben auf diese Weise eine empirische Formel gefunden welche sich für alle Balken als recht gut zutreffend erwiesen hat. Um sie auf ihre gewöhnliche Form zu bringen, setzen wir $J = Ak^2$, worin k der *kleinste* Trägheitsradius des Querschnittes in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Axe ist. Dann wird

(6) $$F = \frac{fA}{1 + a\frac{l^2}{k^2}}$$

*) Diese Bemerkung bezieht sich auf derartige Streben, wie sie in der Firth of Forth-Brücke verwendet sind.

worin $a = \frac{4f}{E\pi^2}$ zu setzen ist. Besser noch sieht man f und a als Zahlen an, welche durch wirkliche Versuche an Stützen auf das sorgfältigste festgestellt sind.

Wirken die Kräfte F nicht genau im Zentrum der beiden Endquerschnitte, sondern in einem Abstande h von demselben, so wird $y = h$ für $x = l$. Daraus erklärt es sich, warum Stützen, die nicht vollkommen zentral belastet sind, schon bei einer bedeutend geringeren Belastung brechen, als Gleichung (4) angiebt. Wer sich eingehender mit den besprochenen Gegenständen zu beschäftigen wünscht, möge etwa Müller-Breslau, „*Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*" (2. Aufl., Leipzig, 1893) zur Hand nehmen.

192. Stützen mit seitlicher Belastung. Wir wollen unsere Betrachtung auf Stützen mit gelenkartig gelagerten Enden beschränken. Die seitlichen Belastungen, zusammen mit den erforderlichen seitlichen Unterstützungskräften, mögen ein Biegungsmoment $\Phi(x)$ erzeugen; dann giebt die Gleichung (1) aus Artikel 190:

$$Fy + \Phi(x) = -EJ\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Beispielsweise sei eine Stütze *gleichmäfsig* seitlich belastet, vielleicht durch Zentrifugalkraft oder auch durch ihr eigenes Gewicht, und infolgedessen sei $\Phi(x) = \frac{1}{2}w'(l^2 - x^2)$, worin w' die seitliche Belastung pro cm Länge bedeutet. Wir finden nun, dafs es etwas bequemer ist, $\Phi(x) = \frac{1}{4}Wl\cos\frac{\pi}{2l}x$ zu setzen, wobei W die gesamte seitliche Belastung bedeutet; dieser Ausdruck ist von dem vorigen nicht wesentlich verschieden.

Dann ergiebt sich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EJ}y + \frac{1}{4}\frac{Wl}{EJ}\cos\frac{\pi}{2l}x = 0 \tag{1}$$

und daraus:

$$y = \frac{\frac{1}{4}Wl}{EJ\frac{\pi^2}{4l^2} - F}\cos\frac{\pi}{2l}x. \tag{2}$$

Die Durchbiegung in der Mitte beträgt:

$$y_1 = \frac{\frac{1}{4}Wl}{EJ\frac{\pi^2}{4l^2} - F}, \tag{3}$$

und das gröfste Biegungsmoment μ wird:

$$\mu = Fy_1 + \frac{1}{4}Wl = \frac{\frac{1}{4}Wl \cdot \frac{EJ\pi^2}{4l^2}}{\frac{EJ\pi^2}{4l^2} - F}. \tag{4}$$

Setzen wir in diese Formel einmal $W = 0$ ein, während μ irgend einen beliebigen endlichen Wert besitzt, so sehen wir, dafs der Nenner des Bruches den Wert 0 haben mufs. Indem wir ihn gleich 0 setzen, erhalten wir die

Eulersche Formel für Stützen, bei denen wegen ihrer grofsen Länge die Druckspannungen nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Bezeichnen wir den Eulerschen Wert für F mit U, so dafs $U = \frac{EJ\pi^2}{4l^2}$ wird, so geht Gleichung (4) über in:

$$(5) \qquad \mu = \tfrac{1}{4} Wl \frac{U}{U-F}.$$

Ist z_c der gröfste Abstand eines Querschnittspunktes von der neutralen Linie auf der Druckseite, also $\frac{J}{z_c} = Z$ das kleinste Widerstandsmoment des Querschnittes, ist ferner A die Querschnittsfläche und f die gröfste in der Stütze überhaupt auftretende Druckspannung, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\mu}{Z} + \frac{F}{A} = f.$$

Benutzen wir diese Gleichung und setzen noch β für $\frac{U}{A}$ (d. i. die nach Euler *zulässige* Belastung pro qcm Querschnitt) und ferner w für $\frac{F}{A}$ (d. i. die *wirklich* vorhandene Knickbelastung pro qcm), so gilt:

$$(6) \qquad \left(1 - \frac{w}{f}\right)\left(1 - \frac{w}{\beta}\right) = \frac{Wl}{4fZ},$$

eine Formel, die sich dem Gedächtnisse leicht einprägt; aus ihr kann dann w gefunden werden.

Beispiel: **Kupplungsstange** zur Verbindung zweier Lokomotivtriebaxen.

Jeder Punkt einer eisernen oder stählernen Kupplungsstange von der Länge $2l$ cm bewege sich auf einem Kreise von r cm Radius. Der Querschnitt der Stange sei ein Rechteck von d cm Länge in der Ebene der Bewegung und b cm rechtwinklig zu derselben. Wir können dann $W = \frac{lbdrn^2}{5700000}$ kg setzen*), wobei n die Umdrehungszahl pro Minute bedeutet. Man betrachte nun die Stange als eine an beiden Enden gelenkartig gelagerte Stütze bezüglich beider Richtungen, in welchen sie brechen könnte:

1) auf Biegung in der Richtung, in welcher keine Zentrifugalkraft herrscht, und in welcher $J = \frac{db^3}{12}$ ist.

Eulers Gesetz ergiebt als zulässige Belastung:

$$(7) \qquad \frac{Edb^3\pi^2}{48l^2}.$$

Diesen Wert müssen wir nun als die an den Enden angreifende Kraft einsetzen, die ein Knicken auch in der anderen Biegungsrichtung zu bewirken sucht. Und zwar soll das Verhältnis von b und d so gewählt werden, dafs die Sicherheit der Stange nach beiden Richtungen hin gleich grofs ist.

2) Man untersuche die Stange auf Biegung in der Richtung, in welcher die knickende Kraft durch die Zentrifugalkraft unterstützt wird. Unser w aus Gleichung (6) ist gleich der oben unter (7) genannten Gröfse, dividiert durch bd, oder in Zahlen:

---

*) $W = \frac{2lbd \cdot 7{,}86}{981} \cdot r \cdot \left(\frac{n\,2\pi}{60}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000}$.

$$w = 4{,}52 \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot 10^5,$$

wenn $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ angenommen wird.

Nehmen wir beispielsweise als zulässige Druckspannung f für den benutzten Stahl 1400 kg pro qcm an (wir müssen f wegen der fortwährend wechselnden Richtung der Spannung ziemlich klein wählen) und beachten, dafs J in dieser Richtung gleich $\frac{b d^3}{12}$ ist, so erhalten wir aus Gleichung (6):

$$(8) \qquad 5{,}32 \cdot 10^9 \left(1 - 322 \frac{b^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \frac{n^2 l^2 r}{d}.$$

Ist z. B. $b = 2$, $l = 75$, $r = 30$ cm, so giebt die nachstehende Tabelle die passendsten Werte von d an für die darunter stehenden Tourenzahlen:

d	2	3	4	5	6	8	12
n	0	229	307	363	408	486	606

Zur Berechnung einer solchen Tabelle nimmt man am bequemsten d an und berechnet dann n aus Gleichung (8).

Übungsaufgabe. Man betrachte eine horizontale 200 cm lange ($l = 100$), runde eiserne Stange von 2 cm Durchmesser und nehme F gleich 350 kg an. Die Knickbelastung der Stange würde dann für sich allein eine Spannung von $111{,}5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ hervorbringen. Dazu komme eine seitliche Belastung von solcher Gröfse, dafs dieselbe *allein* eine Spannung von $150 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ erzeugen würde (Eigengewicht). Es ist zu zeigen, dafs, wenn beide Einflüsse gleichzeitig wirken, eine Spannung von ca. 1350 kg pro qcm entsteht. Dabei ist $E = 2\,000\,000$ angenommen worden.



Kapitel III.

Schwierigere Aufgaben und Lehrsätze.

193. Im ersten Kapitel haben wir uns allein mit der Differentiation und Integration von x^n beschäftigt, im zweiten Kapitel entsprechend mit e^{ax} und $\sin ax$, und wer nicht ausführlichere Studien in der höheren Analysis anstellen will, kann sich mit den genannten Funktionen begnügen. Unsere Kenntnis jener drei Funktionen genügt zur Lösung fast sämtlicher Aufgaben, die dem praktischen Ingenieur begegnen. So wird man denn auch sehen, daſs viele von den Beispielen, die wir im dritten Kapitel entwickeln werden, auch schon im ersten oder zweiten hätten gegeben werden können. Um weitergehende Studien über Differential- und Integralrechnung anzustellen, wird der Studierende zweckmäſsig ein ausführliches Lehrbuch dieser Wissenschaft zur Hand nehmen, wie solche in gröſserer Zahl sowohl zum Selbststudium, wie zum Gebrauche neben Vorlesungen vorliegen.

Es ist nur eine kleine Anzahl einfacher Regeln, vermittelst deren man sich ohne besondere Mühe die Fähigkeit, eine elementare Funktion zu differenzieren, erwirbt. Wenn wir diese wenigen Regeln im vorliegenden dritten Kapitel zur Behandlung bringen, so sollen unsere Entwicklungen den Zwecken der Einführung oder der Wiederholung dienen. Auf diese Art werden die folgenden Ausführungen auch neben den ausführlicheren Lehrbüchern zur Verbreitung der Kenntnis der Differential- und Integralrechnung dienen. Leider erwerben sich nur so Wenige eine tiefer gehende Kenntnis dieser bewundernswerten Wissenschaft; und leider verliert so Mancher gar zu schnell seine kaum erworbene Fähigkeit im Differenzieren, weil er sich niemals die Mühe genommen hat, den fundamentalen Begriff des Differentialquotienten wirklich klar zu erfassen. Wenn aber Jemand die Grundbegriffe unserer Wissenschaft klar erkannt hat, so sollte er sich auch die nötige Fertigkeit in der Handhabung derselben erwerben und diese Fertigkeit bewahren. Dieselbe ist wirklich nicht schwer zu gewinnen; wenn der Leser die Übungsaufgaben gründlich durcharbeitet,

so gewinnt er auf jeden Fall eine ausreichende Fähigkeit im Differenzieren der elementaren algebraischen und transcendenten Funktionen. Diese Fähigkeit wird ihm aber für seine spätere Praxis von gröfstem Werte sein.

In den voraufgehenden Kapiteln haben wir es als sehr wichtig bezeichnet, dafs sich der Leser für die Funktionen:

$$y = ax^n, \quad y = ae^{bx}, \quad y = a \sin(bx + c)$$

einige Zahlenbeispiele bildet und sich dieselben durch Zeichnung der zugehörigen Kurven veranschaulicht. In gleicher Weise sollte derselbe die neuen Funktionen behandeln, die weiterhin auftreten werden. Doch betonen wir warnend, dafs es besser ist, einige wenige Kurven recht sorgfältig zu zeichnen, als die mangelnde Güte der Zeichnungen durch die grofse Zahl der behandelten Fälle ersetzen zu wollen.

Der Ingenieur erkennt seine Fähigkeiten bei dem ersten Problem irgend welcher Art, das er in voller Selbständigkeit zu behandeln hat. Die Art des Problems thut dabei gar nichts zur Sache; aller Nachdruck liegt auf der Sorgfalt und Vollständigkeit der Bearbeitung.

Es möge z. B. die zur Funktion $y = \text{tang}\,(ax)$ gehörende Kurve gezeichnet werden. Wir setzen dabei voraus, dafs der Leser die Funktionen ae^{bx} und $\sin nx$, sowie $ae^{bx} \cdot \sin nx$ bereits in entsprechender Weise behandelt hat.

194. Es sei eine Gleichung $y = f(x)$ vorgelegt, welche uns gestattet, für einen gegebenen Wert x den zugehörigen Funktionswert y zu berechnen. Wir werden somit auch für den veränderten Wert $x + \Delta x$ den zugehörigen Wert:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

der Funktion berechnen können. Durch Subtraktion des ursprünglichen Funktionswertes vom abgeänderten und Division mit Δx finden wir:

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Wir haben hier nur für eine beliebige Funktion $f(x)$ ausgeführt, was wir für unsere vielgenannten drei Funktionen x^n, e^x, $\sin x$ oben im speziellen vornahmen. **Unsere Definition des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$** wird demnach auch wie oben die sein, dafs er der Grenzwert des Quotienten (1) für unendlich kleines, d. h. ohne Ende abnehmendes Δx ist.

195. Es geht unmittelbar aus der gegebenen Definition hervor, daſs der Differentialquotient des **Produktes** $af(x)$ aus der Konstanten a und der Funktion $f(x)$ gleich a multipliziert mit dem Differentialquotienten von $f(x)$ ist. Ebenso leicht ist zu zeigen, daſs der Differentialquotient der **Summe** mehrerer Funktionen gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden ist. In einigen Beispielen des ersten Kapitels haben wir diese Regel bereits ohne Beweis zur Anwendung gebracht.

Den Beweis des zuletzt genannten Lehrsatzes können wir in folgende Gestalt kleiden: Es sei

$$y = u + v + w$$

die Summe von drei gegebenen Funktionen von x. Man lasse x um Δx wachsen und bezeichne die entsprechenden Änderungen der drei Summanden durch Δu, Δv, Δw. Bezeichnet man alsdann die Änderung von y durch Δy, so gilt:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Beim Grenzübergang für unendlich kleines Δx folgt also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}.$$

196. *Differentialquotient eines* **Produktes** *von zwei Funktionen.* Es sei $y = uv$, wo u und v Funktionen von x sind. Bei Zunahme von x um Δx geht y über in:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Durch Subtraktion der ursprünglichen Gleichung folgt:

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Wir nehmen nun an, daſs Δx und infolge dessen auch Δu, Δv, Δy unendlich klein werden. Welchen endlichen Grenzwert $\frac{du}{dx}$ dabei auch $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ annehmen wird, jedenfalls wird sich $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ der Grenze 0 nähern, sodaſs wir gewinnen:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Der Leser wolle diese Regel selbständig in Worte kleiden.

Für die Funktion $y = uvw$, die wir auch in der Gestalt $uv \cdot w$ schreiben können, ist es leicht, durch Wiederholung des gleichen Schlufsverfahrens die Regel abzuleiten:

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx}.$$

Erläuterung. Ist $y = 10x^7$, so findet man direkt $\frac{dy}{dx} = 70x^6$. Wir können diese Funktion aber auch so schreiben $y = 5x^3 \cdot 2x^4$. Die Anwendung unserer eben entwickelten Regel liefert alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^3 \cdot 8x^3 + 2x^4 \cdot 15x^2 = 40x^6 + 30x^6 = 70x^6.$$

Der Leser wird sich weitere Beispiele leicht selber herstellen.

197. *Differentialquotient eines* **Quotienten** *von zwei Funktionen.*

Man setze jetzt $y = \frac{u}{v}$, wo wieder u und v Funktionen von x sind. Unter diesen Umständen gilt:

$$y + \varDelta y = \frac{u + \varDelta u}{v + \varDelta v},$$

woraus wir durch Subtraktion finden:

$$\varDelta y = \frac{u + \varDelta u}{v + \varDelta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\varDelta u - u\varDelta v}{v^2 + v\varDelta v},$$

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{v\frac{\varDelta u}{\varDelta x} - u\frac{\varDelta v}{\varDelta x}}{v^2 + v\varDelta v}.$$

Wird $\varDelta x$ unendlich klein, so nähert sich auch $v\varDelta v$ der Grenze 0, und also folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Der Leser wolle sich auch diese Regel wieder in Worte fassen, und er wolle dabei vor allen Dingen sich recht genau einprägen, dafs es das Produkt $v\frac{du}{dx}$ ist, welches im Zähler voransteht: **Nenner mal Differentialquotient des Zählers, minus Zähler mal Differentialquotient des Nenners, die Differenz geteilt durch das Quadrat des Nenners.**

Einige Erläuterungen mögen sich wieder anschliefsen: Ist $y = \frac{24x^7}{3x^2}$, so kann man auch $y = 8x^5$ schreiben und findet direkt $\frac{dy}{dx} = 40x^4$. Nach der angegebenen Formel ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \cdot 168x^6 - 24x^7 \cdot 6x}{9x^4} = 40x^4.$$

Der Leser wolle auch noch die Funktionen:

$$y = \frac{15x^2}{3x^4} = 5 \cdot x^{-2} \quad \text{oder} \quad y = \frac{7x^{\frac{3}{2}}}{-2x^4} = -\tfrac{7}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

als Stichproben der „*Quotientenregel*“ differenzieren.

198. Ist y eine bekannte Funktion von z, z aber als Funktion von x gegeben, so kann man leicht auch y als Funktion von x darstellen. Ist z. B. $y = b \log(az^2 + g)$ und $z = c + dx + \sin ex$, so ist offenbar:

$$y = b \log[a(c + dx + \sin ex)^2 + g].$$

Wir bringen ein derartiges Abhängigkeitsverhältnis allgemein durch die beiden Gleichungen:

$$y = f(z) \quad \text{und} \quad z = F(x)$$

zum Ausdruck. Lassen wir jetzt x um Δx zunehmen, so wird z ein entsprechendes Wachstum Δz erfahren. Zu *eben diesem* Δz aber gehört eine Zunahme Δy von y, und es ist klar, dafs dieses Δy durch Vermittelung von z und Δz aus x und Δx berechnet werden kann. Dabei wird alsdann die Gleichung gelten:

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Offenbar gilt diese Regel deshalb, weil wir den aus $z = F(x)$ berechneten Zuwachs Δz auch in der Gleichung $y = f(z)$ zur Bestimmung von Δy benutzten. Wir schreiben vor, dafs dies Sachverhältnis bei unendlicher Abnahme von Δz bestehen bleiben soll; es wird alsdann die Formel (1) gültig bleiben, wenn Δx und infolge dessen auch Δz und Δy ohne Ende klein werden. Wir gelangen so zu der Gleichung:

(2) $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}.$$

Es handelt sich hier um ein aufserordentlich wichtiges Theorem, und der Leser darf nicht ruhen, bis er dasselbe deutlich aufgefafst hat. Man wolle dabei wie immer beachten, dafs z. B. die Gröfse dz in (2) keine selbständige Bedeutung besitzt; wir sagen gar nichts über dz für sich genommen aus, sondern wir sprechen allein von den *Verhältnissen* $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$.

Es ist gewifs nicht unsere Absicht, den Anfänger zu plagen; aber es würde sich später rächen, wenn er über den in Formel (2) zum Ausdruck kommenden Satz zu schnell hinweggehen würde. Wir müssen daher hier einige erläuternde Beispiele einschalten. Man setze



etwa erstlich $y = az^3$, $z = bx^2$. Da $\frac{dy}{dz} = 3az^2$ und $\frac{dz}{dx} = 2bx$ ist, so gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3az^2 \cdot 2bx = 6abz^2x = 6ab^3x^5.$$

Indem wir aber in $y = az^3$ für z den Ausdruck bx^2 eintragen, folgt $y = ab^3x^6$, sodafs wir durch direkte Differentiation von y nach x denselben Ausdruck gewinnen. Der Leser wolle sich ähnliche Beispiele in gröfserer Zahl selbst bilden.

Der Begabtere mag sich die Regel (2) noch vermöge dreier Kurven deutlich machen, von denen die erste die Beziehung zwischen x und z darstellt, die zweite diejenige zwischen z und y liefert, während die x, y-Kurve aus den beiden ersten nach einer einfachen Regel punktweise zu konstruieren ist. Da mufs sich dann zeigen, dafs die Steigung der x, y-Kurve an der einzelnen Stelle gleich dem Produkt der korrespondierenden Steigungen der beiden anderen Kurven ist. Immerhin ist diese Betrachtung etwas zu kompliziert, um lehrreich zu sein.

Durch Verallgemeinerung der Überlegung würden wir übrigens zu Formeln wie

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

gelangen.

199. Es ist sehr leicht, sich die Formel:

(4) $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1}$$

an der Hand der x, y-Kurve durch eine geometrische Betrachtung klar zu machen. In der That sieht man sofort, dafs $\frac{dx}{dy}$ die Cotangente eben desjenigen Winkels ist, dessen Tangente gleich $\frac{dy}{dx}$ ist.

Man kann auch so sagen: Wenn bei der Zunahme von x um Δx die entsprechende Zunahme der Funktion Δy ist, und wir gehen von dem so bestimmten Δy aus, so müssen wir bei Berechnung des zugehörigen Zuwachses Δx eben zum Anfangswerte zurückgeführt werden. Es ist also:

(5) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1;$$

und da diese Regel richtig bleibt, wie klein auch Δx wird, so kommen wir zur Formel (4) zurück.

200. Für die Gleichung (2) mag hier noch ein Beispiel gegeben werden: Aus dem **Indikatordiagramm einer Gasmaschine** finden wir durch Anwendung des Artikels 57 leicht ein Diagramm für die a. a. O. mit h bezeichnete Gröſse. Es bedeutet aber h dortselbst die in Meterkilogramm umgerechnete Wärmemenge, welche das Gas pro Einheit der Volumenänderung aufnimmt. Zugrunde liegt dabei die Annahme, daſs es sich um ein vollkommenes Gas handelt, und daſs die Wärme dem Gase von irgend einer Wärmequelle zugeführt wird. (Im vorliegenden Falle wird die Wärme der eigenen chemischen Energie des Gases entnommen.)

Gerade wie der **Druck** gleich $\frac{dW}{dv}$, d. h. **gleich der pro Einheit der Volumänderung geleisteten Arbeit** ist, so ist hier $h = \frac{dQ}{dv}\cdot$ Man beachte dabei, daſs h in denselben Einheiten wie p gemessen wird, und daſs es daher beim Zeichnen der Kurve für h nicht nötig ist, auf die Maſsstäbe für p oder v zu achten. In dem Diagramm mögen sie in Centimeter aufgetragen sein.

Wir kennen keine Übung, welche besser geeignet wäre, den Leser mit der Bedeutung eines Differentialquotienten vertraut zu machen, als die, ein Indikatordiagramm stark zu vergröſsern, danach eine Tabelle mit zahlreichen Werten für p und v aufzustellen und dann angenähert $\frac{dp}{dv}$ für jeden Wert von v zu berechnen. (Auf diesem Wege erhält man genauere Resultate, als wenn man mit dem Lineal Tangenten an die Kurve legt.) Unter Benutzung dieser Werte und der nach Art. 57 berechneten Werte von h, d. i. von $\frac{dQ}{dv}$, für jede einzelne Stelle wollen wir jetzt die **Wärmeaufnahme pro Sekunde** ermitteln. Bedeutet t die Zeit, so ist $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$; folglich brauchen wir die gefundenen Werte von h nur mit $\frac{dv}{dt}$ zu multiplizieren.

Da nun $\frac{dv}{dt}$ durch die Geschwindigkeit des Kolbens gegeben ist, und da die Bewegung des Kolbens nahezu eine einfach harmonische Bewegung ist, so können wir die Werte $\frac{dv}{dt}$ leicht graphisch bestimmen. Wir beschreiben über der Basis des Diagrammes, welche den Kolbenhub bezeichnet, einen Halbkreis; dann geben die Ordinaten des Halbkreises die Werte für $\frac{dv}{dt}$ an. Wir haben daher jeden Wert von h mit der zugehörigen Ordinate des Halbkreises zu multiplizieren und

erhalten dann in einem leicht zu bestimmenden Maſsstabe das Diagramm, welches für jeden Augenblick $\frac{dQ}{dt}$ angiebt. —

Nachdem wir die Regeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

kennen gelernt haben, werden wir häufig dx und dy so behandeln, als ob sie *konstante*, von Null verschiedene Gröſsen wären. Wir müssen uns dabei jedoch stets dessen bewuſst bleiben, daſs die Zahlen dx und dy strenge genommen *variabele* Gröſsen darstellen, welche bei ihrer Veränderlichkeit die Null zur „*Grenze*" haben sollen. Haben wir uns aber bereits früher entschlossen, die abgekürzte Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ zu gebrauchen, wo wir, genau genommen, den „*Grenzwert des Quotienten* $\frac{dy}{dx}$" bezeichnen wollen, so werden wir jetzt sogar, wo es zur Bequemlichkeit beim Operieren mit den Formeln dienlich ist, dy von dx isolieren. So schreibt man wohl:

(1) $$M\,dx + N\,dy = 0,$$

wobei M und N Funktionen von x und y sind; eigentlich gemeint ist aber damit:

(2) $$M + N\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ebenso kann man, wenn $y = ax^2$ ist, wohl schreiben:

(3) $$dy = 2ax \cdot dx,$$

wo es besser heiſsen sollte:

(4) $$\frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Der Hauptvorteil bei dieser etwas geänderten Schreibweise besteht darin, daſs sich dann die Integration einfacher gestaltet. Wir brauchen nämlich z. B. in (3) nur beiderseits das Integralzeichen vorzusetzen, während wir, um Gleichung (4) zu integrieren, die Operation in Worten erklären müſsten. Und doch sind beide Methoden in Wahrheit identisch. Bereits in Kapitel I haben wir übrigens vorübergehend dx und dy in dieser Weise gebraucht.

Rein mathematische Beispiele für den in Artikel 198 abgeleiteten Satz könnte man in Menge aufstellen; nicht so leicht ist es dagegen, Material zu finden, welches zu neuen Gedanken über den Gegenstand anregt und dem Leser die Bedeutung des Satzes anschaulich macht.



Das Gesetz ist richtig, und es ist nicht schwer, es zu beweisen; aber der Schüler mufs das Gesetz zu einem Teile seines Denkvermögens machen, und dazu braucht er in der Regel mehr als abstrakte Beweise.

Diesem Grundsatze wollen wir im Nachstehenden folgen und an einer Reihe von Beispielen den Nutzen des Satzes darlegen.

201. Es sei $\boldsymbol{y = \log x}$. Diese Gleichung sagt in anderer Form genau dasselbe aus wie $x = e^y$. Es folgt somit:

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x \quad \text{und also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Schon im ersten Kapitel haben wir gelegentlich ohne Beweis den Satz benutzt, dafs das Integral von $\frac{dx}{x}$ gleich $\log x$ ist. Es war dies der Ausnahmefall von der allgemeinen Regel über die Integration von $x^n dx$.

202. Ist der Differentialquotient von $\sin x$ in der Form $\cos x$ bekannt, so soll man denjenigen von $\sin ax$ finden. Man schreibe:

$$y = \boldsymbol{\sin ax} = \sin u, \quad \text{wo } u = ax$$

ist. Es folgt:

$$\frac{dy}{du} = \cos u \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} = a,$$

sodafs man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot a = a \cos ax.$$

Man bestimme den Differentialquotienten von $y = \boldsymbol{\cos ax}$, auf Grund der als bekannt geltenden Thatsache, dafs der Differentialquotient von $\sin x$ gleich $\cos x$ ist. Hier gilt:

$$y = \cos ax = \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = \sin u, \quad \text{wobei } \frac{du}{dx} = a$$

ist. Weiter folgt somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot a = a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin ax.$$

203. Differentiation von $y = \boldsymbol{\log(x + a)}$. Man setze $x + a = u$ und also $y = \log u$. Dann ist $\frac{du}{dx} = 1$ und $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$; also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + a}.$$

204. Differentiation von $y = \boldsymbol{\operatorname{tang} x}$. Man behandele diese Funktion als Quotient $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Auf die Art findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Der Leser wolle sich den Prozeſs der Differentiation eines Quotienten an diesem Beispiele nochmals in seinen Einzelheiten vergegenwärtigen.

205. $y = \operatorname{cotang} x$. Hier können wir verschiedene Wege gehen. Behandeln wir cotang x als Quotienten $y = \frac{\cos x}{\sin x}$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x\,(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Wir können auch:

$$y = u^{-1}, \quad u = \operatorname{tang} x$$

setzen und finden alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{tang}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

206. Zur Differentiation von $y = \sin(ax^2)$ setze man

$$y = \sin u, \quad u = ax^2$$

und findet:

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ und } \frac{du}{dx} = 2ax,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2ax = 2ax \cos(ax^2).$$

Bei $y = e^{a \sin x}$ schreibe man $u = a \sin x$, $y = e^u$ und hat:

$$\frac{dy}{du} = e^u, \quad \frac{du}{dx} = a \cos x,$$

sodaſs folgt:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot a \cos x = a \cos x\, e^{a \sin x}.$$

207. $y = \sec x$. Wir können diese Funktion entweder nach der Quotientenregel, indem wir nämlich $\sec x = \frac{\operatorname{tang} x}{\sin x}$ setzen, oder nach der Differentiationsregel (2) S. 309 für zusammengesetzte Funktionen behandeln. Im letzteren Falle setzen wir:

$$y = (\cos x)^{-1} = u^{-1}, \quad u = \cos x,$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \operatorname{tang} x.$$

208. In Art. 11 haben wir die Cykloide durch ein Gleichungenpaar vermöge eines Hilfswinkels φ so dargestellt:

$$x = a\varphi - a \sin \varphi, \quad y = a - a \cos \varphi.$$

Man bestimme $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ für irgend einen Punkt der Kurve.

Hier gelten die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = a \sin \varphi : (a - a \cos \varphi) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} : (a - a \cos \varphi)$$

$$= \frac{-1}{a(1 - \cos \varphi)^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

209. Gilt die Gleichung:

(1) $$x^2 + y^2 = a^2,$$

so berechnet sich der Differentialquotient von y in Bezug auf x so:

(2) $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Wollen wir diesen Differentialquotienten als Funktion von x allein ausdrücken, so mufs man y aus (1) berechnen und den gefundenen Ausdruck in (2) eintragen. Bei der Mehrzahl der Fälle ist aber die in (2) angegebene Gestalt des Differentialquotienten die brauchbarere.

Wir stellen noch einige weitere Gleichungen zwischen x und y auf und setzen jedesmal daneben den zugehörigen Wert des Differentialquotienten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}},$$

$$y = \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos^4 x,$$

$$y = \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \operatorname{tang} x, \quad \frac{dy}{dx} = \sec^4 x.$$

Ist $y = \sqrt{x^2 + a^2}$, so setze man $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^2 + a^2$ und hat:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$



210. In der Gleichung $y = \mathbf{arc\,sin}\,x$ bedeutet y den in Bogenmaſs gemessenen Winkel, dessen Sinus gleich x ist. Die angegebene Gleichung drückt also dasselbe Abhängigkeitsverhältnis zwischen x und y aus, wie $x = \sin y$. Somit gilt:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Es ist hier zunächst fraglich, ob die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen ist; offenbar müssen wir der rechten Seite der letzten Gleichung das Vorzeichen von $\cos y$ geben.

211. In ähnlicher Weise folgt aus $y = \mathbf{arc\,cos}\,x$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

212. Setzt man $y = \mathbf{arc\,tang}\,x$, so ist $x = \operatorname{tang} y$, und also folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tang}^2 y = 1 + x^2,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

213. In entsprechender Weise ergiebt sich aus $y = \mathbf{arc\,cotang}\,x$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

214. Vermöge der Formeln (2) Art. 198 und (4) Art. 199 sind wir im Stande, jede zusammengesetzte elementare Funktion, sowie jede zu einer gegebenen inverse Funktion zu differenzieren. Der Leser wolle sich neben den vorstehenden Beispielen noch weitere selber bilden; er wolle z. B. die einzelnen Formeln der im letzten Artikel des vorliegenden Buches enthaltenen Integraltabelle bestätigen. Eine solche möglichst vollständige Tabelle von Integralen muſs übrigens der Studierende stets zur Hand haben; es ist unmöglich, alle Integralformeln im Gedächtnis zu behalten.

In manchen Fällen ist es angezeigt, die *„logarithmische Differentiation“* anzuwenden, d. h. von y erst zur Funktion $\log y$ zu gehen, um diese alsdann zu differenzieren. Diese Methode wird man z. B. bei $y = x^x$ befolgen. Hier ist:

$$\log y = x \cdot \log x,$$

und also folgt:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x, \qquad \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x).$$

Auf diese Weise kann man z. B. auch für $y = a^x$ das Resultat $\frac{dy}{dx} = a^x \log a$ ableiten.

215. In den folgenden Beispielen sind die Variabelen statt mit x und y gelegentlich auch mit $z, v, w, \vartheta, \cdots$ bezeichnet, während $a, b, c, m, n, \cdots$ Konstanten bezeichnen. Der Anfänger gewöhnt sich zu leicht daran, ausschliefslich die Bezeichnungen x und y für die Variabelen zu gebrauchen, und wolle demnach an Stelle von x auch einmal t oder ϑ oder v treten lassen und einen entsprechenden Ersatz für y ausführen. In der folgenden Tabelle mufs jede Integralformel durch Ausrechnung der entsprechenden Differentialformel bestätigt werden.

Tabelle der Fundamentalintegrale.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \qquad \int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1};$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \log x;$$

$$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx; \qquad \int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx;$$

$$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx, \qquad \int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tang} ax) = \frac{a}{\cos^2 ax}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tang} ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotang} ax) = -\frac{a}{\sin^2 ax}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cotang} ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc}\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc}\sin\frac{x}{a};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc}\operatorname{tang} x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{x}{a};$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\log a, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

Viele Integrale, welche auf den ersten Blick eine abweichende Gestalt besitzen, ordnen sich gleichwohl der Tabelle ein. So nimmt die erste Formel, falls der Exponent n bez. m eine gebrochene Zahl ist, eine Gestalt an, die der Anfänger nicht sogleich wiedererkennt, sofern man die Potenz mit gebrochenem Exponenten als Wurzel schreibt. Es ist z. B.

$$\frac{1}{a\sqrt[3]{x}} \text{ nichts anderes als } \frac{1}{a}x^{-\frac{1}{3}};$$

das Integral:

$$\int \frac{dx}{a\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2a}$$

kommt demnach einfach auf das folgende hinaus:

$$\int \frac{1}{a} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}.$$

216. In einigen der folgenden Integrale sind gewisse **Substitutionen neuer Variabelen** zur Ausführung der Integration vorzunehmen. Der Lernende darf sich nicht entmutigt fühlen, wenn er nicht immer gleich einsehen kann, wie man gerade auf die angewendete Substitution gekommen ist. Die Auffindung derselben ist vielfach das Ergebnis einer längeren Anstrengung von Mathematikern gewesen, die einer früheren Forschungsperiode angehören. In der That werden wir denn auch vielfach so verfahren, daſs wir direkt an die in jedem Falle angegebene Antwort anknüpfen und deren Richtigkeit rückwärts durch Differentiation bestätigen.

Gerade hier bei der Erlernung der Fertigkeit im Differenzieren und Integrieren ist der Studierende, welcher den Unterricht eines Lehrers genieſst, in einer weit günstigeren Lage gegenüber demjenigen, welcher auf den Selbstunterricht an der Hand eines Buches angewiesen ist. Andrerseits hat natürlich auch wieder der Autodidakt seine Vorteile; was er lernt, das lernt er auch gründlich und vergiſst's nicht wieder. Wer durch ein Land zu Fuſse geht, hat seine Vorteile gegenüber dem, der es im Eisenbahnwagen durchfährt. Immerhin glaube ich im ganzen genommen, daſs, wenn einer das Zweiradfahren lernen will, es besser für ihn ist, wenn er einige Tage geführt wird; wer das Differenzieren und Integrieren lernen will, dem geht's in dieser Hinsicht ähnlich wie dem angehenden Radler.

Übungsaufgaben und Beispiele.

1) $y = x \log x, \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + \log x.$

2) $y = a\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}.$

3) $y = \log(\operatorname{tang} x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin 2x}.$

4) $y = \frac{1 - \operatorname{tang} x}{\sec x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -(\sin x + \cos x).$



5) $y = \log(\log x)$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$.

6) $x = e^{at} \cdot \sin bt$, $\qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{at} \sin(bt + c)$,

wobei $\operatorname{tang} c = \frac{b}{a}$ gilt. Wir haben hier im Ausdruck von $\frac{dx}{dt}$ dieselbe Vereinfachung vorgenommen, wie in Art. 116. Der Leser wolle sich erinnern, daſs nach S. 272 die Operation θ, welche die Differentiation $\frac{d}{dt}$ bedeutete, n Male auf $\sin bt$ angewandt, die Amplitude dieser Sinusfunktion mit b^n multipliziert und dem Winkel eine Voreilung von n Rechten verleiht. Hier sehen wir, daſs, wenn wir n Male die Operation θ auf die Funktion $e^{at} \sin bt$ ausüben, die Amplitude mit $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}$ multipliziert erscheint und eine Voreilung um den Winkel nc eintritt. Somit gelten die Formeln:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a^2 + b^2)\, e^{at} \sin(bt + 2c),$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}\, e^{at} \sin(bt + 3c),$$

. . . .

7) $p = 2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}$, $\qquad \frac{dp}{d\vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$.

8) $y = \log(e^z + e^{-z})$, $\qquad \frac{dy}{dz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

9) $y = \sqrt{x^3}$, $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

10) $y = ax^2 + bx + c$, $\qquad \frac{dy}{dx} = 2ax + b$.

11) $v = 2t^3$, $\qquad \frac{dv}{dt} = 6t^2$.

12) $p = c \cdot v^{-1{,}414}$, $\qquad \frac{dp}{dv} = -1{,}414\, c \cdot v^{-2{,}414}$.

13) $\int e^{av}\, dv = \frac{1}{a} e^{av}$.

14) $\int a v^{-1{,}414}\, dv = -\frac{a}{0{,}414} v^{-0{,}414}$.

15) $\int (at^2 + bt + c)\, dt = \frac{1}{3} at^3 + \frac{1}{2} bt^2 + ct + g$.

16) $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$.

17) $\int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\,dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2}t^{-2} = \frac{-1}{2t^2}$.

18) $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$.

19) $$\int \frac{dx}{m+nx^2} = \frac{1}{n}\int \frac{dx}{\frac{m}{n}+x^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}}}\text{ arc tang }\frac{x}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{mn}}\text{ arc tang }\left(x\sqrt{\frac{n}{m}}\right).$$

Man benutze bei diesem Beispiele das vorletzte unter den neun Fundamentalintegralen des Art. 215.

20) $\int \sqrt[3]{a+v}\,dv$. Setzt man $a+v=y$, so ist $dv=dy$, und man findet:
$$\int \sqrt[3]{a+v}\,dy = \int y^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}(a+v)^{\frac{4}{3}}.$$

21) $\int \frac{t^3\,dt}{(t+a)^m}$. Man substituiere $t+a=y$, $dt=dy$ und gewinnt:
$$\int \frac{(y-a)^3}{y^m}\,dy = \int \frac{y^3-3ay^2+3a^2y-a^3}{y^m}\,dy$$
$$= \int (y^{3-m}-3ay^{2-m}+3a^2y^{1-m}-a^3y^{-m})\,dy$$
$$= \frac{y^{4-m}}{4-m} - 3a\frac{y^{3-m}}{3-m} + 3a^2\frac{y^{2-m}}{2-m} - a^3\frac{y^{1-m}}{1-m}.$$

Hier hat man dann endlich noch $t+a$ für y einzutragen.

22) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}$. Hier setzt man $a+bx=y$, sodaſs $b\,dx=dy$ wird. Das vorgelegte Integral nimmt auf diese Weise die Gestalt an:
$$\frac{1}{b^2}\int \frac{y-a}{y^{\frac{1}{3}}}\,dy = \frac{1}{b^2}\left[\int y^{\frac{2}{3}}\,dy - \int ay^{-\frac{1}{3}}dy\right] = \frac{1}{b^2}\left(\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}ay^{\frac{2}{3}}\right)$$
$$= \frac{3}{b^2}\left[\frac{1}{5}(a+bx)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}a(a+bx)^{\frac{2}{3}}\right].$$

23) $\int \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = -\sqrt{a^2-t^2}$.

24) $\int \frac{dx}{x-a}$. Man setze $x-a=y$, $dx=dy$ und hat:
$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \log y = \log(x-a).$$

25) Da offenbar die Gleichung gilt:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

so hat man:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}[\log(x-a) - \log(x+a)] = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\log\left(\frac{x-a}{x-b}\right).$$

26) Läſst sich die ganze Funktion $x^2 + 2Ax + B$ in zwei reelle Faktoren ersten Grades zerlegen, so läſst sich

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2Ax + B}$$

direkt auf das eben zuletzt angegebene Integral zurückführen.

Sind aber jene Linearfaktoren nicht reell, so schreibe man:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2Ax + B} = \int \frac{dx}{x^2 + 2Ax + A^2 + B - A^2}$$

und substituiere $y = x + A$ und $a^2 = B - A^2$. Man gelangt auf diese Weise zu der Gleichung:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2Ax + B} = \int \frac{dy}{y^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\left(\frac{y}{a}\right).$$

27) $\int \text{tang}\, x\, dx = -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x}.$

Hier haben wir ein erstes Beispiel einer groſsen Klasse von Integralen, bei denen der Zähler gleich dem Differentialquotienten des Nenners, multipliziert mit dx, ist. Setzen wir in unserem Beispiele $y = \cos x$, so wird $dy = -\sin x\, dx$, sodaſs das Integral übergeht in:

$$-\int \frac{dy}{y} = -\log y = -\log(\cos x).$$

28) Schreibt man $f'(x)$ für den Differentialquotienten von $f(x)$, so würden wir entsprechend:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

finden können. Wir substituieren $f(x) = y$ und haben $dy = f'(x)\, dx$, sodaſs das Integral die Gestalt gewinnt:

$$\int \frac{dy}{y} = \log y = \log f(x).$$

So oft also im Zähler eines Integrals der mit dx multiplizierte Differentialquotient des Nenners steht, gewinnen wir als Wert des Integrals den natürlichen Logarithmus des Nenners.

29) $\int \frac{2bx\,dx}{a+bx^2} = \log(a+bx^2)$.

30) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{2bx\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log(a+bx^2)$.

31) Man reduziere das Integral:

$$\int \frac{(m+nx)\,dx}{a+bx+cx^2}$$

auf eine einfachere Gestalt. Wäre der Zähler gleich $(b+2cx)\,dx$, so würde sich das Integral der Regel der Nr. 28 direkt unterordnen. Nun kann man aber den Zähler in die folgende Gestalt setzen:

$$\frac{n}{2c}(2cx+b) + m - \frac{nb}{2c},$$

sodafs wir unser Integral so entwickeln können:

$$\frac{n}{2c}\int \frac{2cx+b}{a+bx+cx^2}\,dx + \left(m - \frac{nb}{2c}\right)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$
$$= \frac{n}{2c}\log(a+bx+cx^2) + \left(m - \frac{nb}{2c}\right)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Das hier noch übrig bleibende Integral ist bereits in Beispiel 26 behandelt.

32) $\int \frac{x+b}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{a^2+x^2} + \int \frac{b\,dx}{a^2+x^2}$
$$= \frac{1}{2}\log(a^2+x^2) + \frac{b}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right).$$

33) $\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{-b\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\log(a+b\cos x)$.

34) $\int \frac{dx}{x\log x}$. Man schreibe hier $y = \log x$, $dy = \frac{1}{x}dx$; auf die Art ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{dy}{y} = \log y = \log(\log x).$$

In Ausdrücken, welche x^m und $(a+bx)^n$ enthalten, versuche man durch Ausführung einer der Substitutionen $y = a+bx$ oder $y = \frac{a}{x}+b$ die Integration zu ermöglichen.

35) So findet man:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$$

36) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right].$

37) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$

38) Die Gleichung:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma}\cdot\frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}$$

stellt eine **Rekursionsformel** für die Berechnung des links stehenden Integrals dar.

Kommt $\sqrt{a+bx}$ unter dem Integralzeichen vor, so führt die Substitution $y^2 = a+bx$ zum Ziele.

39) Auf diese Weise findet man:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}.$$

40) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{1+\log x}\,dx = \tfrac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}.$

Man verwende hier die Substitution $y = 1 + \log x$.

41) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \text{arc tang}\,(e^x).$

Hier ist zu setzen $y = e^x$.

217. Partielle Integration. Sind u und v Funktionen von x, so gilt bekanntlich (cf. Art. 196):

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Multipliziert man rechts und links mit dx und integriert, so folgt:

$$uv = \int u\cdot dv + \int v\cdot du.$$

Wir geben dieser Gleichung die Gestalt:

(1) $$\boldsymbol{\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du,}$$

können aber statt (1) auch ausführlicher schreiben:

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx.$$

Vermittelst dieser Formel können wir das Integral $\int u \cdot dv$ umsetzen in $\int v \cdot du$.

42) Man bestimme nach dieser Regel $\int x^n \log x \, dx$. Zu diesem Zwecke setze man $u = \log x$ und $\frac{dv}{dx} = x^n$, sodafs $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ wird. Die Gleichung (1) liefert für das vorgelegte Integral:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right).$$

43) $\boldsymbol{\int x \cdot e^{ax} dx}$.

Hier wähle man $u = x$, $\frac{dv}{dx} = e^{ax}$, sodafs $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ wird. Gleichung (1) ergiebt uns:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right).$$

44) $\boldsymbol{\int e^{ax} \sin bx \, dx}$.

Man brauche als Abkürzung für dieses Integral die Bezeichnung A. Man schreibe alsdann $u = \sin bx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ und findet aus (1):

$$A = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} B.$$

Das hier abgekürzt durch B bezeichnete Integral

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx$$

wird in analoger Weise umgewandelt. Wir setzen nämlich $u = \cos bx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ und haben alsdann:

$$B = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} A.$$

Tragen wir diesen Ausdruck von B in die obige Gleichung ein, so folgt:

$$A = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} A\right).$$

Hieraus berechnet sich A in folgender Gestalt:

$$A = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

In entsprechender Weise findet man:

$$B = \int \boldsymbol{e^{ax} \cos bx \, dx} = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

218. In vielen Fällen liefert uns die Methode der partiellen Integration **Rekursionsformeln**, mit deren Hilfe wir ein vorgelegtes Integral Schritt für Schritt reduzieren können, um schliefslich auf ein schon bekanntes Integral zurückzukommen.

Eine Rekursionsformel dieser Art ist z. B.:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$$

Haben wir somit $x^4 e^{ax}\,dx$ zu integrieren, so kommen wir vermöge dieser Formel auf das Integral von $x^3 e^{ax}\,dx$ zurück, durch eine nochmalige Anwendung eben dieser Formel auf das Integral von $x^2 e^{ax}\,dx$ u. s. w., und wir gelangen schliefslich zum Integral von

$$x^0 e^{ax}\,dx = e^{ax}\,dx,$$

welches bekannt ist.

Auf diese Weise ergiebt sich z. B.

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x\,dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\,dx \\ &= x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx\right) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(x e^x - \int e^x\,dx\right) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,e^x.\end{aligned}$$

Vermischte Übungsaufgaben.

45) $y = a \sin^2 bx$, $\quad \frac{dy}{dx} = ab \sin 2bx.$

46) $y = b \sin(ax^n)$, $\quad \frac{dy}{dx} = b\,n\,a\,x^{n-1} \cos(ax^n).$

47) $y = (a + bx^n)^m$, $\quad \frac{dy}{dx} = n\,bx^{n-1} m\,(a + bx^n)^{m-1}.$

48) $y = (a + bx)e^{cx}$, $\quad \frac{dy}{dx} = e^{cx}(b + ac + bcx).$

49) $y = a^x$, $\quad \frac{dy}{dx} = a^x \log a.$

50) $y = {}^a\!\log x$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$

51) $v = \frac{a - t}{t}$, $\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{a}{t^2}.$

52) $v = \sqrt{a^2 - t^2}$, $\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$

53) $u = \frac{v^3}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{du}{dv} = \frac{3v^2}{(1 - v^2)^{\frac{5}{2}}}$.

54) $v = \frac{\sqrt{a + t}}{\sqrt{a} + \sqrt{t}}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{t} - \sqrt{a})}{2\sqrt{t}\,\sqrt{a + t}\,(\sqrt{a} + \sqrt{t})^2}$.

55) $w = \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}$, $\frac{dw}{dy} = \frac{1}{(1 - y)\sqrt{1 - y^2}}$.

56) $y = \text{arc tang}\, \frac{2x}{1 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$.

57) $y = \log \sin x$, $\frac{dy}{dx} = \text{cotang}\, x$.

58) $u = \log \sqrt{a^2 - t^2}$, $\frac{du}{dt} = -\frac{t}{a^2 - t^2}$.

59) $y = \log \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sin t}$.

60) $y = \text{arc sin}\, \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$, $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{1 + v^2}$.

61) $y = \text{arc tang}\, \frac{\sqrt{1 + t^2} + \sqrt{1 - t^2}}{\sqrt{1 + t^2} - \sqrt{1 - t^2}}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1 - t^4}}$.

62) $x = \text{arc sec}\, t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}$.

63) $y = \sin \log v$, $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v} \cos \log v$.

64) $v = \text{arc sin}\, \frac{1 - p^2}{1 + p^2}$, $\frac{dv}{dp} = \frac{-2}{1 + p^2}$.

65) $y = \frac{1 + x}{1 + x^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}$.

66) $p = \log \text{cotang}\, v$, $\frac{dp}{dv} = -\frac{2}{\sin 2v}$.

67) $s = e^t(1 - t^3)$, $\frac{ds}{dt} = e^t(1 - 3t^2 - t^3)$.

68) $p = \frac{v^n}{(1 + v)^n}$, $\frac{dp}{dv} = \frac{nv^{n-1}}{(1 + v)^{n+1}}$.

69) $x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$.

70) $p = \frac{\vartheta}{e^\vartheta - 1}$, $\frac{dp}{d\theta} = \frac{e^\vartheta(1 - \vartheta) - 1}{(e^\vartheta - 1)^2}$.

71) Ist $x = \text{tang}\, \vartheta + \sec \vartheta$, so gilt $\frac{d^2x}{d\vartheta^2} = \frac{\cos \vartheta}{(1 - \sin \vartheta)^2}$.

72) Ist $x = \vartheta^2 \log \vartheta$, so gilt $\frac{d^3 x}{d \vartheta^3} = \frac{2}{\vartheta}$.

73) Ist $y = e^{-x} \cos x$, so gilt $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0$.

74) Ist $y = \frac{x^3}{1-x}$, so gilt $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{24}{(1-x)^5}$.

75) $\int x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$.

I. Ist $\frac{p}{q}$ gleich einer positiven ganzen Zahl k, so entwickele man $(a + bx^n)^k$ nach dem binomischen Lehrsatze, multipliziere die einzelnen Glieder mit $x^{m-1} dx$ und integriere gliedweise.

II. Geht q nicht in p auf, so benutze man die Substitution $a + bx^n = y^q$.

III. Führt diese Substitution nicht zum Ziele, so mag man es mit $ax^{-n} + b = y^q$ versuchen.

76) $\int x^2 (a + x)^{\frac{1}{2}} dx$. Hier setze man $a + x = y^2$ und hat

$$dx = 2y\, dy \quad \text{und} \quad x = y^2 - a,$$

sodafs man gewinnt:

$$2\int (y^4 - 2ay^2 + a^2)\, y^2\, dy = 2\int (y^6 - 2ay^4 + a^2 y^2)\, dy.$$

Letzteres Integral ist leicht zu berechnen.

77) $\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Man substituiere:

$$x^{-2} + 1 = y^2, \quad \frac{1}{y^2 - 1} = x^2, \quad -2x^{-3} dx = 2y\, dy.$$

Das vorgelegte Integral liefert dann:

$$\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\int dy = -y = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

78) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Wir setzen $a^2 x^{-2} + 1 = t^2$ und finden:

$$-\frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a^2 t} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

79) Ist $x = A \sin nt + B \cos nt$, so zeige man die Relation:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = 0.$$

80) Ist $u = xy$, so beweise man die Richtigkeit der Gleichung:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x \frac{d^n y}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

81) Ist u eine Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y (cf. Art. 83), so zeige man die Gültigkeit der Regel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

bei folgenden Funktionen:

$$u = \text{arc tang}\, \frac{x}{y}, \quad u = \sin(a x^n + b y^n), \quad u = \sin(x^2 y),$$

$$u = x \sin y + y \sin x, \quad u = b x^2 \log a y, \quad u = \log \text{tang}\, \frac{y}{x},$$

$$u = \frac{a y^2 - b x}{b y - a x^2}, \quad u = x y \log(1 + x^2 y^2), \quad u = \frac{x^2 y}{a^2 - y^2}.$$

82) $y = e^{ax} \sin^m bx, \quad \frac{dy}{dx} = e^{ax} \sin^{m-1} bx\, (a \sin bx + mb \cos bx).$

83) $x = e^{-at} \cos bt, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{-at} \cos(bt - n\vartheta),$ wobei $\text{tang}\, \vartheta = \frac{b}{a}$ gilt.

84) $y = x^4 \log x, \quad \frac{d^6 y}{dx^6} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^2}.$

85) $y = \log \sin x, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$

86) Die Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y:

$$v = A_1 x^{a_1} y^{b_1} + A_2 x^{a_2} y^{b_2} + A_3 x^{a_3} y^{b_3} + \cdots,$$

in welcher $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = \cdots = n$ ist, wird als eine homogene Funktion n^{ter} Dimension von x und y bezeichnet. Man zeige die Gültigkeit der Formel:

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = n v.$$

Auch für die folgenden Funktionen:

$$v = \frac{x y}{x + y} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{x^2 + y^2},$$

welche gleichfalls homogen und zwar von den Dimensionen 1 bez. $\frac{2}{3}$ sind, bestätige man diese Regel.

87) Setzt man allgemein:

$$u = f(y + ax) + F(y - ax),$$

wo f und F willkürliche Funktionen sind, so gilt für die partiellen Differentialquotienten von u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

88) Für die Funktion $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ zeige man das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

89) Man zeige, dafs die Funktion $s = ae^{-\alpha t} \sin \beta t$ einer Differentialgleichung von der Gestalt:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2f\frac{ds}{dt} + n^2 s = 0$$

genügt, und bestimme hierbei f und n^2 in α und β oder auch umgekehrt α und β in f und n^2.

90) Man stelle die Bedingung für α auf, welche ausdrückt, dafs $y = e^{\alpha x}$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + A\frac{d^3 y}{dx^3} + B\frac{d^2 y}{dx^2} + C\frac{dy}{dx} + Dy = 0$$

befriedigt. Als numerisches Beispiel benutze man:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

und bestimme die Lösungen y derselben. Man findet als allgemeine Lösung:

$$y = ae^x + be^{-x} + ce^{2x} + d,$$

wo a, b, c, d willkürliche Konstanten sind.

219. Wir wollen uns nun mit der Integration einer beliebigen gebrochenen rationalen Funktion:

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots} \tag{1}$$

beschäftigen, wobei m und n ganze positive Zahlen sind.

Ist m gröfser oder gleich n, so dividiere man mit dem Nenner in den Zähler; man gewinnt dabei einen Quotienten und einen Rest. Der Quotient, welcher die Gestalt einer ganzen Funktion von x hat, läfst sich unmittelbar integrieren; der Rest hat wieder die Gestalt (1), wobei aber jetzt $m < n$ zutrifft.

Es ist nun immer möglich, den Nenner im Ausdruck (1) in seine Linearfaktoren zu zerlegen und daraufhin den Quotienten (1) in Partialbrüche zu spalten. Dabei entspricht einem einzelnen nur einmal auftretenden Faktor $(x - \alpha)$ des Nenners ein Partialbruch $\frac{A}{x - \alpha}$. Dem Produkte zweier konjugiert imaginärer Faktoren $(x^2 + \alpha x + \beta)$



gehört ein Partialbruch der Gestalt $\frac{Ax + B}{x^2 + \alpha x + \beta}$ zu. Kommt aber ein Faktor $(x - \alpha)$ mehrfach, sagen wir l Male vor, so haben wir entsprechend die Partialbrüche:

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)^l} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{l-1}} + \cdots + \frac{A_l}{x - \alpha}.$$

Handelt es sich also z. B. um einen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, dessen Nenner sich in die Faktoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x^2 + ax + b$, $(x - c)^l$ spalten läfst, so gilt für die Partialbruchzerlegung der Ansatz:

$$(2)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{Cx + D}{x^2 + ax + b} + \frac{E}{(x - c)^l} + \frac{G}{(x - c)^{l-1}} + \cdots.$$

Zur Bestimmung der Konstanten $A, B, C, D, \ldots$ multipliziere man die Gleichung (2) rechts und links mit $F(x)$, wobei sich rechter Hand in jedem Gliede der Nenner, der ja als Faktor in $F(x)$ enthalten ist, fortheben läfst. Das weitere Verfahren kann man dann auf verschiedene Weisen regeln und die Untersuchung durch geschickte Kunstgriffe stark kürzen.

Man beachte z. B., dafs die eben durch Multiplikation der Relation (2) mit $F(x)$ hergestellte Gleichung in x *identisch* besteht, d. h. für jeden Wert von x gültig ist. Dabei zeigt sich, dafs, wenn man $x = \alpha$ oder $x = \beta$ setzt, sehr einfache Regeln zur Bestimmung von A und B gewonnen werden können. Etwas umständlicher ist es, C und D vermöge derjenigen Werte x zu bestimmen, für welche $x^2 + ax + b = 0$ gilt. Endlich würden wir die Bestimmung von $E, G, \ldots$ auf dem entsprechenden Wege erst unter Zuhilfenahme eines Differentiationsprozesses erreichen können.

Wir führen diese in ihrer Allgemeinheit doch etwas schwer verständliche Erörterung hier nicht weiter aus; im Einzelfalle wird der Leser die Partialbruchzerlegungen ohne besondere Mühe erledigen können. Ist letzteres aber erreicht, so macht es keinerlei Mühe mehr, unsere Funktion in der neuen Gestalt gliedweise zu integrieren.

91) $\frac{x^2}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$

Hier wird in x identisch bestehen:

$$x^2 = A(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2.$$

Setzt man jetzt $x^2 + 1 = 0$, so folgt ohne Schwierigkeit $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$. Schreibt man $x = 1$, so folgt $A = \frac{1}{2}$. Um B zu finden,

setze man $x = 0$ ein und erhält $B = A = \frac{1}{2}$. Wir haben daraufhin den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$$

zu integrieren und erhalten als Antwort:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1).$$

Enthält die Nennerfunktion $F(x)$ zwei konjugiert imaginäre Linearfaktoren je r-fach, so werden wir, wenn das Produkt dieser Linearfaktoren $x^2 + \alpha x + \beta$ ist, entsprechend r Partialbrüche ansetzen:

$$\frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^r} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{r-1}} + \cdots.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dafs die Konstanten $C_1, D_1, C_2, \ldots$ hierbei eindeutig bestimmt sind. Übrigens hat man in praxi selten mit so komplizierten Fällen zu thun.

92) Man integriere:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+3)(x-2)}.$$

Wir haben hier die Partialbruchzerlegung anzusetzen:

$$\frac{M}{x} + \frac{N}{x+3} + \frac{P}{x-2},$$

sodafs die identische Gleichung besteht:

$$x^2 + x - 1 = M(x+3)(x-2) + Nx(x-2) + Px(x+3).$$

Da dieselbe für alle Werte von x gültig ist, so darf man auch $x = 0$ setzen und aus der entspringenden Gleichung den Wert M bestimmen. Entsprechend ergiebt sich für $x = -3$ der Wert N und für $x = 2$ der Wert P. Auf diese Weise finden wir als Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion:

$$\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2};$$

die Integration führt auf:

$$\frac{1}{6}\log x + \frac{1}{3}\log(x+3) + \frac{1}{2}\log(x-2).$$

93) $$\int \frac{5x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \left(5x + 15 + \frac{35x - 29}{x^2 - 3x + 2}\right) dx$$
$$= \int \left(5x + 15 - \frac{6}{x-1} + \frac{41}{x-2}\right) dx$$
$$= \frac{5x^2}{2} + 15x - 6\log(x-1) + 41\log(x-2).$$

94) $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-7x-6} = \int \left(x^2+7+\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{32}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{243}{20}\frac{1}{x-3}\right)dx.$

95) $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x + \frac{1}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log(1+x).$

96) $\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{(x-3)^2} + \frac{B_2}{x-3}.$

Hierbei bestimmen sich die Partialzähler zu:

$$A = -8, \quad B_1 = -5, \quad B_2 = 17,$$

sodafs das Integral der vorgelegten Funktion das folgende ist:

$$-8\log(x+1) + \frac{5}{x-3} + 17\log(x-3).$$

97) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{-1}{4}\log(x+3) + \frac{1}{4}\log(x-1).$

98) $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{2}.$

99) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x} = -\frac{3}{2}\log x + \frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log(x+2).$

100) $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12} = \frac{\sqrt{3}}{7}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{7}\log\frac{x-2}{x+2}.$

101) $\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x^2}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x.$

102) $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x-3} = \frac{3}{4}\log(x+3) + \frac{1}{4}\log(x-1).$

103) $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+6x+8} = \frac{x^2}{2} - 6x + 32\log(x+4) - 4\log(x+2).$

104) $\int \frac{x\,dx}{x^2-x-2} = \frac{2}{3}\log(x-2) + \frac{1}{3}\log(x+1).$

105) $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{5}\log(x-3) + \frac{3}{5}\log(x+2).$

106) $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\log\frac{x+2}{x+4}.$

107) $\int \frac{(2x-5)\,dx}{(x+3)(x+1)^2} = -\frac{7}{2(x+1)} + \frac{11}{4}\log\frac{x+1}{x+3}.$

108) $\int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

109) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x+3}$.

110) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 12} = \frac{1}{7} \log \frac{x-3}{x+4}$.

111) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \text{arc tang } (x + 2)$.

112) $\int \frac{dx}{1 - 2x + 2x^2} = \text{arc tang } (2x - 1)$.

220. Maxima und Minima. Um die gröfsten und kleinsten Werte einer Funktion $f(x)$ zu untersuchen, zeichnen wir uns zur näheren Veranschaulichung der Überlegung die Kurve $y = f(x)$, sowie auch die Kurve der zugehörigen Funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Es gelten alsdann folgende Regeln: Wird y, d. h. die ursprüngliche Funktion, zu einem Maximum, so ist in der Regel $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist *negativ*; bei einem Minimum von y ist aber für gewöhnlich $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ *positiv*. Kann man bei einer praktischen Aufgabe nicht direkt die Maxima und Minima bestimmen, so wird man hiernach $\frac{dy}{dx}$ bez. die zu dieser Funktion gehörende Kurve untersuchen.

Wenn wir sagen, die Funktion y werde für einen gewissen Wert von x zu einem Maximum, so meinen wir, dafs die *unmittelbar* voraufgehenden und folgenden Funktionswerte kleiner seien. Es können aber für entfernte Werte x noch weit gröfsere Funktionswerte y eintreten. Bei dieser Auffassung kann eine Funktion sehr viele Maxima und Minima haben; die zugehörige Kurve verläuft dann wellenförmig. Ist $\frac{dy}{dx}$ an einer bestimmten Stelle gleich 0 und gilt daselbst auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so kann es vorkommen, dafs weder ein Maximum noch ein Minimum vorliegt, die Funktion y hört dann für einen Augenblick auf zu wachsen, um jedoch hernach weiter zu wachsen, wie dies z. B. bei der in Fig. 6 S. 23 gezeichneten Kurve an der Stelle M zutrifft.

1. Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion $\frac{x}{x^2 + 1}$. Dieselben finden bei $x = 1$ und -1 statt und haben die Beträge $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

2. Welches ist der gröfste Wert der Funktion $\frac{x}{(a^2 + x)(b^2 + x)}$?

Antwort: $\frac{1}{(a + b)^2}$.

3. Man zeige, dafs $a \sec \vartheta + b \operatorname{cosec} \vartheta$ zu einem Minimum wird, falls $\operatorname{tang} \vartheta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ist.

4. Für welchen Wert von x wird $\frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$ zu einem Maximum?

Antwort: Für $x = \frac{12}{5}$.

5. Wann wird $x^m(a - x)^n$ maximal oder minimal?

Antwort: Für $x = \frac{ma}{m + n}$ findet ein Maximum statt.

6. Der Winkel γ eines Dreiecks sei gegeben. Man zeige, dafs $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$ ein Maximum und $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$ ein Minimum wird, falls $\alpha = \beta$ zutrifft.

7. $y = a \sin x + b \cos x$. Welches sind die gröfsten und kleinsten Werte von y?

Antwort: Der gröfste Wert ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ und der kleinste $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Man bestimme den kleinsten Wert von $a \operatorname{tang} \vartheta + b \operatorname{cotang} \vartheta$.

Antwort: $2\sqrt{ab}$.

9. Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$\frac{x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 10}.$$

Antwort: Das Maximum ist 2, das Minimum $\frac{5}{6}$.

Der Leser wolle sich die zur letzteren Funktion gehörende Kurve im Quadratnetz zeichnen.

10. Man bestimme die Maxima und Minima von

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}.$$

Antwort: Bei $x = 0$ findet ein Maximum, bei $x = 2$ ein Minimum statt.

11. Man bestimme die Werte von x, für welche die Funktion $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ zu einem Maximum oder Minimum wird.

Antwort: $x = 4$ liefert ein Maximum, $x = 16$ ein Minimum.

12. Für welchen Wert c wird die Gröfse $v = \frac{1}{c} \log c$ zu einem Maximum?

Antwort: Für $c = e = 2{,}71828 \cdots$.

13. Ist $p = \frac{(a + t)(b + t)}{t}$, so liefert $t = \sqrt{ab}$ ein Minimum von p.



14. Die Gröſse $x = \frac{\sin^3 \vartheta}{1 - \cos \vartheta}$ wird für $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ zu einem Maximum.

15. Für welchen Wert von c wird v zu einem Minimum, falls

$$v = \frac{2}{1 + c - c^2}$$

gilt?

Antwort: Für $c = \frac{1}{2}$.

16. Bei welchem x wird $4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ am gröſsten oder am kleinsten?

Antwort: $x = \frac{1}{2}$ liefert ein Maximum, $x = 2$ ein Minimum.

17. $\operatorname{tang}^m x \cdot \operatorname{tang}^n (a - x)$ wird zu einem Maximum, falls

$$\operatorname{tang}(a - 2x) = \frac{n - m}{n + m} \operatorname{tang} a$$

gilt.

18. $s = \frac{3t}{9 + t^2}$ wird für $t = 3$ maximal, für $t = -3$ minimal.

19. Von einem Dreieck ist ein Winkel und der Inhalt gegeben. Welche Gestalt muſs das Dreieck haben, wenn die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite möglichst klein werden soll?

20. Die Charakteristik einer **Seriendynamo** lautet:

(1) $$E = \frac{aC}{1 + sC}.$$

Darin ist der Wert a proportional mit der Winkelgeschwindigkeit des Ankers, und auſserdem sind a und s bedingt durch die Gröſse des Eisengestelles, die Anzahl der Windungen und andere Konstruktionsdaten der Maschine; E bedeutet die elektromotorische Kraft des Ankers in Volt, C ist die Stromstärke in Ampère.

Ist nun r der innere Widerstand der Maschine in Ohm und R der jeweilige äuſsere Widerstand, so hat der Strom die Gröſse:

(2) $$C = \frac{E}{r + R},$$

und die von der Maschine abgegebene Leistung ist:

(3) $$P = C^2 R.$$

Bei welchem Werte von R wird nun P ein Maximum?

Die Kombination von (2) und (1) ergiebt:

$$\frac{aC}{1 + sC} \cdot \frac{1}{r + R} = C,$$

also:

$$1 + sC = \frac{a}{r+R}, \qquad C = \frac{1}{s}\left(\frac{a}{r+R} - 1\right),$$
$$P = \frac{R}{s^2}\left(\frac{a}{r+R} - 1\right)^2.$$

Setzen wir nun $\frac{dP}{dR} = 0$, so erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{r+R} - 1\right)^2 + 2R\left(\frac{a}{r+R} - 1\right)\left(-\frac{a}{(r+R)^2}\right) = 0.$$

Wir lassen die Möglichkeit: $\frac{a}{r+R} - 1 = 0$ unbeachtet, weil sie $C = 0$ ergeben würde, und behalten also nur noch den Fall übrig, daſs:

$$\frac{a}{r+R} - 1 = \frac{2Ra}{(r+R)^2}$$

ist; daraus können wir R finden, wenn r und a gegeben sind. Man setze z. B. $a = 1{,}2$, $s = 0{,}03$, $r = 0{,}05$ und veranschauliche die zwischen R und P gefundene Beziehung durch eine Kurve.

21. Ein Bote befinde sich auf einer Insel gegenüber einer geradlinigen Küste, in 6 km Entfernung vom nächsten Punkte des Festlandes. Er hat eine Besorgung auszurichten nach einem am Ufer, und zwar 15 km vom nächsten Punkte des Ufers, gelegenen Orte. Längs des Ufers läuft ein Fuſspfad. Beim Rudern legt der Bote 4 km, beim Wandern 6 km pro Stunde zurück. Es ist die Frage, an welcher Stelle er landen muſs, um in kürzester Zeit an seinen Bestimmungsort zu kommen. Natürlich wird angenommen, daſs er überall gleich gut landen kann.

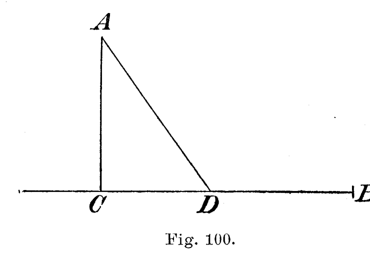


Fig. 100.

Figur 100 erläutert diese Verhältnisse; hier ist $\overline{AC} = 6$, $\overline{CB} = 15$. Wir nehmen an, daſs der Bote bei D lande, und setzen $\overline{CD} = x$. Dann ist $\overline{AD} = \sqrt{36 + x^2}$ und $\overline{DB} = 15 - x$.

Die nötige Zeit ist dann insgesamt gleich:

$$\frac{\sqrt{36+x^2}}{4} + \frac{15-x}{6}$$

Stunden. Dieselbe wird am kleinsten, falls $\frac{1}{4}x(36+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$ zutrifft. Die letzte Gleichung liefert aber

$$\tfrac{36}{16}x^2 = 36 + x^2 \quad \text{oder} \quad x = 5{,}37 \text{ km}.$$

22.*) Für das Produkt aus der Kerzenstärke c einer bestimmten Glühlampenart und ihrer durchschnittlichen Lebensdauer l in Stunden ergab sich durch experimentelle Untersuchungen die folgende Beziehung:

$$lc = 10^{11,697 - 0,07545\,v};$$

darin bedeutet v die Betriebsspannung der Lampe in Volt. Für den Wattverbrauch w pro Kerze wurde gefunden:

$$w = 3,7 + 10^{8,007 - 0,07667\,v}.$$

Der Preis einer Lampe sei 0,50 Mark und die Lampen mögen 560 Stunden im Jahre brennen. Wenn nun eine elektrische Pferdestärke (oder 736 Watt) für diese 560 Stunden im Jahre 250 Mark kostet, so soll derjenige Wert für v gefunden werden, welcher für diesen Fall am günstigsten ist. Die gesamten Kosten für Lampen und Arbeitsleistung sollen also ein Minimum werden.

$\frac{560}{l}$ Lampen werden im Jahre verbraucht, von denen jede 0,5 Mark kostet. Die Kosten für Lampenersatz betragen also $\frac{280}{l}$ Mark pro Jahr für c Kerzen, oder $\frac{280}{lc}$ Mark pro Jahr und Kerze. Nun ist eine Mark pro Jahr gleichwertig mit $\frac{736}{250}$ Watt, sodaſs die Kosten für Glühlampenersatz pro Kerze also gleichwertig mit $\frac{280}{lc} \cdot \frac{736}{250}$ Watt werden. Diesen Betrag müssen wir zu w addieren, um die gesamten Betriebsunkosten in Watt zu erhalten.

Wir setzen lc und w als Funktionen von v ein und müssen also untersuchen, bei welchem Werte von v der Ausdruck:

$$\frac{280 \cdot 736}{250} \cdot 10^{-11,697 + 0,07545\,v} + 3,7 + 10^{8,007 - 0,07667\,v}$$

ein Minimum wird.

Antwort: Bei $v = 111$ Volt.

221. Manchmal nimmt eine vorgelegte Funktion für einen speziellen Wert von x eine **unbestimmte Gestalt** an.

*) Dieses Beispiel, welches allerdings nur einen akademischen Wert besitzt, ist gleichwohl hier eingereiht, weil es recht instruktiv ist. Bei einer wirklichen elektrischen Anlage wird es freilich kaum vorkommen, daſs man die Spannung nach dem Gesichtspunkt festlegt, der hier in den Vordergrund gerückt ist.

So fanden wir, um ein Beispiel auszuführen, in Art. 43 als Inhalt der durch die Kurve $y = mx^{-n}$, durch die x-Axe und durch die zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten eingegrenzten Fläche:

$$\int_a^b mx^{-n}\,dx = \frac{m}{1-n}(b^{1-n} - a^{1-n}).$$

Nimmt man hier $n = 1$, so stellt sich die rechte Seite der letzten Gleichung in der Form $\frac{m}{1-1}(1-1)$ oder $\frac{0}{0}$ dar. Das ist aber offenbar eine zunächst ganz unbestimmte Gestalt.

Ist nun allgemein $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$, wo $f(a) = 0$ und $F(a) = 0$ zugleich zutrifft, zu berechnen, so gehen wir folgendermaſsen vor. Wir greifen zunächst einen Wert von x dicht bei a auf, indem wir setzen $x = a + \Delta x$, um sodann den Grenzwert unseres Quotienten $\frac{f(x)}{F(x)}$ für unendlich abnehmendes Δx zu bestimmen. Nun gilt aber*) für sehr kleines Δx näherungsweise:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x,$$

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx}\Delta x,$$

und zwar um so genauer, je kleiner Δx ist. Setzt man hier $x = a$ ein, so werden die ersten Glieder rechter Hand gleich Null, und man bekommt, je kleiner Δx ist, um so genauer:

$$\frac{f(a + \Delta x)}{F(a + \Delta x)} = \frac{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)},$$

wo rechts nach Berechnung der Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist. Hieraus entspringt zur Berechnung des wahren Wertes unserer Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ bei $x = a$ folgende Regel: Man differenziere Zähler und Nenner einzeln und setze in den Quotienten der Differentialquotienten $x = a$ ein; der entstehende Wert ist der gesuchte Funktionswert an der kritischen Stelle $x = a$. Gelangt man aber im letzteren Falle wieder zu einem Ausdrucke $\frac{0}{0}$, so ist die gleiche Regel nochmals anzuwenden.

---

*) Man vergl. die Gleichung (1) am Ende des Art. 21 S. 33.

Beispiele. 1. Man berechne den Wert von $\frac{\log x}{x-1}$ für $x = 1$. Setzt man zunächst $x = 1$ ein, so kleidet sich die Funktion in der That in die Gestalt $\frac{0}{0}$. Das vorgeschriebene Verfahren führt nach Ausübung der Differentiationen auf $\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}\cdot$ Setzt man aber hier $x = 1$ ein, so folgt 1 als der gesuchte wahre Wert.

2. Man bestimme $\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ für $x = c$.

Die Einsetzung von c liefert $\frac{0}{0}$. Der Differentiationsprozefs ergiebt $\frac{2ax - 2ac}{2bx - 2bc}$, und auch dieser Quotient nimmt für $x = c$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ an. Die erneute Anwendung der Vorschrift aber führt auf den wahren Wert $\frac{a}{b}\cdot$ Dieses Ergebnis wird der Leser leicht durch direkte Betrachtung der vorgelegten Funktion bestätigen.

3. Man berechne $\frac{x-1}{x^n - 1}$ für $x = 1$. Antwort: $\frac{1}{n}\cdot$

4. Man bestimme $\frac{a^x - b^x}{x}$ für $x = 0$. Antwort: $\log\left(\frac{a}{b}\right)\cdot$

5. Man führe jetzt das oben zuerst erwähnte Beispiel durch. Es handelte sich um den Flächeninhalt:

$$J = \frac{m}{1-n}\left(b^{1-n} - a^{1-n}\right).$$

Unter der Annahme konstanter Werte m, a, b ist der Wert von J für $n = 1$ zu bestimmen. Wir schreiben

$$m\,\frac{b^{1-n} - a^{1-n}}{1-n}$$

und differenzieren Zähler und Nenner einzeln *in Bezug auf n*. Da:

$$\frac{d\left(b^{1-n}\right)}{dn} = b^{1-n}\cdot\log b\cdot(-1)$$

ist, so werden wir geführt auf:

$$m\,\frac{b^{1-n}\log b - a^{1-n}\log a}{1}.$$

Setzen wir aber hier $n = 1$ ein, so folgt:

$$m(\log b - \log a) = m\log\left(\frac{b}{a}\right)\cdot$$

Zu der gleichen Antwort werden wir geführt, wenn wir unser Integral $\int x^{-1}\,dx$ nicht im Anschlufs an:

$$\int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

berechnen, sondern uns direkt des Fundamentalintegrals:

$$\int x^{-1}\,dx = \log x$$

erinnern.

222. Polarkoordinaten. Statt die Lage eines Punktes P durch seine rechtwinkligen Koordinaten x, y anzugeben (cf. Figur 101), kann man denselben auch durch seinen Abstand $\overline{OP}$ von O (den wir durch r bezeichnen und *Radiusvektor* nennen wollen) und den Winkel $\sphericalangle POQ$, der ϑ heifse, festlegen. Man nennt r und ϑ die *Polarkoordinaten* des Punktes P; zu den rechtwinkligen Koordinaten x, y stehen sie in der Beziehung, dafs die Abscisse x gleich $r\cos\vartheta$, die Ordinate y gleich $r\sin\vartheta$:

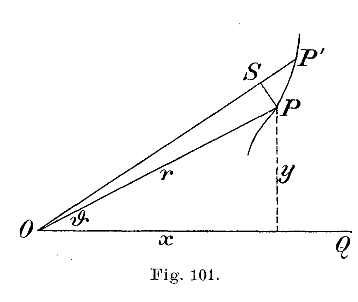


Fig. 101.

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

ist. Die Gleichungen mancher Kurven, z. B. der Spiralen, werden in Polarkoordinaten einfacher als in rechtwinkligen Koordinaten.

Auf einer vorgelegten Kurve (cf. Fig. 101) mögen nun zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte durch P und P' bezeichnet sein; die Koordinaten von P sollen r, ϑ heifsen, diejenigen von P' entsprechend $r + dr$, $\vartheta + d\vartheta$. In der Figur würde alsdann PSP' ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck versinnlichen, in welchem $\overline{PS} = r\,d\vartheta$ und $\overline{SP'} = dr$ sein wird. Man findet weiter $\overline{PP'}$ oder $ds = \sqrt{r^2(d\vartheta)^2 + (dr)^2}$, und also:

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}.$$

Der unendlich schmale Flächenstreifen POP' ist gleich $\frac{1}{2}r^2 d\vartheta$, und die Fläche, welche von den zu ϑ_1 und ϑ_2 gehörenden Radienvektoren und dem zwischenliegenden Kurvenstücke eingegrenzt ist, wird sich demzufolge in der Gestalt $\frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2\,d\vartheta$ darstellen. Wissen wir, in welcher Weise längs unserer Kurve r von ϑ abhängt, so können wir durch Ausführung des eben angegebenen Integrals die Bestimmung des Flächeninhaltes erledigen.

Der Winkel φ zwischen der Kurventangente im Punkte P und dem Radiusvektor r wird offenbar die Gleichung tang $\varphi = \overline{PS} : \overline{P'S}$ befriedigen; man hat also die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = r \frac{d\vartheta}{dr}.$$

Die hier mitgeteilte Methode der Kurvenbehandlung ist namentlich für die Studierenden der Astronomie von Interesse.

Die Gleichung $\boldsymbol{r = a^{b\vartheta}}$ stellt eine **logarithmische Spirale** dar. Hier gelten die Gleichungen:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = b a^{b\vartheta} \log a, \quad r \frac{d\vartheta}{dr} = r : \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{1}{b \log a},$$

sodaſs tang φ und damit φ selbst konstant ist. Die Kurve bildet demnach gegen den Radiusvektor allenthalben denselben Winkel und kann in diesem Sinne als *gleichwinklige Spirale* bezeichnet werden.

Setzt man $x = r \cos \vartheta$, so ist x die Projektion des Radius vector auf die Polaraxe, und man hat $x = a^{b\vartheta} \cos \vartheta$. Stellt man sich nun vor, daſs der Radiusvektor mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $-q$, beginnend zur Zeit $t = 0$ mit $\vartheta = 0$, sich drehe, so wird allgemein $\vartheta = -qt$ und:

$$x = a^{-bqt} \cos qt.$$

Wie wir demnach eine einfache harmonische Bewegung durch Projektion einer gleichförmigen Bewegung in der Kreisperipherie auf einen Durchmesser herstellen, so gewinnen wir hier die **gedämpfte einfache harmonische Bewegung** dadurch, daſs wir eine in der logarithmischen Spirale mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit erfolgende Bewegung auf die Polaraxe projizieren. Man vergleiche übrigens die Note zu Art. 112.

Übungsaufgaben.

1. Man führe die **Flächenbestimmung** bei der Kurve

$$r = a(1 + \cos \vartheta)$$

durch. Man zeichne sich die Kurve und beachte, daſs die Gesamtfläche gegeben ist durch:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, d\vartheta = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

2. Man bestimme die Fläche der Kurve $r = a(\cos 2\vartheta + \sin 2\vartheta)$. Antwort: πa^2.

3. Man löse die Flächenbestimmung im Falle der Conchoide (cf. Art. 223) für zwei beliebige Radienvektoren. Antwort:

$$b^2(\operatorname{tang}\vartheta_2 - \operatorname{tang}\vartheta_1) + 2ab\log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\vartheta_2\right) : \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\vartheta_1\right)\right].$$

223. Erklärungen und Übungsaufgaben.

Asymptoten. Läuft eine Kurve in der Art ins Unendliche, daſs sie sich hierbei einer bestimmten Geraden immer mehr und mehr annähert, ohne sie jedoch in endlicher Entfernung vollständig zu erreichen, so bezeichnet man diese Gerade als eine Asymptote der Kurve. Betrachten wir z. B. die durch $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ dargestellte Hyperbel! Läſst man x gröſser und gröſser werden, so wird $\frac{a}{x}$ der Null näher und näher kommen, sodaſs die Gleichung der Hyperbel immer weniger von $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ verschieden ist. Durch $y = \frac{b}{a}x$ wird somit eine Asymptote der Hyperbel dargestellt.

Nähert sich ein Kurvenzweig einer Asymptote, so wird, wenn wir auf diesem Zweige weiter und weiter hinauswandern, $\frac{dy}{dx}$ einer bestimmten Grenze sich annähern. Dasselbe wird gelten von dem Abschnitt $x - y\frac{dx}{dy}$, den die Kurventangente auf der x-Axe, vom Nullpunkt gerechnet, abschneidet, sowie auch vom Abschnitt $y - x\frac{dy}{dx}$ auf der Ordinatenaxe.

Wendepunkt. Als Wendepunkt oder Inflexionspunkt bezeichnet man eine solche Stelle einer ebenen Kurve, an welcher $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen Zeichenwechsel erfährt. Die Kurventangente im Wendepunkte heiſst Wendetangente oder Inflexionstangente.

Oskulationspunkt ist eine solche Stelle einer ebenen Kurve, an der die Tangente *vier* unendlich nahe gelegene Punkte mit der Kurve gemein hat.

Selbstberührungspunkt ist ein solcher Punkt einer ebenen Kurve, durch den die Kurve zweimal mit der gleichen Tangentenrichtung hindurchläuft.

Isolierter Punkt wird ein Punkt genannt, dessen Koordinaten die Kurvengleichung befriedigen, ohne daſs in seiner Umgebung weitere Kurvenpunkte vorkommen.

Endpunkt heiſst ein Punkt, in dem ein einzelner Zweig der Kurve aufhört. Ein Beispiel liefert die zu $y = x\log x$ gehörende Kurve, welche im Nullpunkt einen Endpunkt hat.



Die **Begleitkurve der Cykloide.** Als „Begleitkurve" der Cykloide kann man die Kurve bezeichnen, welche dargestellt wird durch:

$$x = a\varphi, \quad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Die **Epitrochoide.** Ihre Gleichungen sind:

$$x = (a + b)\cos\varphi - mb\cos\left(\frac{a}{b} + 1\right)\varphi,$$

$$y = (a + b)\sin\varphi - mb\sin\left(\frac{a}{b} + 1\right)\varphi.$$

Hierbei ist b der Radius des rollenden Kreises und a derjenige des festen Kreises; ferner ist mb die Entfernung des die Kurve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises. Für $m = 1$ gewinnt man die *Epicykloide.*

Die **Hypotrochoide.** Dieselbe wird dargestellt durch:

$$x = (a - b)\cos\varphi + mb\cos\left(\frac{a}{b} - 1\right)\varphi,$$

$$y = (a - b)\sin\varphi - mb\sin\left(\frac{a}{b} - 1\right)\varphi.$$

Für $m = 1$ gewinnt man die *Hypocykloide.*

Der Annahme $a = 4b$ entspricht eine Hypocykloide, deren Gleichung sich in die Gestalt setzen läſst:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Man bezeichnet diese Kurve auch als *Astroide.*

Die der Annahme $a = 2b$ entsprechende Hypocykloide ist eine gerade Linie.

In Art. 11 wurden die Gleichungen der gemeinen Cykloide aufgestellt. Verfolgt man nach der dort gegebenen Regel den geometrischen Ort eines Punktes, der irgendwo auf einem Radius des rollenden Kreises oder auf der Verlängerung dieses Radius gelegen ist, so erhält man:

$$x = a(\varphi - m\sin\varphi), \quad y = a(1 - m\cos\varphi).$$

Je nachdem $m > 1$ oder < 1 ist, gewinnt man eine sogenannte verschlungene oder eine geschweifte Cykloide.

Die **Lemniskate** hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

In Polarkoordinaten nimmt diese Gleichung die Form $r^2 = a^2\cos 2\vartheta$ an. Man berechne nach einander für $\vartheta = 0$, $\vartheta = 0{,}1$, $\vartheta = 0{,}2, \cdots$ die Werte r und konstruiere daraufhin die Kurve.

Die **Archimedische Spirale** hat die Gleichung $r = a\vartheta$.



Die logarithmische oder **gleichwinklige Spirale** wird durch $r = a e^{b\vartheta}$ dargestellt.

Die Gleichung der allgemeinen **logarithmischen Linie** ist

$$y = a \log bx + c.$$

Die Gleichung der **Conchoide** $x^2 y^2 = (a + x)^2 (b^2 - x^2)$ wird in Polarkoordinaten $r = a + b \sec \vartheta$.

Die **Cissoidengleichung** $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ hat in Polarkoordinaten die Gestalt $r = 2a \operatorname{tang} \vartheta \cdot \sin \vartheta$.

Die **Cardioide** wird durch $r = a(1 - \cos \vartheta)$ dargestellt.

Gleichung der **hyperbolischen Spirale**: $r\vartheta = a$.

Die mit dem Namen **Lituus** bezeichnete Spirale wird durch $r^2 \vartheta = a^2$ dargestellt.

Die **Trisectrix** hat die Gleichung $r = a(2 \cos \vartheta \pm 1)$.

1. Man zeige, dafs die durch $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ dargestellte Kurve drei Wendepunkte, nämlich bei $x = 0$, $x = a\sqrt{3}$ und $x = -a\sqrt{3}$, besitzt. Die Kurve nähert sich der x-Axe beiderseits asymptotisch an. Ein Maximum von y findet sich bei $x = a$, ein Minimum bei $x = -a$; im Nullpunkte schneidet die Kurve die x-Axe unter einem Winkel von 45^0.

2. Bei der Kurve $a^2 y = 3bx^2 - x^3$ weise man einen Wendepunkt bei $x = b$, $y = \frac{2b^3}{a^2}$ nach.

3. Man zeige, dafs die durch $y^2 x = 4a^2(2a - x)$ dargestellte Kurve Wendepunkte bei $x = \frac{3a}{2}$, $y = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$ hat.

4. Man weise nach, dafs die durch $y^2(x^2 - a^2) = x^4$ dargestellte Kurve die beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ zu Asymptoten hat.

5. Die Kurve $x^3 - y^3 = a^3$ schneidet die x-Axe bei $x = a$ rechtwinklig und besitzt dortselbst einen Wendepunkt.

6. Es soll bewiesen werden, dafs die Kurve dritter Ordnung $y = \frac{a^2 x}{ab + x^2}$ drei Wendepunkte besitzt.

7. Man behandele zur Wiederholung die in Art. 99 Beispiel 2 gemachten Angaben und gehe nochmals die dortigen Aufgaben durch.

8. Wie grofs sind bei der Kurve $y = e^{ax}$ die Subtangente und Subnormale? Antwort: Subtangente $= \frac{1}{a}$, Subnormale $= ae^{2ax}$.

9. Man bestimme die Subnormale und Subtangente der Kettenlinie:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Antwort:

$$\text{Subnormale} = \frac{c}{4}\left(e^{\frac{2x}{c}} - e^{-\frac{2x}{c}}\right),$$

$$\text{Subtangente} = c\,\frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}.$$

10. Man bestimme die Subtangente bei der Kurve:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0.$$

Durch Differentiation nach x folgt:

$$3x^2 - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

und also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Die Subtangente im Punkte x, y ist:

$$y\frac{dx}{dy} = y\frac{y^2 - ax}{ay - x^2}.$$

11. Für die Kurve $y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$ leite man die Gleichung der Asymptote ab. Man kann y^2 durch Division so entwickeln:

$$y^2 = x^2\left(\frac{1 + \frac{a}{x}}{1 - \frac{a}{x}}\right) = x^2\left(1 + \frac{2a}{x} + \frac{2a^2}{x^2} + \cdots\right).$$

Wird jetzt x gröſser und gröſser, so können wir diese Gleichung näherungsweise so schreiben:

$$y^2 = x^2\left(1 + \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) \quad \text{oder} \quad y = \pm x\left(1 + \frac{a}{x}\right).$$

Wir werden also zu den beiden Asymptoten $y = x + a$ und $y = -x - a$ geführt. Auſserdem ist auch noch die zur y-Axe parallele Gerade $x = a$ eine Asymptote; in der That wächst y, falls sich x dem Werte a annähert, über alle Grenzen.

12. Man berechne allgemein die Gleichung der Tangente für die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Hier findet man durch Differentiation in Bezug auf x:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Hiernach ist die Tangente vom Berührungspunkte x_1, y_1 durch

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}$$

dargestellt.

13. Wo wird für die Kurve $y - 2 = (x - 1)\sqrt{x - 2}$ der Wert von $\frac{dy}{dx}$ unendlich grofs? Und ferner: Unter welchem Winkel schneidet diese Kurve die x-Axe?

Hier gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x - 2} + (x - 1)\,\tfrac{1}{2}(x - 2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x - 5}{2\sqrt{x - 2}}.$$

Dieser Ausdruck wird für $x = 2$, $y = 2$ unendlich, d. h. die Tangente in diesem Punkte läuft senkrecht gegen die x-Axe. Setzt man ferner zur Beantwortung der zweiten Frage $y = 0$, so folgt aus der Kurvengleichung $x = 3$, und für diesen Punkt ergiebt sich $\frac{dy}{dx} = 2$.

14. Für die Kurve $y^3 = ax^2 + x^3$ stelle man allgemein den Abschnitt dar, welchen die Tangente auf der y-Axe (vom Nullpunkt gerechnet) bildet.

Dieser Abschnitt ist durch $y - x\frac{dy}{dx}$ gegeben. Nun gilt im vorliegenden Falle:

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2ax + 3x^2.$$

Der fragliche Abschnitt stellt sich also dar in der Gestalt:

$$y - x\frac{2ax + 3x^2}{3y^2} \quad \text{oder} \quad \frac{3y^3 - 2ax^2 - 3x^3}{3y^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{3}\left(\frac{x}{a + x}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

15. Die Länge der Subnormale einer Kurve im Punkte x, y sei $2a^2x^3$. Welches ist die Kurve?

Hier gilt $y\frac{dy}{dx} = 2a^2x^3$ oder $y\,dy = 2a^2x^3\,dx$. Man findet also durch Integration $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}a^2x^4$ oder $y = ax^2$ als Gleichung der gesuchten Kurve, welche somit eine Parabel ist. Die Subtangente ist $y\frac{dx}{dy}$ und berechnet sich also bei dieser Kurve zu

$$y\frac{y}{2a^2x^3} = \frac{a^2x^4}{2a^2x^3} = \tfrac{1}{2}x.$$

16. Man zeige, dafs die Normale bei der Kettenlinie durch $\frac{1}{c}y^2$ gegeben ist*).

*) Vergl. Art. 99, Beispiel 8.

17. Man beweise, dafs die Kurve $y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0$ die beiden durch $y = x - \frac{b}{2}$ und $y = -x - \frac{b}{2}$ dargestellten Asymptoten hat.

18. Man berechne, dafs die Subtangente und Subnormale beim Kreise $y^2 = 2ax - x^2$ durch $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ bez. $a - x$ gegeben sind, und dafs bei der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ entsprechend die beiden Ausdrücke $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ und $\frac{b^2}{a^2}(a - x)$ auftreten.

19. Man bestimme die Gleichung der Tangente bei der Cissoide $y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$. Antwort: $y = \left[\frac{x}{(2a - x)^3}\right]^{\frac{1}{2}} \{(3a - x)x_1 - ax\}$.

20. Welche Kurve hat eine konstante Subtangente? Man hat anzusetzen:

$$y\frac{dx}{dy} = a \quad \text{oder} \quad dx = a\frac{dy}{y}$$

und findet durch Integration:

$$x = a \log y + c \quad \text{oder} \quad y = Ce^{\frac{x}{a}};$$

es handelt sich also um eine Exponentialkurve.

21. Man beweise, dafs die Kurve $x^3 - y^3 + ax^2 = 0$ die Asymptote $y = x + \frac{a}{3}$ besitzt.

22. Man zeige, dafs eine Kurve gegen die x-Axe ihre **konvexe oder konkave** Seite kehrt, je nachdem y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ vom gleichen oder vom entgegengesetzten Zeichen sind (cf. Art. 60).

224. Derjenige Kreis, welcher durch den Punkt x, y einer vorgelegten Kurve hindurchläuft und daselbst sowohl für $\frac{dy}{dx}$ als auch für $\frac{d^2y}{dx^2}$ dieselben Werte liefert, wie die Kurve selbst, wird als der **Krümmungskreis** der Kurve an der Stelle x, y bezeichnet. Hat dieser Kreis die Mittelpunktskoordinaten a, b und den Radius r, so gilt als Gleichung des Kreises:

(1) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Differenzieren wir in Bezug auf x und teilen durch 2, so folgt:

(2) $$x - a + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

und bei nochmaliger Differentiation:

(3) $$1 + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Schreiben wir jetzt zur Abkürzung p für $\frac{dy}{dx}$ und q für $\frac{d^2y}{dx^2}$, so entnehmen wir aus (3):

$$(4) \qquad y - b = -\frac{1+p^2}{q},$$

sowie unter Vermittlung von (2):

$$(5) \qquad x - a = \frac{1+p^2}{q}p.$$

Nun können wir aber die Werte p, q für die einzelne Stelle x, y der gegebenen Kurve berechnen; da dies aber dieselben Werte sein sollten, wie die in (4) und (5) gemeinten, so können wir aus diesen Gleichungen die Mittelpunktskoordinaten a und b und damit auch den Radius r des Krümmungskreises durch die x, y, p, q der Kurve berechnen. Wäre die Theorie der Evoluten für den Ingenieur von besonderer Bedeutung, so würden wir dieselbe an dieser Stelle zu entwickeln haben: Der geometrische Ort aller Krümmungszentra a, b einer gegebenen Kurve bildet die zugehörige Evolute; man findet deren Gleichung in a und b, indem man x und y aus den Gleichungen (4) und (5) und der Gleichung der gegebenen Kurve eliminiert. Die ursprüngliche Kurve ist als eine Evolvente ihrer Evolute zu bezeichnen. Wir gehen hierauf nicht ein, empfehlen jedoch gewandteren Lesern, selbständig in dieser Hinsicht Untersuchungen anzustellen.

Wichtiger ist, daſs wir den Krümmungsradius r für die einzelne Stelle der gegebenen Kurve berechnen. Der reziproke Wert von r liefert uns dabei ein *Maſs für die Krümmung* der Kurve an der fraglichen Stelle. Indem wir die in (4) und (5) gegebenen Werte von $y - b$ und $x - a$ in (1) eintragen, berechnen wir dies Krümmungsmaſs zu:

$$(6) \qquad \frac{1}{r} = \frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Eine noch durchsichtigere Entwicklung dieser Verhältnisse können wir so geben: Wir beschreiben von einer Stelle der Kurve aus das Kurvenstück $\varDelta s$, und es möge hierbei die Tangente die Richtungsänderung $\varDelta\vartheta$ erfahren. Dann bilden wir den Quotienten $\frac{\varDelta\vartheta}{\varDelta s}$ und definieren als **Maſs der Krümmung** den Grenzwert dieses Quotienten für unendlich klein werdendes $\varDelta s$:

$$(7) \qquad \frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Nun ist $\tang \vartheta = \frac{dy}{dx} = p$ und also $\vartheta = \operatorname{arc\,tang} p$. Hieraus folgt:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{dp}{ds}.$$

Weiter hat man:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2} = \frac{ds}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Es ergiebt sich somit:

(8) $$\frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Übungsaufgaben.

1. Die Gleichung einer vorgelegten Kurve sei:

$$x^3 - 1500\,x^2 + 30000\,x - 3000000\,y = 0.$$

Man zeige, daſs für diesen Fall der Nenner im Ausdruck (8) des Krümmungsmaſses $\frac{1}{r}$ im Intervall $0 \leq x \leq 100$ näherungsweise gleich 1 ist. Zu bestimmen ist das Krümmungsmaſs für $x = 0$.

2. Für die Kurve $y = x^4 - 4x^3 - 18\,x^2$ bestimme man das Krümmungsmaſs im Nullpunkte. Antwort: 36.

3. Man zeige, daſs der Krümmungsradius der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Scheitelpunkte $x = a$, $y = 0$ gleich $\frac{b^2}{a}$ ist.

4. Man berechne für die Parabel $y^2 = 4ax$ den Krümmungsradius im Scheitelpunkte $x = 0$. Antwort: $r = 2a$.

5. Es soll der Krümmungsradius der Exponentiallinie $y = be^{ax}$ an einer beliebigen Stelle berechnet werden.

Hier ist $q = a^2b\,e^{ax}$, $p = ab\,e^{ax}$, und also findet sich:

$$r = \frac{\left(1 + a^2b^2e^{2ax}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2b\,e^{ax}},$$

sodaſs man speziell für $x = 0$ den Wert $r = \frac{(1 + a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2b}$ gewinnt.

6. Man bestimme den Krümmungsradius der Sinuskurve:

$$y = a \sin bx$$

für eine beliebige Stelle.

Antwort:

$$r = \frac{(1 + a^2b^2 \cos^2 bx)^{\frac{3}{2}}}{-\,ab^2 \sin bx}.$$

Für $x = 0$ folgt $r = \infty$ und also verschwindendes Krümmungsmafs. Für $bx = \frac{\pi}{2}$ hat man $r = \frac{1}{-ab^2}\cdot$

7. Es soll der Krümmungsradius der Kettenlinie:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

für eine beliebige Stelle berechnet werden.

Antwort: $r = \frac{y^2}{c}\cdot$ Für den Scheitelpunkt $x = 0,\ y = c$ folgt speziell $r = c$.

8. Man zeige, dafs der Krümmungsradius der Kurve:

$$y^2(x - 4m) = mx(x - 3m)$$

in dem einen der beiden Schnittpunkte mit der x-Axe gleich $\frac{3m}{8}$ ist, im anderen gleich $\frac{3m}{2}\cdot$

9. Man stelle die Gleichung des Krümmungskreises der Kurve:

$$y^4 = 4m^2x^2 - x^4$$

im Nullpunkte auf.

10. Der Krümmungsradius der Kurve $3a^2y = x^3$ an der Stelle x, y ist $r = \frac{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^4x}\cdot$

11. Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ findet man als Krümmungsradius an der Stelle x, y

$$r = \frac{(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

wobei $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ gilt und e die Excentrizität bedeutet.

12. Man berechne den Krümmungsradius für die Kurve $xy = a$.

Antwort: $r = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}\cdot$

13. Man bestimme den Krümmungsradius für die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Antwort: $r = \frac{(e^2x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$

wobei $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ ist.



14. Bei der Kettenlinie ist der Krümmungsradius gleich der Normalen und liegt auf der zur Normalen entgegengesetzten Seite der Kurve (siehe Aufgabe 7).

15. Man berechne den Krümmungsradius der Traktrix aus dem Umstande, daſs diese Kurve der Differentialgleichung:

$$y \frac{dx}{dy} = \sqrt{a^2 - y^2}$$

genügt.

225. Es sei:

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0$$

die Gleichung einer **Kurvenschar.** Hierbei ist a für die einzelne Kurve konstant; für die ganze Schar hat a die Bedeutung eines **variabelen Parameters**, dessen verschiedene Werte eben die verschiedenen Kurven der Schar liefern. Mit der einzelnen Kurve (1) würde die Kurve:

$$(2) \qquad f(x, y, a + da) = 0$$

unmittelbar benachbart sein, wenn hierbei da einen unendlich kleinen Zuwachs des Parameters a bedeutet. Die Gleichung (2) können wir (siehe die Gleichung (1) am Schlusse des Art. 21 S. 33) so schreiben:

$$(3) \qquad f(x, y, a) + \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} da = 0.$$

Wenn es sich demnach um die Schnittpunkte der beiden einander unendlich nahe gelegenen Kurven (1) und (2) handeln soll, so werden deren Koordinaten die Gleichungen (1) und (3) oder, was auf dasselbe herauskommt, der Gleichungen:

$$(4) \qquad f(x, y, a) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0$$

zugleich befriedigen. Eliminieren wir demnach a aus diesen beiden Gleichungen, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und y, welche durch die Schnittpunkte je zweier unendlich nahe gelegener Kurven der Schar befriedigt wird. Diese Gleichung liefert eine Kurve, welche man als **Enveloppe** oder **Umhüllungskurve** der Kurvenschar (1) benennt. Man kann zeigen, daſs die Enveloppe von der einzelnen Kurve der Schar *berührt* wird.

Beispiel 1. Faſst man in der Gleichung:

$$y = \frac{m}{a} + ax$$

a als Parameter auf, so hat man mit einer Schar von Geraden zu

thun. Es soll die Enveloppe dieser Schar bestimmt werden. An Stelle der allgemeinen Gleichung $f(x, y, a) = 0$ tritt hier im speziellen:

$$(5) \qquad y - \frac{m}{a} - ax = 0.$$

Durch Differentiation in Bezug auf a findet man:

$$(6) \qquad \frac{m}{a^2} - x = 0,$$

woraus man ableitet:

$$\frac{1}{x} = \frac{a^2}{m} \quad \text{oder} \quad a^2 = \frac{m}{x}.$$

Setzt man den hieraus hervorgehenden Wert von a in (5) ein, so folgt:

$$y - \sqrt{mx} - x\sqrt{\frac{m}{x}} = 0$$

oder

$$y = 2\sqrt{mx} \quad \text{oder} \quad y^2 = 4mx.$$

Die Enveloppe ist somit eine Parabel.

Beispiel 2. In Art. 24 Beispiel 3 betrachteten wir Wurfgeschosse, welche mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit, aber unter verschiedenen Neigungswinkeln α gegen die Horizontale abgeschossen wurden. Den verschiedenen Neigungswinkeln α entsprechen Flugbahnen, welche die Kurvenschar:

$$y = \frac{V \sin \alpha}{V \cos \alpha} x - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \alpha}$$

bilden. Wir geben dieser Gleichung unter Benutzung der Abkürzungen:

$$\operatorname{tang} \alpha = a, \quad \tfrac{1}{2} \frac{g}{V^2} = m$$

die Gestalt:

$$y - xa + mx^2(a^2 + 1) = 0,$$

in welcher nun a den variabelen Parameter darstellt. Durch Differentiation der linken Seite dieser Gleichung in Bezug auf a ergiebt sich:

$$-x + 2mx^2a = 0 \quad \text{oder} \quad a = \frac{1}{2mx}.$$

Die Enveloppe der fraglichen Kurvenschar ist somit durch:

$$y - \frac{1}{2m} + mx^2\left(\frac{1}{4m^2x^2} + 1\right) = 0$$

oder durch:

$$y = -mx^2 + \frac{1}{4m}$$

dargestellt.

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitelpunkt senkrecht über dem Geschütz in der Höhe $\frac{1}{4m} = \frac{V^2}{2g}$ gelegen ist.

226. Übungsaufgaben.

1. Man berechne die Oberfläche desjenigen Rotationskörpers, der durch Drehung der Kettenlinie um die y-Axe entsteht.

2. Man beweise, dafs die Gleichungen der Cykloide die Gestalt:

$$x = a(\vartheta + \sin\vartheta), \quad y = a(1 - \cos\vartheta)$$

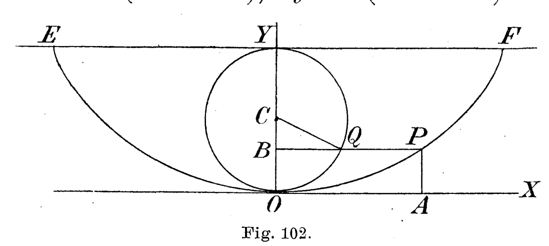


Fig. 102.

annehmen, falls man der Kurve die in Figur 102 skizzierte Lage mit dem Scheitelpunkte als Nullpunkt giebt, wo alsdann

$$\overline{PB} = x, \quad \overline{PA} = y, \quad \sphericalangle\, OCQ = \vartheta$$

zu nehmen ist.

Es soll gezeigt werden, dafs bei Drehung des Cykloidenzweiges EOF um OY ein Rotationskörper vom Volumen $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)$ entspringt, bei Drehung um OX ein solcher vom Volumen $\pi^2 a^3$, endlich bei Drehung um EF ein solcher vom Volumen $5\pi^2 a^3$.

3. Man bestimme die **Bogenlänge der Kurve** $9ay^2 = 4x^3$ zwischen den Punkten der Abscissen 0 und x.

$$\text{Antwort:} \quad s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x}{a}}\, dx = \tfrac{2}{3} a\left[\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

4. Man berechne die Bogenlänge bei der Kurve $y^2 = 2ax - x^2$ wieder zwischen den Punkten der Abscissen 0 und x.

$$\text{Antwort:} \quad s = a \cdot \text{arc}\sin\left(\frac{x-a}{a}\right).$$

5. Man bestimme die Bogenlänge der Cykloide (cf. Art. 47).

$$\text{Antwort:} \quad s = 8a(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi) = 8a - 4\sqrt{4a^2 - 2ay}.$$

6. Man finde die Bogenlänge der Parabel $y = \sqrt{4ax}$, gemessen vom Scheitelpunkte.

$$\text{Antwort:} \quad s = \sqrt{ax + x^2} + a\log\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a} + x}{\sqrt{a}}\right).$$

7. Man zeige, dafs die ganze von einem Zweige der Begleitkurve der Cykloide eingegrenzte Fläche doppelt so grofs ist, als die Fläche des rollenden Kreises (cf. Art. 223).

8. Man bestimme auf Grund der Formel:

$$A = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\vartheta$$

die durch die Kurve $r = be^{\frac{\vartheta}{c}}$ und die beiden zu ϑ_1 und ϑ_2 gehörenden Radienvektoren r_1 und r_2 eingegrenzte Fläche.

Antwort: $\frac{c}{4}({r_2}^2 - {r_1}^2)$.

9. Man beweise die Formel:

$$s = c \log \frac{x}{c + \sqrt{c^2 + x^2}} + \sqrt{c^2 + x^2} + C$$

für die Bogenlänge s der logarithmischen Linie $x = ae^{\frac{}{c}}$.

10. Man zeige, dafs das Bogenintegral:

$$s = \int d\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}$$

bei der Kurve $r = a(1 + \cos\vartheta)$ auf den Ausdruck:

$$s = 4a \sin \frac{\vartheta}{2}$$

für die Bogenlänge führt.

11. Man beweise für die Kurve $r = be^{\frac{\vartheta}{c}}$ die Gleichung:

$$s = r\sqrt{1 + c^2} + C.$$

12. Man zeige für die Cykloide die Richtigkeit der Gleichung:

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \frac{y}{2a}}$$

und entwickele daraus:

$$s = 4\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{2}ay} - 2a.$$

13. Man beweise für die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ die Formel:

$$s = \tfrac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

14. Man lasse die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die x-Axe rotieren und zeige, dafs die Oberfläche des entstehenden Rotationsellipsoids den Flächeninhalt bekommt:



$$2\pi ab\left[\sqrt{1-e^2}+\frac{\arc \sin e}{e}\right],$$

wobei $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ ist.

15. Man zeige, dafs die ganze von der Kurve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ umschlossene Fläche den Inhalt $\frac{3}{8}\pi ab$ hat.

16. Man bestimme den Flächeninhalt der bei der Kurve $y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ auftretenden Schleife.

Antwort: $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

17. Man finde den Inhalt des von der Kurve $y = x + \sqrt{a^2 - x^2}$ rings umschlossenen Flächenstücks.

Antwort: πa^2.

18. Man berechne den Inhalt der bei der Kurve $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ vorliegenden Schleife.

Antwort: $\frac{1}{2}a^2$.

19. Man bestimme den **Inhalt** der Ellipse von der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; hier hat man den vierfachen Wert des Integrals:

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

zu berechnen.

20. Man bestimme den **Inhalt** der von der Cykloide und der x-Axe eingegrenzten Fläche als Funktion des Wälzungswinkels φ (cf. Art. 11). Hier ist zu setzen:

$$\int y\,dx = \int y\frac{dx}{d\varphi}\,d\varphi.$$

Antwort: $a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)$.

Setzt man speziell die Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ ein, so ergiebt sich das Dreifache vom Inhalte des rollenden Kreises.

227. Ein schwerer **Körper** vom Gewicht W **falle in einem Medium,** welches eine durch av^n dargestellte Widerstandskraft leistet; dabei bedeute v die Geschwindigkeit, während a und n Konstanten sind. Unter diesen Umständen gilt die Beziehung:

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W - av^n.$$

Welches ist die **stationäre Geschwindigkeit** des Körpers, d. h. diejenige, bei welcher eine weitere Beschleunigung nicht eintritt? Bezeichnet man diese Geschwindigkeit durch v_1, so gilt $av_1{}^n = W$, woraus man v_1 berechnen kann. Ist andrerseits v_1 bekannt, so kann die mit a bezeichnete Konstante durch $a = Wv_1{}^{-n}$ ausgedrückt werden. Tragen wir diesen Wert für a in obige Gleichung ein, so folgt:

$$g\frac{dt}{dv} = \frac{1}{1 - \frac{av^n}{W}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^n},$$

sodaſs man für t gewinnt:

$$t = \frac{1}{g}\int \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^n}.$$

Ist z. B. $n = 2$, so folgt:

$$t = \frac{v_1}{2g} \log \frac{v_1 + v}{v_1 - v}$$

und

$$v = v_1 \operatorname{tangh} \frac{gt}{v_1} = \frac{dx}{dt}.$$

Für die Falltiefe x findet sich hieraus:

$$x = \frac{v_1{}^2}{g} \log \cosh \frac{gt}{v_1}.$$

228. Unser altes Beispiel im Art. 24.

Ein materieller Punkt bewege sich unter der Wirkung einer konstanten vertikal nach unten gerichteten Beschleunigung g. Die Ordinate y sei nach *oben* positiv genommen, die Abscissen x werden horizontal gemessen; alsdann gilt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = c\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = c^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Folglich ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{c^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{c^2}x + a,$$

(1) $$y = -\tfrac{1}{2}\frac{g}{c^2}x^2 + ax + b,$$

womit eine Parabel gewonnen ist (cf. Art. 24).

Bestimmen wir, dafs für $x = 0$ auch y verschwinden soll, so folgt für die Konstante b der Wert 0. Weiter erkennen wir in a die Tangente desjenigen Winkels, welchen die Bahn (1) im Nullpunkte mit der x-Axe bildet, während c die konstante Horizontalgeschwindigkeit ist. Hat ein Wurfgeschofs die Anfangsgeschwindigkeit V in einer gegen die Horizontale unter dem Winkel α geneigten Richtung, so wird $c = V \cos \alpha$ und $a = \operatorname{tang} \alpha$, und die Gleichung (1) liefert:

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{V^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tang} \alpha.$$

229. Übungsbeispiele über Fourier'sche Reihen.

1. Eine periodische Funktion $f(x)$ von x möge im Intervall von $x = 0$ bis $x = c$ den Wert mx haben, und es sei gerade c die Periode, sodafs die Funktion bei $x = c$ plötzlich auf 0 herabsinkt, um im nächsten Intervall (c bis $2c$) wieder in derselben Weise von 0 bis mc zu wachsen. Benutzen wir die Regeln von Art. 133, so werden wir $\frac{2\pi}{c} = q$ schreiben und den Ansatz bilden:

$$mx = a_0 + a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + \cdots + a_s \sin sqx + \cdots$$
$$+ b_1 \cos qx + b_2 \cos 2qx + \cdots + b_s \cos sqx + \cdots.$$

Für die hierbei auftretenden Koefficienten gelten die Regeln:

$$a_0 = \tfrac{1}{2} mc,$$

$$a_s = \frac{2}{c} \int_0^c mx \cdot \sin sqx \cdot dx, \quad b_s = \frac{2}{c} \int_0^c mx \cdot \cos sqx \cdot dx.$$

Ergebnis:

$$mx = \tfrac{1}{2} mc - \frac{mc}{\pi} (\sin qx + \tfrac{1}{2} \sin 2qx + \tfrac{1}{3} \sin 3qx + \tfrac{1}{4} \sin 4qx + \cdots).$$

2. Man entwickele x zuerst in eine Sinusreihe, sodann in eine Cosinusreihe.

Antwort: Auf das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ bezieht sich die Darstellung:

$$x = 2 (\sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x - \cdots),$$

auf das Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ aber die folgende:

$$x = \frac{4}{\pi} (\sin x - \tfrac{1}{9} \sin 3x + \tfrac{1}{25} \sin 5x - \cdots),$$

endlich auf das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die Darstellung:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos x + \tfrac{1}{9} \cos 3x + \tfrac{1}{25} \cos 5x + \cdots).$$

3. Man beweise die Gleichung:

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \cdots$$

4. Man zeige die Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$e^{ax} - e^{-ax} = \frac{2}{\pi} (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) \left[\frac{\sin x}{1 + a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 + a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 + a^2} - \cdots \right].$$

5. Man integriere die vorstehend entwickelten Fourier'schen Reihen.

230. 1. Für den Trägheitsradius k einer Kugel vom Radius a in Bezug auf einen Durchmesser zeige man die Formel:

$$k^2 = \tfrac{2}{5} a^2.$$

Das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe vom Radius y und der Dicke dx in Bezug auf den Mittelpunkt ist:

$$\frac{\pi}{2} m y^4 \, dx,$$

wenn m die Dichtigkeit bedeutet. Um hieraus das Trägheitsmoment der Kugel abzuleiten, haben wir $x^2 + y^2 = a^2$ zu setzen und $\pi m y^4 \, dx$ zwischen den Grenzen 0 und a zu integrieren:

$$\int_0^a \pi m y^4 \, dx = m\pi \int_0^a (a^2 - x^2)^2 dx = m \tfrac{8}{15} \pi a^5.$$

Teilt man diesen Betrag durch die Masse $m \frac{4}{3} \pi a^3$ der Kugel, so ergiebt sich das Quadrat des Trägheitsradius k in der obigen Gestalt.

2. Bei einem aufrecht stehenden Rotationsparaboloid, dessen Höhe h ist, und dessen kreisförmige Grundfläche den Radius a hat, gilt für den Trägheitsradius k in Bezug auf die Axe:

$$k^2 = \tfrac{1}{3} a^2.$$

Der Trägheitsradius dieses Paraboloids in Bezug auf einen Durchmesser der Basis bestimmt sich aus:

$$k^2 = \tfrac{1}{6} (a^2 + h^2).$$

3. Bei einem Dreiecke von der Höhe h hat man für den Trägheitsradius in Bezug auf eine durch die Spitze parallel zur Basis gelegte Axe:

$$k^2 = \tfrac{1}{2} h^2.$$

Für eine durch den Schwerpunkt des Dreiecks parallel zur Basis gelegte Axe gilt entsprechend:

$$k^2 = \tfrac{1}{18} h^2.$$

231. Der Taylor'sche Lehrsatz.

Wenn man eine Funktion $f(x+h)$ von $x+h$ bei konstantem h in Bezug auf x differenziert, so gewinnt man dasselbe Ergebnis, als wenn man sie bei konstantem x nach h differenziert. Dies ist ohne weiteres ersichtlich. Setzen wir nämlich $x+h=u$, so ist:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{d f(u)}{d u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d f(u)}{d u},$$

da $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ ist; das gleiche Resultat liefert auch die Differentiation in Bezug auf h:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial h} = \frac{d f(u)}{d u}\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{d f(u)}{d u},$$

da auch $\frac{\partial u}{\partial h}=1$ ist.

Wir nehmen nun an, dafs $f(x+h)$ eine Entwicklung nach ansteigenden Potenzen von h gestatte:

$$(1) \qquad f(x+h) = X_0 + X_1 h + X_2 h^2 + X_3 h^3 + \cdots,$$

wobei die $X_0, X_1, \ldots$ von h unabhängig sein sollen. Hieraus findet man durch Differentiation einmal nach h, sodann in Bezug auf x:

$$(2) \qquad \frac{\partial f(x+h)}{\partial h} = 0 + X_1 + 2X_2 h + 3X_3 h^2 + \cdots,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f(x+h)}{\partial x} = \frac{dX_0}{dx} + \frac{dX_1}{dx}h + \frac{dX_2}{dx}h^2 + \cdots.$$

Die beiden in diesen Gleichungen linker Hand stehenden Ausdrücke sind einander gleich. Hieraus darf man den Schlufs ziehen, dafs die rechten Seiten in der Weise einander gleich sind, dafs die Koeffizienten gleich hoher Potenzen beider Entwicklungen übereinstimmen:

$$X_1 = \frac{dX_0}{dx},$$

$$X_2 = \tfrac{1}{2}\frac{dX_1}{dx} = \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2X_0}{dx^2},$$

$$X_3 = \tfrac{1}{3}\frac{dX_2}{dx} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3X_0}{dx^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Indem wir aber in Gleichung (1) für h den Wert 0 setzen, ergiebt sich $X_0 = f(x)$. Schreiben wir somit $\frac{d f(x)}{dx} = f'(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x), \cdots$, so ergiebt sich als Taylor'scher Lehrsatz:

$$(4) \qquad \boldsymbol{f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) + \cdots.}$$

Setzen wir nach Ausführung der Differentiationen insbesondere $x = 0$ in $f'(x)$, $f''(x)$, ... ein, so liefert Gleichung (4):

$$(5) \qquad f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots.$$

Man beachte jetzt, dafs in dieser Gleichung die bisher mit x bezeichnete Gröfse überhaupt nicht mehr auftritt. Entschliefsen wir uns demnach, für die in (5) allein noch auftretende Gröfse h lieber die Bezeichnung x zu gebrauchen, so nimmt Gleichung (5) die Gestalt an:

$$(6) \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots.$$

Der durch diese Gleichung zum Ausdruck kommende Satz wird der **Maclaurin'sche Lehrsatz** genannt.

Der hier mitgeteilte Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes ist unvollständig, insofern die Konvergenz der in (1) angesetzten unendlichen Reihe nicht bewiesen wurde. Exaktere Beweisführungen findet man in den Lehrbüchern der höheren Analysis.

Man wolle nun im speziellen x als Zeit t deuten und verstehe unter $s = f(t)$ die Entfernung eines auf geradliniger Bahn beweglichen Punktes von einem festen Anfangspunkte. Wenn man alsdann im gegenwärtigen Zeitpunkt, der t_0 heifse, die Entfernung s, die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dt^2}$, sowie $\frac{d^3 s}{dt^3}$, ... kennt, oder (was auf dasselbe hinausläuft) wenn man für ein sehr kleines, sich an t_0 anschliefsendes, Zeitteilchen die Bewegung des betrachteten Punktes genau kennt, so kann man den Ort des Punktes zu irgend einer zukünftigen Zeit voraussagen, und kann auch berechnen, an welcher Stelle seiner Bahn sich der Körper zu irgend einer vergangenen Zeit befunden hat.

Der Taylor'sche Lehrsatz ist ein sehr weit reichendes Theorem und stellt die Quelle für zahlreiche Folgerungen dar.

232. Übungsaufgaben über den Taylor'schen Lehrsatz.

1. Man entwickele $(x + h)^n$ nach Potenzen von h.

Hier gilt

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \cdots,$$

und also folgt:

$$(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{n-2} + \cdots.$$

Dies ist der *binomische Lehrsatz*, welcher somit ein Spezialfall des Taylor'schen Satzes ist.

2. Man entwickele $\log(x+h)$ nach Potenzen von h.
Hier hat man:

$$f(x) = \log x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = +2x^{-3}, \cdots,$$

sodafs man erhält:

$$\log(x+h) = \log x + h\frac{1}{x} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{h^3}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \cdots.$$

Setzen wir $x = 1$, so gewinnen wir die wichtige Formel:

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots.$$

3. Man beweise die Formel:

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{1 \cdot 2}\sin x - \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos x + \cdots.$$

4. Man leite die Gleichung ab:

$$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{1 \cdot 2}\cos x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\sin x + \cdots.$$

5. Was liefern die in 3. und 4. aufgestellten Formeln für $x = 0$?

233. Übungsaufgaben über den Maclaurin'schen Lehrsatz.

1. Man entwickele $\sin x$ nach Potenzen von x. Hier gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\ &\cdots & &\cdots \end{aligned}$$

Man gewinnt somit:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

wo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ sein soll.

2. In ähnlicher Weise folgt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Man berechne aus diesen Reihen die Werte der Funktionen sin und cos für einen einzelnen Winkel, z. B. für den in Bogenmafs gemessenen Winkel 0,2 und vergleiche das Ergebnis mit den durch die Tafeln gegebenen Werten.

3. Es soll die Funktion $\operatorname{arc\,tang} x$ nach Potenzen von x entwickelt werden. Hierbei ist eine andere Methode am Platze.



Der Differentialquotient der Funktion arc tang x ist $\frac{1}{1+x^2}$; hierfür findet man, indem man mit $1 + x^2$ in 1 dividiert, die Reihenentwicklung:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots.$$

Integrieren wir diese Reihe gliedweise, so liefert offenbar das entstehende Resultat die Reihenentwicklung von arc tang x:

$$\text{arc tang}\, x = x - \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{7} x^7 + \cdots.$$

Eine Konstante ist hierbei nicht zuzusetzen, da für $x = 0$ die Funktion arc tang x verschwindet.

4. Man entwickele tang $(1 - x)$ nach der Regel (5) Art. 231 in eine Maclaurin'sche Reihe.

5. Man beweise:

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log a)^3 + \cdots.$$

6. Man zeige die Gleichung:

$$\text{tang}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

234. Man entwickele $e^{i\vartheta}$ nach Potenzen von ϑ und vergleiche den entspringenden Ausdruck mit den Reihen für sin ϑ und cos ϑ. Man leite auf diese Weise die Formeln ab:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta, \quad e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta,$$

$$\cos\vartheta = \tfrac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}), \quad \sin\vartheta = \frac{1}{2i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}).$$

Aus den beiden ersten dieser vier Relationen entwickelt man leicht die Gleichung:

$$(\cos\vartheta \pm i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta \pm i \sin n\vartheta.$$

Dieselbe bringt den **Moivre'schen Lehrsatz** zum Ausdruck.

Bei der Auflösung einer kubischen Gleichung liefert in dem Falle, dafs alle drei Lösungen *reell* sind (sogenannter „irreducibeler“ Fall), die Kardanische Formel diese Lösungen nur erst in der Gestalt von Kubikwurzeln aus *komplexen* Gröfsen. Diese Wurzeln sind alsdann vermittelst des Moivre'schen Satzes auszuziehen.

Um die „Wurzel q^{ten} Grades“ oder kurz die „q^{te} Wurzel“ aus der komplexen Gröfse $a + i$ (unter a und b reelle Zahlen verstanden) auszuziehen, schreiben wir:

$$a + ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Dann gilt:

$$r \cos \vartheta = a, \quad r \sin \vartheta = b, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{b}{a},$$

Gleichungen, vermöge deren man r und ϑ aus a und b berechnen kann. Die q^{te} Wurzel aus $a + ib$ ist nun mehrdeutig; in der That giebt jeder der folgenden Ausdrücke, in die q^{te} Potenz erhoben, $a + ib$:

$$r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\vartheta}{q} + i \sin\frac{\vartheta}{q}\right),$$
$$r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{q} + i \sin\frac{\vartheta + 2\pi}{q}\right),$$
$$r^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{q} + i \sin\frac{\vartheta + 4\pi}{q}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man sieht leicht, dafs es genau q verschiedene Wurzeln q^{ten} Grades aus $a + ib$ giebt.

Übungsaufgabe. Man bestimme die drei Kubikwurzeln aus 8.

Wir schreiben 8 der Reihe nach in den Gestalten:

$$8(\cos 0 + i \sin 0), \quad 8(\cos 2\pi + i \sin 2\pi), \quad 8(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)$$

und verfahren in jedem Falle nach der Regel, dafs die dritte Wurzel aus $r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ gleich $r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\vartheta}{3} + i \sin\frac{\vartheta}{3}\right)$ ist.

235. Die Entwicklung von $e^{h\theta}$ nach Potenzen von $h\theta$ ist:

$$e^{h\theta} = 1 + h\theta + \frac{1}{1 \cdot 2} h^2\theta^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3\theta^3 + \cdots.$$

Nehmen wir hier rechts θ als Symbol für die Operation $\frac{d}{dx}$, anzuwenden auf eine Funktion $f(x)$, und verstehen wir demnach unter θ^2, θ^3, $\cdots$ Symbole für $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^3}{dx^3}$, $\cdots$, so mufs entsprechend das Symbol $e^{h\theta}$ die Vermehrung von x um h bedeuten, wenn in der angegebenen Reihenentwicklung eine *symbolische Darstellung der Taylor'schen Reihe* vorliegen soll*).

236. Eine Gleichung zwischen x und y, in welcher neben diesen Variabelen auch noch Differentialquotienten von y nach x vorkommen, wird eine **Differentialgleichung** genannt. Wir haben bereits einige Gleichungen dieser Art früher behandelt.

---

*) Diese Bemerkung ist hier nur beiläufig gemacht, sie kommt weiter nicht zur Verwendung.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung ist die Ordnung des höchsten in der Gleichung auftretenden Differentialquotienten.

Als Unbekannte gelten in der Differentialgleichung y und die Differentialquotienten von y. Kommen dieselben nur rational und ganz vor, so wird man je nach der Höhe der Potenzen und Produkte dieser Unbekannten der Differentialgleichung einen *Grad* erteilen. Man spricht von einer *linearen* Differentialgleichung insbesondere, wenn in keinem Gliede eine höhere als die erste Potenz einer Unbekannten vorliegt, und wenn kein Produkt von mehreren auftritt. Bei einer solchen Gleichung stellt immer die Summe mehrerer Lösungen wieder eine Lösung dar.

Es sei eine gewöhnliche Gleichung zwischen x und y vorgelegt, welche n unbestimmte Konstanten enthält. Differenzieren wir diese Gleichung n Male hinter einander, indem wir x als unabhängige Variabele und y als Funktion ansehen, so entstehen im ganzen $(n+1)$ Gleichungen, aus denen wir die n Konstanten eliminieren wollen. **Wir gewinnen so eine Differentialgleichung**, welche von den Konstanten frei ist; und zwar handelt es sich hier um eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Übungsaufgabe. Man stelle aus

(1) $$y = ax^2 + bx$$

eine von a und b freie Differentialgleichung zweiter Ordnung her. Hier folgt durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2a, \quad b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Die gewünschte Differentialgleichung wird somit:

$$y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

oder:

(2) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Umgekehrt findet man demnach als Lösung der Differentialgleichung (2) die Funktion $y = Ax^2 + Bx$, unter A und B willkürliche Konstanten verstanden.

237. Die Behandlung der Differentialgleichungen beginnen wir mit denjenigen von der **ersten Ordnung**.

Diesen können wir die Gestalt $M + N\frac{dy}{dx} = 0$ geben, unter M und N Funktionen von x und y verstanden. Gewöhnlich benutzen wir die Normalform:

$$\boldsymbol{M \cdot dx + N \cdot dy = 0.}$$

Beispiele.

1. $(a+x)(b+y)\,dx + dy = 0$ oder $(a+x)\,dx + \frac{1}{b+y}\,dy = 0.$

Indem wir integrieren, gewinnen wir als allgemeine Lösung:

$$ax + \tfrac{1}{2}x^2 + \log(b+y) = C,$$

unter C eine willkürliche Konstante verstanden.

Man beachte, daſs in einem solchen Falle, wo **die Trennung der Variabelen** durchführbar ist, die Lösung der Differentialgleichung durch direkte Integration vollzogen werden kann.

So können wir z. B. die Gleichung:

$$f(x)\,F(y)\,dx + \varphi(x)\,\psi(y)\,dy = 0$$

unter Trennung der Variabelen umsetzen in:

$$\frac{f(x)\,dx}{\varphi(x)} + \frac{\psi(y)\,dy}{F(y)} = 0,$$

wo nun direkt integriert werden kann.

2. $$(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0,$$

oder

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0.$$

Hier ergiebt sich durch Integration

$$\log x + x + \log y - y = C$$

oder

$$\log(xy) = C + y - x.$$

3. $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Durch Integration folgt:

$$\text{arc}\sin x + \text{arc}\sin y = C.$$

Wir können dieser Gleichung noch eine andere Gestalt verleihen. Nehmen wir nämlich den Sinus der rechten und linken Seite und schreiben $\sin C = c$, so folgt:

$$\sin(\text{arc}\sin x + \text{arc}\sin y) = c,$$

$$\sin(\text{arc}\sin x)\cos(\text{arc}\sin y) + \cos(\text{arc}\sin x)\sin(\text{arc}\sin y) = c.$$

Benutzen wir die Regel $\text{arc}\sin x = \text{arc}\cos\sqrt{1-x^2}$, so folgt:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c.$$

4. Die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1+x}{1+y}$$

liefert die Normalform:

$$(y + y^2)\, dy = (x + x^2)\, dx.$$

Lösung: $\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + C.$

5. $$\frac{xy(1+x^2)}{1+y^2} = \frac{dx}{dy}.$$

Lösung: $(1 + x^2)(1 + y^2) = cx^2.$

6. $$\sin x \cos y \, dx - \cos x \sin y \, dy = 0.$$

Lösung: $\cos y = c \cos x.$

7. $$(y^2 + xy^2)\, dx + (x^2 - yx^2)\, dy = 0.$$

Lösung: $\log\left(\frac{x}{y}\right) = c + \frac{y+x}{xy}.$

8. $$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} = 0.$$

Lösung: $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C.$

238. Vielfach gelingt es, die Lösung der Differentialgleichung durch **Substitution einer neuen Variabelen** zu ermitteln. Um z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy}$$

zu lösen, setzen wir $y = \sqrt{xv}$ und finden $\frac{dx}{x} + dv = 0$, woraus:

$$\log x + \frac{y^2}{x} = c$$

gewonnen wird.

Man löse die Differentialgleichung:

$$(y - x)\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = n(1+y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

239. Sind M und N **homogene** Funktionen gleicher Dimension in x und y, so benutze man die Substitution $\boldsymbol{y = vx}$ und gelangt zu einer Gleichung zwischen x und v, in der die Variabelen getrennt werden können.

Beispiel 1. $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0.$

Man setze $y = vx$ und findet:

$$dy = v\, dx + x\, dv,$$

$$v x\, dx + (2x\sqrt{v} - x)(v\, dx + x\, dv) = 0,$$
$$2 x v^{\frac{3}{2}}\, dx + (2x^2\sqrt{v} - x^2)\, dv = 0,$$
$$\frac{2\, dx}{x} + \frac{2\sqrt{v} - 1}{v^{\frac{3}{2}}}\, dv = 0,$$
$$2\frac{dx}{x} + \left(\frac{2}{v} - v^{-\frac{3}{2}}\right) dv = 0,$$
$$2 \log x + 2 \log v + 2 v^{-\frac{1}{2}} = 2C$$
$$\log (xv) + v^{-\frac{1}{2}} = C,$$
$$\log y + \sqrt{\frac{x}{y}} = C.$$
$$\text{Lösung:} \quad y = c\, e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}},$$

wo c eine willkürliche Konstante ist.

Beispiel 2. $\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} + 1 - \sqrt{\frac{x}{y}}.$

Man setze wieder $y = xv$ und wird als Lösung finden:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} + \log\left[(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x - y)^{\frac{1}{2}}\right] = C.$$

Beipiel 3. $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$

$$\text{Antwort:} \quad x^2 = 2Ay + A^2.$$

Man kann übrigens bei der Lösung von Differentialgleichungen auf verschiedenen Wegen zu Antworten gelangen, die gestaltlich ganz verschieden sind, aber gleichwohl dieselbe Lösung darstellen.

4. Man löse:

$$(x^3 + 3xy^2)\, dx + (y^3 + 3x^2 y)\, dy = 0.$$
$$\text{Antwort:} \quad x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C.$$

5. Man löse:

$$y^2 + (xy + x^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$
$$\text{Antwort:} \quad xy^2 = C(2y + x).$$

6. Man löse:

$$\left(x - y \cos\frac{y}{x}\right) dx + x \cos\frac{y}{x} \cdot dy = 0.$$
$$\text{Antwort:} \quad x = c \cdot e^{-\sin\frac{y}{x}}.$$

7. $(y-x)\,dy + y\,dx = 0.$ Antwort: $2y = c\,e^{-\frac{x}{y}}.$

8. $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2+y^2}\,dx = 0.$ Antwort: $x^2 = c^2 + 2cy.$

9. $x + y\dfrac{dy}{dx} = 2y.$ Antwort: $(x-y)\,e^{\frac{x}{x-y}} = C.$

240. Bei Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

führen wir neue Variabelen w und v durch:

$$\boldsymbol{x = w + \alpha, \quad y = v + \beta}$$

ein, wobei wir α und β derart wählen, dafs in den mit dw und dv multiplizierten Ausdrücken die konstanten Glieder fortfallen.

So folgt z. B. bei der Differentialgleichung:

$$(3x - 2y + 4)\,dx + (2x - y + 1)\,dy = 0,$$

da $dx = dw$ und $dy = dv$ ist, als transformierte Gleichung:

$$(3w + 3\alpha - 2v - 2\beta + 4)\,dw + (2w + 2\alpha - v - \beta + 1)\,dv = 0.$$

Hier wählen wir nun α und β derart, dafs

$$3\alpha - 2\beta + 4 = 0, \quad 2\alpha - \beta + 1 = 0$$

zutrifft, woraus:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 5$$

folgt. Die Substitution hat dieserhalb die Gestalt

$$x = w + 2, \quad y = v + 5,$$

worauf die neue Differentialgleichung homogen ausfällt.

Übungsaufgabe:

$$(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0.$$

Antwort: $(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = c.$

Übungsaufgabe:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x - y + 1}{2y - x - 1} = 0.$$

Antwort: $x^2 - xy + y^2 + x - y = c.$

241. Als ein **totales Differential** bezeichnet man die Änderung einer Funktion $f(x, y)$ von zwei *unabhängigen* Variabelen x, y, welche bei *gleichzeitiger* Änderung beider Variabelen x, y um Differentiale dx und dy eintritt. (Man vergl. die Definition des *„partiellen"* Differentialquotienten S. 45, sowie Art. 83.)



Steht in der Differentialgleichung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

links das totale Differential einer Funktion $f(x, y)$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

wie man leicht aus den Gleichungen $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ ableitet (cf. Gleichung (17) S. 165). In diesem Falle ist $f(x, y) = c$ die Lösung der Differentialgleichung. So hat man z. B. in:

$$(x^3 - 3x^2y)\,dx + (y^3 - x^3)\,dy = 0$$

links ein totales Differential. Es wird demnach gelten:

$$x^3 - 3x^2y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Integriert man hier, indem man y als konstant ansieht, in Bezug auf x, so hat man als „Integrationskonstante“ eine noch unbekannte Funktion Y von y allein hinzuzufügen:

$$f(x, y) = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3y + Y.$$

Differenzieren wir jetzt nach y, so mufs das Resultat gleich N sein:

$$-x^3 + \frac{dY}{dy} = y^3 - x^3,$$

$$\frac{dY}{dy} = y^3 \quad \text{und also} \quad Y = \tfrac{1}{4}y^4 + c.$$

Als Lösung der Differentialgleichung gewinnt man somit:

$$\tfrac{1}{4}x^4 - x^3y + \tfrac{1}{4}y^4 + c = 0,$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet.

242. Erreicht man bei der Gleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ durch Zusatz eines Faktors, dafs die multiplizierte Gleichung links ein totales Differential aufweist, so bezeichnet man den Faktor als einen **integrierenden Faktor** der Differentialgleichung (cf. Art. 83). Wegen der genaueren Theorie der integrierenden Faktoren müssen wir auf die ausführlicheren Lehrbücher über höhere Analysis verweisen.

243. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Diese Gleichungen haben die Gestalt:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

wo P und Q irgend welche Funktionen von x allein sind.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung (1) ist folgende: Setzen wir $\int P\,dx$ zur Abkürzung gleich X, so gilt für y die Darstellung:

$$y = e^{-X}\left(\int e^X Q\,dx + C\right), \tag{2}$$

wo C eine willkürliche Konstante ist.

Man kann den Beweis dieser Angabe in der Art führen, daſs man den angegebenen Ausdruck von y in die gegebene Differentialgleichung einträgt und zeigt, daſs dieselbe hierdurch befriedigt wird.

Diese Rechnung nimmt folgenden Verlauf: Aus (2) folgt:

$$y e^X = \int e^X Q\,dx + C. \tag{3}$$

Differenziert man diese Gleichung nach x und beachtet, daſs $\frac{dX}{dx} = P$ zutrifft, so folgt aus (3):

$$\frac{dy}{dx} e^X + y e^X P = e^X Q \tag{4}$$

oder $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, was die ursprüngliche Gleichung ist.

Um demnach umgekehrt die Lösung (2) aus der Gleichung (1) zu gewinnen, multipliziere man letztere mit e^X, wodurch (4) entsteht und gehe durch Integration zur Gleichung (3), welche letztere nach Forthebung von e^X zum Resultate (2) führt.

Wir haben bereits oben (S. 266) die Gleichung (1) in die symbolische Form:

$$(\theta + P)y = Q \quad \text{oder} \quad y = (\theta + P)^{-1} Q$$

gekleidet und erkennen demnach jetzt die Bedeutung der zu $(\theta + P)$ inversen Operation $(\theta + P)^{-1}$. In der That, setzen wir wieder

$$\int P\,dx = X,$$

so ist die **Bedeutung der Operation** $(\theta + P)^{-1} Q$:

$$e^{-X}\left(\int e^X Q\,dx + C\right). \tag{5}$$

Insbesondere hat man für $Q = 0$ offenbar: $(\theta + P)^{-1} 0 = C \cdot e^{-X}$. Ist andrerseits P einer Konstanten a gleich und auſserdem $Q = 0$, so gilt $(\theta + a)^{-1} 0 = Ce^{-ax}$, wo C eine willkürliche Konstante ist. Wir besprachen diesen Fall bereits in Art. 168.

Ist ferner Q einer Konstanten gleich, etwa $Q = n$, während P nach wie vor gleich a ist, so gilt:

$$(\theta + a)^{-1} n = e^{-ax}\left(\int n e^{ax}\,dx + C\right),$$

(6) $$(\theta + a)^{-1} n = Ce^{-ax} + \frac{n}{a},$$

wo wieder C eine willkürliche Konstante ist (cf. Art. 169).

Setzt man weiter $Q = e^{bx}$, so hat man:

$$(\theta + a)^{-1} e^{bx} = e^{-ax}\left(\int e^{(a+b)x} dx + C\right),$$

(7) $$(\theta + a)^{-1} e^{bx} = Ce^{-ax} + \frac{1}{a+b} e^{bx}.$$

Man zeigt leicht, daſs im Spezialfalle $a = -b$ die Gleichung:

$$y = (C + x) e^{-ax}$$

gilt.

Setzen wir etwa noch $Q = b \sin(cx + m)$, so gilt:

$$(\theta + a)^{-1}[b \sin(cx + m)] = e^{-ax}\left(b\int e^{ax} \sin(cx + m)\, dx + C\right),$$

(8) $$(\theta + a)^{-1}[b \sin(cx + m)]$$
$$= Ce^{-ax} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin\left(cx + m - \operatorname{arctang}\frac{c}{a}\right).$$

244. Beispiel. In einem **elektrischen Stromkreise** sei V die Spannung zur Zeit t. Ferner sei C der Strom, R der Widerstand und L die Selbstinduktion. Dann haben wir die wohlbekannte Beziehung:

$$V = RC + L\frac{dC}{dt},$$

oder

$$\frac{dC}{dt} + \frac{R}{L} C = \frac{1}{L} V.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{R}{L} \cdot dt = \frac{R}{L} t,$$

und folglich:

(1) $$C = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} V \cdot dt + A\right\},$$

worin A eine Konstante bedeutet.

Jetzt wollen wir verschiedene Einzelfälle unterscheiden:

1) Es möge zur Zeit 0 die Spannung *plötzlich* von ihrem früheren Werte V_1 zu einem anderen konstanten Werte V_2 übergehen. Wir müssen also für $t > 0$ in die Gleichung (1) $V = V_2$ einsetzen und erhalten dann:

$$C = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{R} V_2 e^{\frac{R}{L}t} + A\right\} = \frac{V_2}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Um die Konstante A zu bestimmen, benutzen wir die Beziehung, dafs bei $t = 0$ die Stromstärke $C = \frac{V_1}{R}$ ist. Daraus ergiebt sich aber: $\frac{V_1}{R} = \frac{V_2}{R} + A$, sodafs $A = \frac{V_1 - V_2}{R}$ wird. Wir erhalten also:

$$C = \frac{V_2}{R} - \frac{V_2 - V_1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{2}$$

War z. B. $V_1 = 0$, so ergiebt sich:

$$C = \frac{V_2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt das Anwachsen des Stromes, wenn der vorher offene Stromkreis plötzlich geschlossen wird.

Ist andrerseits $V_2 = 0$, so lautet die Gleichung für die Stromstärke:

$$C = \frac{V_1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}; \tag{4}$$

sie zeigt uns das Verschwinden eines Stromes, wenn die elektromotorische Kraft plötzlich zu wirken aufhört.

Der Leser möge diese Werte von C als Funktionen der Zeit durch Kurven darstellen. Zu Grunde lege er dabei etwa folgende Daten: in Gleichung (3): $V_2 = 100$ Volt, $R = 1$ Ohm, $L = 0{,}01$ Henry. Ebenso setze er in Gleichung (4): $V_1 = 100$ Volt ein und vergleiche Artikel 169.

2) Es möge zur Zeit $t = 0$ eine elektromotorische Kraft einsetzen, welche sich sinusartig ändert:

$$V = V_0 \sin qt.$$

Dann wird:

$$C = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{V_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \sin qt \cdot dt + A\right\},$$

$$C = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{V_0}{L}\,\frac{e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{R}{L}\sin qt - q\cos qt\right)}{\frac{R^2}{L^2} + q^2} + A\right\}.$$

Setzen wir nun $\frac{L}{R}q = \operatorname{tang} m$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$C = A e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \sin(qt - m). \tag{5}$$

Die Gröfse des konstanten Faktors A in dem mit wachsendem t verschwindenden Ausdruck $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ hängt dabei von den Anfangsbedingungen ab. Ist z. B. $C = 0$ für $t = 0$, so wird:

$$0 = A - \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \sin m,$$

oder

$$0 = A - \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}} \cdot \frac{Lq}{\sqrt{R^2 + L^2 q^2}}.$$

Man gewinnt somit für die Konstante A den Ausdruck:

$$A = \frac{V_0 L q}{R^2 + L^2 q^2}.$$

Der Leser möge für verschiedene Beispiele die Stromkurven zeichnen, indem er auch andere Anfangsbedingungen wählt.

245. Beispiel. Ein Körper von der Masse M bewege sich mit einer Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit, welche seiner Bewegung einen Widerstand von der Gröfse fv entgegensetzt. Treibend wirke dagegen auf den Körper eine veränderliche Kraft F, welche eine gegebene Funktion der Zeit sei. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} + fv = F.$$

Man beachte, dafs dieser Fall genau dem elektrischen Vorgange entspricht, wenn M für L, f für R, F für die Spannung V und v für C gesetzt wird; wir erhalten demgemäfs auch genau dieselben Lösungen wie vorhin, wenn wir einmal F konstant setzen, oder wenn wir ein anderes Mal annehmen, dafs F von einem konstanten Werte F_1 plötzlich auf einen anderen konstanten Wert F_2 überspringt, oder endlich, falls wir voraussetzen, dafs F einem Gesetze von der Form $F_0 \sin qt$ folge.

Von dieser Analogie kann man bei dem Studium der elektrischen Vorgänge häufig nützliche Anwendung machen. Sehr leicht liefse sich z. B. ein mechanisches Modell konstruieren, welches veranschaulicht, wie elektrische Ströme beim plötzlichen Einsetzen oder Aufhören der Spannung entstehen oder verschwinden.

Die Lösung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist für die Berechnungen des praktischen Ingenieurs von so grofser Bedeutung, dafs wir diesen Gegenstand in Kapitel II aufnahmen und viele Beispiele dafür gaben. Wir empfehlen dem Studierenden, jetzt den Artikel 151 nochmals zu lesen.



246. Beispiel. $x\frac{dy}{dx} = ay + x + 1$

oder

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x}y = 1 + \frac{1}{x}.$$

Hier gilt:

$$\int \frac{-a}{x}dx = X = -a\log x.$$

Berücksichtigt man, daſs

$$e^{-a\log x} = x^{-a},\quad e^{a\log x} = x^a$$

ist, so findet man als Lösung y der vorgelegten Differentialgleichung:

$$y = x^a\left\{\int x^{-a}\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C\right\},$$

$$y = x^a\left\{\int (x^{-a} + x^{-a-1})\,dx + C\right\},$$

$$y = x^a\left\{\frac{x^{1-a}}{1-a} + \frac{x^{-a}}{-a} + C\right\},$$

$$y = \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a} + Cx^a,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist.

247. Zwischen den Oberflächen EF und AB eines **Zapfens** und seines **Lagers** befinde sich beständig eine schlüpfrige Flüssigkeit. $OC = h_0$ sei die geringste Entfernung zwischen beiden Oberflächen. Im Abstande x, gemessen längs des Bogens OA, sei h die Dicke der Flüssigkeitsschicht. Hier nehmen wir irgendwo auf der Normalen, welche die Dicke der Flüssigkeit miſst, einen Punkt in der Flüssigkeit an, in einem Abstande y vom Zapfen; an dieser Stelle sei u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit. Bezeichnet nun noch p den Druck in der Flüssigkeit an der fraglichen Stelle, so gilt folgende Gleichung, die wir hier nicht weiter ableiten können:

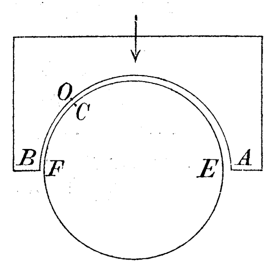


Fig. 103.

(1) $$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}.$$

Darin bezeichnet der Koeffizient μ die Viskosität des Schmiermittels. Weiter wollen wir mit u_0 die lineare Geschwindigkeit des Zapfens bezeichnen. Alsdann folgt aus (1), wie wir hier leider nicht ausführlich nachweisen können, die Gleichung:

(2) $$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{3}{h}\cdot\frac{dh}{dx}\frac{dp}{dx} + \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx} = 0.$$

Bezeichnen wir nun $\frac{dp}{dx}$ mit Φ, so erhalten wir:

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{3}{h}\cdot\frac{dh}{dx}\cdot\Phi + \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx} = 0.$$

Hier haben wir wieder eine lineare Differentialgleichung von der Gestalt (1) Artikel 243, da ja h als Funktion von x gegeben ist.

Wir setzen:

$$P = \frac{3}{h}\frac{dh}{dx} \quad \text{und} \quad X = \int P \cdot dx.$$

Dann wird

$$X = \int \frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dx}\, dx = 3 \cdot \log h,$$

also

$$e^X = h^3.$$

Wir erhalten daraufhin gemäſs Artikel 243:

$$\Phi = h^{-3}\left\{\int -h^3 \frac{6\mu u_0}{h^3}\frac{dh}{dx}\, dx - C\right\},$$

$$-\Phi = -\frac{dp}{dx} = h^{-3}(6\mu u_0 h + C) = \frac{6\mu u_0}{h^2} + \frac{C}{h^3}.$$

Zur weiteren Entwicklung müssen wir die Beziehung zwischen h und x kennen. Wir kommen nun der Wirklichkeit ziemlich nahe, wenn wir setzen: $h = h_0 + ax^2$ *); nehmen wir dies als richtig an, so erhalten wir:

$$p = C' - \frac{6\mu u_0}{2h_0}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)$$

$$- C\left\{\frac{x}{h^2} + \frac{3}{2h_0}\left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)\right\},$$

$$p = C' - C\frac{x}{h^2} - \left(\frac{x}{h} + \frac{1}{\sqrt{ah_0}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{a}{h_0}}\right)\left(\frac{6\mu u_0}{2h_0} + \frac{3C}{2h_0}\right).$$

Zahlenbeispiel. Es sei $OB = 2{,}59$ cm, $OA = 11{,}09$ cm, $\mu = 2{,}16$, $h_0 = OC = 0{,}001135$ cm, $a = 0{,}0000082$, $u_0 = 80\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Nach diesen Daten berechne man zunächst C und C', indem man für die Punkte B und A den Druck $p = 0$ setzt.

Nun bestimme man den Druck p für die verschiedenen Werte von x und trage ihn als Funktion von x auf Millimeterpapier auf. Die Reibung pro qcm Fläche beträgt $\mu\frac{du}{dy}$ bei $y = 0$; für die gesamte Reibung F ergiebt sich also:

$$-F = \int \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\, dx + \mu u_0 \int \frac{dx}{h}$$

zwischen den Grenzen A und B. Die gesamte Belastung des Lagers beträgt $\int p \cdot dx$ kg zwischen den Grenzen A und B, vorausgesetzt, daſs AB nur ein kleiner Teil des Zapfenumfanges ist, und kann in jedem Falle leicht ermittelt werden.

Der Zapfen ist bei allen diesen Betrachtungen als unendlich lang in der Richtung senkrecht zum Papier angenommen, während die Kräfte immer auf 1 cm Zapfenlänge bezogen sind.

Will der Leser sich einige Zeit mit diesen Gegenständen beschäftigen, so mag er die bezügliche Abhandlung von Prof. O. Reynolds in Bd. 177 der *Philosophical Transactions* studieren.

*) Dieses Näherungsgesetz für h bewirkt eine sehr wesentliche Kürzung der Rechnung.

248. Beispiel. Man löse die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 2e^{3x}.$$

Wir schreiben diese Gleichung symbolisch in der Gestalt:

$$(\theta^2 - 4\theta + 3)y = 2e^{3x}$$

und folgern somit für y die symbolische Darstellung:

$$y = (\theta^2 - 4\theta + 3)^{-1} 2e^{3x}.$$

Nun ist aber:

$$(\theta^2 - 4\theta + 3)^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta - 3} - \frac{1}{\theta - 1}\right).$$

Nehmen wir an, dafs wir auch noch den Faktor $\frac{1}{2}$, der hier rechts auftritt, gegen den Faktor 2 bei $2e^{3x}$ fortheben dürfen, so würde sich die gesuchte Funktion y symbolisch so darstellen:

$$y = (\theta - 3)^{-1}e^{3x} - (\theta - 1)^{-1}e^{3x}.$$

Auf Grund von (7) Art. 243 finden wir daraufhin:

$$y = (C + x)e^{3x} - (C'e^x + \tfrac{1}{2}e^{3x})$$

oder

$$y = (C_1 + x)e^{3x} + C_2 e^x.$$

249. Es sei eine Differentialgleichung von der Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

vorgelegt, wo P und Q, wie oben, Funktionen von x allein sind.

Man bringe den Faktor y^n als Divisor auf die linke Seite der Gleichung und substituiere $z = y^{1-n}$; die Gleichung wird dann linear.

Beispiel. $$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2.$$

Vermöge der Substitution $z = y^{-1}$ findet man:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{xz}{1 - x^2} = -\frac{ax}{1 - x^2},$$

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x^2} = -\tfrac{1}{2}\log(1 - x^2),$$

$$e^{-\frac{1}{2}\log(1 - x^2)} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$z = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left[\int (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-ax)\,dx + C\right].$$

Antwort:

$$y^{-1} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left[-a(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + C\right] = -a + C\sqrt{1 - x^2}.$$



Übungsaufgabe.

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$$

$$\text{Antwort:}\quad \frac{1}{y} = 1 + Cx + \log x.$$

250. 1. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2y^2 = 0.$$

Hier handelt es sich um eine Differentialgleichung **erster Ordnung** und **zweiten Grades**, die jedoch in ein Paar von Differentialgleichungen ersten Grades zerfällt.

Für $\frac{dy}{dx}$ ergeben sich in der That zwei Werte; der erste führt auf die Gleichung: $\frac{dy}{dx} = ay$, deren Lösung $\log y - ax - A_1 = 0$ ist, der zweite ergiebt $\frac{dy}{dx} = -ay$ mit der Lösung: $\log y + ax - A_2 = 0$.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x.$$

Diese Gleichung ist von der **ersten Ordnung** und vom **dritten Grade.** Man hat:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{und also} \qquad y = \tfrac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}} + C.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 12 = 0,$$

wobei es sich wieder um eine Gleichung **erster Ordnung** und **zweiten Grades** handelt. Man findet:

$$\left(\frac{dy}{dx} - 4\right)\left(\frac{dy}{dx} - 3\right) = 0$$

und also die beiden Lösungen:

$$y - 4x + c_1 = 0, \qquad y - 3x + c_2 = 0.$$

251. Die sogenannte Clairaut'sche Differentialgleichung:

(1) $$y = xp + f(p),$$

in welcher $f(p)$ irgend eine Funktion von $p = \frac{dy}{dx}$ darstellen soll, ist von der ersten Ordnung.

Durch Differentiation der Gleichung (1) nach x folgt:

$$\left(x + \frac{df(p)}{dp}\right)\frac{dp}{dx} = 0, \tag{2}$$

sodafs entweder:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3}$$

gilt oder:

$$x + \frac{df(p)}{dp} = 0. \tag{4}$$

Im ersten Falle ergiebt sich $p = c$, wobei c konstant ist; durch Einsetzung dieses Wertes in (1) gewinnt man dann:

$$y = cx + f(c) \tag{5}$$

als die *allgemeine* Lösung.

Eliminieren wir p jetzt zwischen den Gleichungen (1) und (4), so gewinnen wir eine neue Lösung, welche keine willkürliche Konstante enthält. Wir gelangen so zu der sogenannten *singulären Lösung* der Differentialgleichung, in deren Theorie wir leider nicht tiefer einführen können. Die der singulären Lösung zugehörige Kurve stellt die *Enveloppe* oder *einhüllende Kurve* der durch (5) gelieferten Geradenschar dar (cf. Art. 225).

Beispiel einer Clairaut'schen Differentialgleichung.

$$y = xp + \frac{m}{p}.$$

Die allgemeine Lösung (5) ist hier:

$$y = cx + \frac{m}{c},$$

eine Schar von geraden Linien mit dem „Parameter" c darstellend.

Gleichung (4) ergiebt:

$$x = -\frac{d}{dp}\left(\frac{m}{p}\right) \quad \text{oder} \quad x = \frac{m}{p^2} \quad \text{und also} \quad p = \sqrt{\frac{m}{x}}.$$

Setzt man diesen Wert p in die gegebene Gleichung ein, so folgt:

$$y = 2\sqrt{mx} \quad \text{oder} \quad y^2 = 4mx.$$

Hierdurch ist eine Parabel dargestellt, welche wir schon in Art. 225 als Enveloppe einer Geradenschar kennen lernten.

Diese Kurve liefert deshalb eine Lösung der Differentialgleichung, weil im einzelnen Punkte x, y der zur Parabel gehörende Wert $\frac{dy}{dx}$ derselbe ist, wie bei der durch diesen Punkt x, y laufenden Geraden der Schar.

252. Bei einer Differentialgleichung von der Gestalt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

kann man die Lösung y durch n **auf einander folgende Integrationen** finden. Beispiele hierzu haben wir schon mehrfach betrachtet.

253. Die Gleichungen von der Gestalt $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$ werden so behandelt, daſs man zunächst mit $2\frac{dy}{dx}dx = 2dy$ multipliziert:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = 2f(y)\,dy,$$

worauf man durch Integration findet:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + C.$$

Zieht man jetzt die Quadratwurzel, so entspringt eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche durch Trennung der Variabeln lösbar ist.

Es sei speziell:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y.$$

Verfahren wir nach der gegebenen Vorschrift, so folgt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int a^2 y\,dy + C = a^2y^2 + C,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2y^2 + C},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2 + C}} = dx.$$

Durch Integration folgt:

(1) $$x = \frac{1}{a}\log\left(ay + \sqrt{a^2y^2 + C}\right) + C'.$$

Wir setzen diese Gleichung noch in die Gestalt:

$$ce^{ax} = ay + \sqrt{a^2y^2 + C}$$

und folgern:

$$c^2e^{2ax} - 2ay\,ce^{ax} = C,$$

$$y = \frac{c}{2a}e^{ax} - \frac{C}{2ac}e^{-ax}$$

oder:

(2) $$y = Ae^{ax} + Be^{-ax}.$$

Trotz der scheinbar verschiedenen Gestalt handelt es sich hier doch um dieselbe Lösung y wie in (1). Zur Lösung (2) werden wir direkt geführt, wenn wir auf die vorgelegte Gleichung die in Art. 159 für die linearen Differentialgleichungen entwickelte Vorschrift anwenden.

254. Man löse die Gleichung dritter Ordnung ersten Grades:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = a \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Man setze $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, sodaſs $\frac{dq}{dx} = aq$ folgt. Hieraus ergiebt sich:

$$q = be^{ax} \quad \text{und also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} e^{ax} + C,$$

$$y = \frac{b}{a^2} e^{ax} + Cx + C'$$

oder

$$y = Ae^{ax} + Cx + C',$$

wo A, C, C' willkürliche Konstanten sind.

Auch diese Differentialgleichung kann man übrigens nach der in Art. 159 für die linearen Differentialgleichungen gegebenen Regel lösen.

255. Man löse:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Schreiben wir $\frac{dy}{dx} = p$, so heiſst die Gleichung:

$$a \frac{dp}{dx} = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{a\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx,$$

sodaſs wir finden:

$$\frac{x}{a} = \log\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right) + C'$$

oder

$$Ce^{\frac{x}{a}} - p = \sqrt{p^2 + 1}.$$

Quadrieren wir rechts und links, so folgt:

$$p = \tfrac{1}{2} Ce^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2C} e^{-\frac{x}{a}} = \frac{dy}{dx}.$$

Jetzt folgt durch erneute Integration:

$$y = \frac{a}{2} Ce^{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2C} e^{-\frac{x}{a}} + c,$$

wo C und c willkürliche Konstanten sind.

256. Allgemeine Übungsaufgaben über Differentialgleichungen.

(1) $$(a^2 + y^2)\,dx + \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0.$$

Antwort: $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{y}{a}\right) = c.$

(2) $$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}\,y = -\frac{1}{2x(1+x^2)}.$$

Antwort: $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(c - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right).$

(3) $$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Antwort: $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$

(4) $$\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + y\right) = x(x+y).$$

Antwort: $(2y - x^2 - c)\,[\log(x + y - 1) + x - c] = 0.$

(5) $$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2ax^3y^3.$$

Antwort: $y = [Ce^{2x^2} + \frac{1}{2}a\,(2x^2+1)]^{-\frac{1}{2}}.$

(6) $$1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Antwort: $y^2 = 2cx + c^2.$

(7) $$x\frac{dy}{dx} + y = y^2\log x.$$

Antwort: $y = (cx + \log x + 1)^{-1}.$

(8) $$y = 2x\frac{dy}{dx} + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Antwort: $y^2 = 2cx + c^3.$

(9) Man löse:

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}\,dy = 0$$

erstlich nach Vorschrift von Art. 241, zweitens nach der für die homogenen Gleichungen in Art. 239 entwickelten Regel.

Antwort: $x^2 - y^2 = cx.$

(10) Man löse:

$$\frac{2x\,dx}{y^3} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$$

nach der Methode von Art. 241.

Antwort: $x^2 - y^2 = cy^3$.

(11) $$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Antwort: $y = (x+1)^2 [\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C]$.

(12) $$(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2.$$

Antwort: $y - a \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{a} = c$.

(13) $$xy(1+xy^2)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Antwort: $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{1}{2}y^2}$.

(14) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{a^2}{x^2} = 0.$$

Antwort: $(y - a\log x - c)(y + a\log x - c') = 0$.

(15) $$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Antwort: $y = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)e^{-x}$.

(16) $$\frac{d^2x}{dt^2} - 2f\frac{dx}{dt} + f^2x = e^t.$$

Antwort: $x = (a_1 + a_2t)e^{ft} + \frac{e^t}{(f-1)^2}$.

(17) $$\frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n.$$

Antwort: $y = (x+1)^n(e^x + c)$.

(18) $$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \sin(\varphi - \vartheta).$$

Antwort: $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \vartheta}{2}\right) = \varphi + c$.

(19) $$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2.$$

Antwort: $\frac{1}{y} = c\sqrt{1-x^2} - a$.

(20) $$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x.$$

Antwort:
$$y = C_1e^{-2x} + e^x\left[\left(C_2 - \frac{x}{20}\right)\cos x + \left(C_3 + \frac{3x}{20}\right)\sin x\right].$$

(21) Man führe in die Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

an Stelle von x eine neue unabhängige Variabele t durch $x = \sin t$ ein und löse die Gleichung.

(22) Desgleichen substituiere man in:

$$(a^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

t an Stelle von x auf Grund der Beziehung $x = a \operatorname{tang} t$ und löse die Gleichung.

257. Man beweise:

1. $$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{d^2t}{ds^2} : \left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

2. $$\frac{d^3s}{dt^3} = -\left[\frac{dt}{ds}\frac{d^3t}{ds^3} - 3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\right] : \left(\frac{dt}{ds}\right)^5.$$

3. Man zeige, dafs sich an die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ die folgende Darstellung des zweiten Differentialquotienten schliefst:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

und berechne einen entsprechenden Ausdruck für $\frac{d^3y}{dx^3}$.

4. Ist $x = e^t$, so beweise man:

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt},$$

desgleichen

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\frac{dy}{dt},$$

und

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d}{dt} - 2\right)\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\frac{dy}{dt}.$$

Natürlich sind hier rechter Hand die Produkte so zu verstehen, dafs $\frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}$ die Operation $\frac{d^2}{dt^2}$ bedeutet und $\frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}$ für $\frac{d^3}{dt^3}$ steht.

5. Man setze in der Differentialgleichung:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

an Stelle von x die unabhängige Variabele t vermöge der Beziehung $x = e^t$ ein und löse die Differentialgleichung.

258. Wenn wir die Länge des Ellipsenbogens nach der Methode des Art. 47 zu bestimmen suchen, so werden wir zu einem sogenannten elliptischen Integral zweiter Gattung geführt, welches man mit $\boldsymbol{E(k, x)}$ bezeichnet. Man kann den Wert desselben vermöge einer unendlichen Reihe angenähert berechnen. Es sind aber auch Tafeln für die Werte $E(k, x)$ berechnet, welche den beiden Gröſsen k und x entsprechend zwei Eingänge haben.

Betrachten wir ein Pendel mit nicht zu kleinem Ausschlagswinkel und versuchen wir die Schwingungsdauer als Funktion des Ausschlagswinkels zu bestimmen, so müssen wir zu dem elliptischen Integral erster Gattung unsere Zuflucht nehmen, welches man mit $\boldsymbol{F(k, x)}$ bezeichnet.

Man kann zeigen, daſs das Integral eines algebraischen Ausdrucks, welcher in x und der Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion dritten oder vierten Grades von x rational aufgebaut ist, auf eine Summe von Integralen der folgenden drei Gattungen reduziert werden kann:

$$\text{I.} \qquad F(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{oder} \quad F(k, \sin\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$$\text{II.} \qquad E(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx \quad \text{oder} \quad E(k, \sin\theta) = \int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\cdot d\theta,$$

$$\text{III.} \qquad \Pi(n, k, x) = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

oder

$$\Pi(n, k, \sin\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Die Gröſse k, welche man als positiv und kleiner als 1 voraussetzen darf, wird als „*Modul*“ bezeichnet; die Zahl n heiſst der *Parameter* des Integrals dritter Gattung.

Der Übergang von der Gestalt der Integrale in x zu der in θ wird durch die Substitution $x = \sin\theta$ vermittelt. Sind die Grenzen der Integrale F und E $x = 0$ und $x = 1$, resp. $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$, so spricht man von *vollständigen* Integralen; dieselben werden kurz durch K und E bezeichnet. θ heiſst die *Amplitude*, und $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ wird durch $\Delta\theta$ bezeichnet.

Wir setzen unter der Annahme, daſs k konstant erhalten wird:

$$u = F(k, x) = F(k, \sin\theta).$$

Alsdann bezeichnen wir θ genauer als „die Amplitude von u“ und schreiben:

$$\theta = \operatorname{am} u.$$

Daraufhin wird x gleich dem Sinus der Amplitude von u, $\sqrt{1-x^2}$ gleich dem Cosinus der Amplitude von u und $\sqrt{1-k^2x^2}$ gleich dem Delta der Amplitude von u. Als symbolische Bezeichnungen dieser Funktionen benutzt man:

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u.$$

Hier gelten dann die Regeln:

$$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1, \qquad \mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1$$

$$\frac{d\,\mathrm{am}\,u}{d\,u} = \mathrm{dn}\,u, \cdots,$$

$$\mathrm{am}\,(-u) = -\,\mathrm{am}\,u, \;\cdots.$$

Ferner hat man:

$$\mathrm{sn}\,(u \pm v) = \frac{\mathrm{sn}\,u \cdot \mathrm{cn}\,v \cdot \mathrm{dn}\,v \pm \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v},$$

und ähnliche Darstellungen gelten für $\mathrm{cn}\,(u \pm v)$ und $\mathrm{dn}\,(u \pm v)$.

Hieraus entspringen dann weiter Darstellungen von

$$\mathrm{sn}\,(u + v) + \mathrm{sn}\,(u - v), \;\cdots,$$

desgleichen von $\mathrm{sn}\,2u$, $\mathrm{cn}\,2u$ und $\mathrm{dn}\,2u$.

Man gelangt so zu einem ganzen System von Relationen für die elliptischen Funktionen, analog den Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

Auch kennt man, wie schon oben betreffs $E(k, x)$ bemerkt wurde, für jene Funktionen Reihenentwicklungen, welche Tafeln für die Funktionswerte zu berechnen gestatten. Legendre veröffentlichte Tafeln für die Integrale der beiden ersten Gattungen, mit deren Hilfe man die Werte der verschiedenen elliptischen Funktionen bestimmen kann. Würden wir vollständige und leicht zugängliche Tafeln besitzen, so würden die elliptischen Funktionen für die Praxis vielleicht eine ganz ähnliche Bedeutung gewinnen, wie die trigonometrischen.

259. Wir kehren jetzt zur **Differentiation der Funktionen von zwei oder mehreren unabhängigen Variabelen** zurück.

1. Setzen wir $u = z^2 + y^3 + zy$, so gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + z, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + y.$$

Nimmt man nunmehr z und y als Funktionen von x an, indem man setzt $z = \sin x$, $y = e^x$, so gilt $\dfrac{dy}{dx} = e^x$, $\dfrac{dz}{dx} = \cos x$, und es ist:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{dx} = (3y^2 + z)e^x + (2z + y)\cos x.$$

Transformiert man die rechte Seite auf x, so erhält man denselben Ausdruck, den man direkt gewinnt, wenn man $u = z^2 + y^3 + zy$ in x ausdrückt und dann nach x differenziert.

2. Aus $u = \sqrt{\dfrac{v^2 - w^2}{v^2 + w^2}}$ berechne man $\dfrac{du}{dx}$ unter der Voraussetzung, daſs v und w Funktionen von x sind.

3. Man berechne $\dfrac{dy}{dx}$ aus $\sin(xy) = mx$.

4. Es sei $u = \arcsin \frac{z}{y}$, wo z und y Funktionen von x sind; man bestimme $\frac{du}{dx}$.

5. Man zeige für $u = \operatorname{arc tang} \frac{z}{y}$ die Richtigkeit der Formel:

$$du = \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2 + z^2}.$$

260. Übungsaufgabe. Man versuche die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial v}{\partial t} \tag{1}$$

durch eine Funktion v von der Gestalt $e^{\alpha x} \sin(qt + \gamma x)$ zu befriedigen und bestimme, wenn dies gelingt, α und γ dementsprechend. Insbesondere stelle man diejenige partikuläre Lösung her, welche $v = 0$ für $x = \infty$ und $v = a \sin qt$ für $x = 0$ liefert.

Durch Differentiation findet man:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} \sin(qt + \gamma x) + e^{\alpha x} \gamma \cos(qt + \gamma x),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x} \sin(qt + \gamma x) + \alpha\gamma e^{\alpha x} \cos(qt + \gamma x)$$
$$+ \alpha\gamma e^{\alpha x} \cos(qt + \gamma x) - e^{\alpha x} \gamma^2 \sin(qt + \gamma x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = q e^{\alpha x} \cos(qt + \gamma x).$$

Um also die Gleichung (1) für alle Werte von t und x zu befriedigen, hat man zu setzen:

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm \gamma,$$

sowie

$$2\alpha\gamma = \frac{q}{k}.$$

Nehmen wir $\frac{q}{k} > 0$ an, so folgt $\alpha = +\gamma$ und damit:

$$2\alpha^2 = \frac{q}{k}, \qquad \alpha = \pm \sqrt{\frac{q}{2k}} = \gamma.$$

Wir gewinnen, dem doppelten Zeichen in der letzten Gleichung entsprechend, zwei Ausdrücke, welche wir mit Hilfe zweier konstanter Koeffizienten A und B zur allgemeinen Lösung folgendermaſsen vereinigen:

$$v = Ae^{\alpha x} \sin(qt + \alpha x) + Be^{-\alpha x} \sin(qt - \alpha x).$$

Setzen wir noch $q = 2\pi n$, so ist $\alpha = \sqrt{\frac{2\pi n}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi n}{k}}$. Soll nun $v = 0$ für $x = \infty$ zutreffen, so muſs $A = 0$ genommen werden; soll ferner $v = a \sin qt$ für $x = 0$ bestehen, so muſs $B = a$ sein.



Die Antwort auf die gestellte Frage ist somit in der Gleichung enthalten:

(2) $$v = a e^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{k}}} \sin\left(2\pi n t - x\sqrt{\frac{\pi n}{k}}\right).$$

261. Man nehme an, dafs sich ein **materieller Punkt P in der ebenen Kurve SPQ** (Figur 104) bewegt. Die Koordinaten des Punktes zur Zeit t seien $\overline{AP} = x$ und $\overline{BP} = y$. Die den Axen parallelen Komponenten der Geschwindigkeit sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; entsprechend sind die Komponenten der Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. Die Polarkoordinaten von P sind $\overline{OP} = r$ und $\sphericalangle BOP = \vartheta$, wobei $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ gilt.

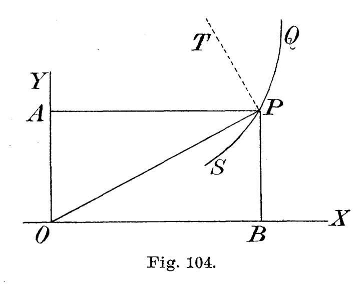


Fig. 104.

Die Komponente der Beschleunigung oder der Geschwindigkeit in beliebig vorgeschriebener Richtung wird nach denselben Regeln berechnet, wie bei den Kräften. So ist z. B. die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung OP:

(1) $$\frac{dx}{dt}\cos\vartheta + \frac{dy}{dt}\sin\vartheta$$

und in der zu OP senkrechten Richtung PT:

(2) $$-\frac{dx}{dt}\sin\vartheta + \frac{dy}{dt}\cos\vartheta.$$

Fafst man x und y als Funktionen von r und ϑ auf, so gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial\vartheta} = -r\sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = r\cos\vartheta.$$

Man findet daraus weiter:

(3) $$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$

(4) $$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\vartheta}{dt}$ folgt:

(5) $$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\vartheta + \frac{dy}{dt}\sin\vartheta,$$

(6) $$r\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{dx}{dt}\sin\vartheta + \frac{dy}{dt}\cos\vartheta.$$

Der Vergleich mit (1) und (2) zeigt, dafs $\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung OP und $r\frac{d\vartheta}{dt}$ diejenige in der Richtung PT darstellt. Vielen Lesern wird dies auch unmittelbar einleuchten.

Verfahren wir jetzt mit den Komponenten der Beschleunigung gerade so, wie soeben mit den Komponenten der Geschwindigkeit, so gewinnen wir als Komponente der Beschleunigung in der Richtung OP:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\vartheta, \tag{7}$$

sowie als Komponente in der Richtung PT:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\vartheta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\vartheta. \tag{8}$$

Andrerseits folgt durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (3) und (4) nach t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\cos\vartheta - \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)\sin\vartheta, \tag{9}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\sin\vartheta + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)\cos\vartheta. \tag{10}$$

Es folgt für die Komponente der Beschleunigung in der Richtung OP (was man direkt nicht so unmittelbar einzusehen vermag):

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \tag{11}$$

desgleichen für diejenige in der Richtung PT:

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right). \tag{12}$$

Der abgekürzt durch h zu bezeichnende Ausdruck $r^2\frac{d\vartheta}{dt}$ bedeutet offenbar den doppelten Inhalt derjenigen Fläche, die während einer Sekunde vom Radius vector überstrichen wird. Der Ausdruck (12) ist gleich $\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}$.

262. Es handele sich jetzt um eine **Zentralkraft**, und zwar um eine Anziehung in der Richtung PO (cf. Fig. 104). Die Kraft sei eine Funktion des Abstandes r vom anziehenden Zentrum; sie sei gegeben durch $mf(r)$, unter m die Masse des angezogenen Punktes



verstanden. Unter diesen Umständen verschwindet die in (12) dargestellte Komponente, sodafs wir gewinnen:

$$h = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{Const.}$$

Im Falle einer Zentralkraft wird hiernach der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreichen.

Indem wir $f(r)$ gleich der Beschleunigung in der Richtung PO setzen, folgt:

(13) $$f(r) = r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Andrerseits ist $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = h$ konstant. Sehen wir somit r als Funktion von ϑ an, so folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta}\frac{h}{r^2},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left[\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}\frac{h}{r^2} - 2\frac{h}{r^3}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]\frac{h}{r^2}.$$

Man kann daraufhin die Funktion $f(r)$, anstatt sie in der Gestalt (13) darzustellen, durch r und die Quotienten $\frac{dr}{d\vartheta}$, $\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}$ mit Hilfe der Konstanten h ausdrücken.

Schreiben wir $\frac{1}{r} = u$, so geht Gleichung (13) in die Form über:

(14) $$\boldsymbol{f(r) = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u\right)}.$$

Setzt man im speziellen $f(r) = ar^{-n} = au^n$, d. h. ist die Kraft umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung, so ergiebt (14):

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{a}{h^2} u^{n-2} = b \cdot u^{n-2}.$$

Multipliziert man hier mit $2\,du = 2\frac{du}{d\vartheta}d\vartheta$ und integriert, so folgt:

(15) $$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2 = \frac{2b}{n-1} u^{n-1} + c.$$

Wählen wir als Beispiel den Spezialfall, dafs die Kraft **umgekehrt proportional dem Quadrat** der Entfernung ist:

$$f(r) = ar^{-2} = au^2,$$

so liefert Gleichung (14):

$$au^2 = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u\right),$$

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{a}{h^2} = b,$$

unter b einen konstanten Wert verstanden. Setzen wir noch $w = u - b$, so wird:

$$\frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + w = 0,$$

eine Gleichung, deren allgemeine Lösung wir mit Hilfe von zwei unbestimmten Konstanten A, B in die Gestalt setzen:

$$w = A \cos(\vartheta + B).$$

Wir schreiben daraufhin, indem wir für A und B zwei neue Konstanten e und α einführen:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{a}{h^2}[1 + e \cos(\vartheta - \alpha)]. \tag{16}$$

Dies ist bekanntlich die Polargleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf den einen Brennpunkt als Pol. Die Gestalt dieses Kegelschnittes wird wesentlich durch die Konstanten e und α und damit durch die Anfangsbedingungen bestimmt sein.

Die Gleichung (14) setzt uns in den Stand, **bei gegebener Bahn des materiellen Punktes** das Gesetz der Zentralkraft anzugeben, welche diese Bahn erzeugt. Beschreibt der materielle Punkt bei Wirkung einer von einem Zentrum ausgehenden Kraft eine Ellipse um dieses Zentrum als *Mittelpunkt*, so findet man, dafs die Kraft direkt proportional der Entfernung ist. Allerdings ist es leichter, bei gegebenem Kraftgesetze die Bahn zu bestimmen. Ist die Kraft proportional dem Abstande selbst, so ist die Komponente in Richtung der Abscissenaxe direkt mit x, die in Richtung der Ordinatenaxe direkt mit y proportional; und zwar tritt beide Male *derselbe* Proportionalitätsfaktor auf. Hieraus ergiebt sich, dafs die Projektionen des Punktes auf die Axen je einfache harmonische Bewegungen *gleicher* Periode ausführen; daraus aber folgt für den materiellen Punkt selbst eine elliptische Bahn.

Ist die Anziehungskraft **umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung:**

$$f(r) = ar^{-3} = au^3,$$

so liefert Gleichung (14):

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{a}{h^2} u.$$

Hier kommen wir merkwürdiger Weise je nach den Anfangsbedingungen zu zwei ganz verschiedenen Gesetzen für u. Man hat, je nachdem $a > h^2$ oder $a < h^2$ zutrifft, die erste oder zweite der beiden folgenden Darstellungen für u:



1. $$u = Ae^{\alpha\vartheta} + Be^{-\alpha\vartheta}, \qquad \alpha^2 = \frac{a}{h^2} - 1,$$

2. $$u = A \sin \beta\vartheta + B \cos \beta\vartheta, \qquad \beta^2 = 1 - \frac{a}{h^2}.$$

263. Ist y eine Funktion von x, und setzt man $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, so kann man r als Funktion von ϑ ansehen. Ist andrerseits u eine Funktion der als unabhängig von einander geltenden x, y, so ist u auch eine Funktion der beiden unabhängigen Variabelen r und ϑ.

Durch die Schreibweise $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ etc. soll bekanntlich angedeutet werden (cf. Art. 37, Seite 65), daſs im ersten Falle bei konstantem y in Bezug auf x allein zu differenzieren ist, im zweiten Falle bei konstantem x allein in Bezug auf y.

Um die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in Polarkoordinaten auszudrücken, benutzen wir die Beziehungen:

(1) $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}.$$

Nun gilt aber:

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -r \sin \vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \vartheta.$$

Sieht man $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in den Gleichungen (1) und (2) als unbekannt an und löst nach jenen Unbekannten auf, so folgt:

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta},$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}.$$

Übt man die soeben auf u angewandte Operationsweise auf den in (3) gegebenen Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder den Ausdruck (4) für $\frac{\partial u}{\partial y}$ aus, so gelangt man auf diesem Wege zur Darstellung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten. Bei diesen Rechnungen irrt man sich sehr leicht und muſs sich bei jedem einzelnen Schritte sehr sorgfältig die

gerade zu vollziehende Differentiation überlegen. Man zeige die Richtigkeit der Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}.$$

264. Bei manchen Untersuchungen braucht man an Stelle der x, y, z Polarkoordinaten r, ϑ, φ für die Punkte des Raumes. Wir denken uns den Punkt O der Figur 105 als Mittelpunkt der Erde, OZ aber als Axe derselben. Die Axe OX laufe senkrecht zu OZ in der Art, daſs die Ebene ZOX den Meridian von Greenwich liefert. Endlich werde OY senkrecht auf der Ebene ZOX errichtet.

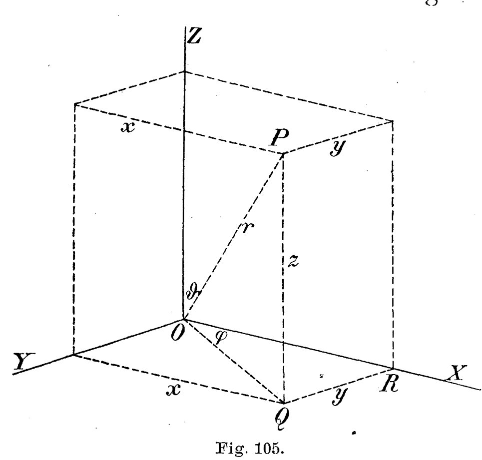


Fig. 105.

Die Lage des einzelnen Punktes P ist definiert durch seinen Abstand x von der Ebene ZOY, den Abstand y von der Ebene ZOX und endlich den Abstand z von der Äquatorebene XOY. Mit r bezeichnen wir den Abstand $\overline{OP}$ des Punktes P vom Zentrum O. Es sei ferner φ die nach Westen gezählte geographische Länge, d. h. der Neigungswinkel der Ebenen POZ und XOZ; man kann auch, falls Q der Fuſspunkt des Lotes von P auf die Äquatorebene ist, den Winkel φ durch $\varphi = \sphericalangle QOX$ erklären. Endlich soll $\vartheta = \sphericalangle POZ$ die Poldistanz und also das Komplement der geographischen Breite sein.

Jeder, der sich ein wenig mit Raumgeometrie beschäftigt hat, wird nun leicht die in Figur 105 gezeichneten Linien und die an dieselben anknüpfenden Betrachtungen verstehen. QR soll ein Lot auf OX sein, woraus $\overline{OR} = x$, $\overline{QR} = y$ folgt; auch $\sphericalangle PQO$ ist ein rechter Winkel, woraus man findet:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Ist u eine Funktion von x, y, z, so kann man dieselbe, indem man die vorstehenden drei Ausdrücke für x, y, z einträgt, als Funktion der Polarkoordinaten r, ϑ, φ darstellen. Es ist eine sehr nützliche Übung, die folgenden Relationen zu zeigen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\vartheta\sin\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}.$$

Ein weniger gewandter Leser hat kaum die Ausdauer, vielleicht rechnet er auch nicht ausreichend sorgfältig, um die nachfolgende Relation zu beweisen:

(A)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}.$$

Diese Relation hat eine sehr grofse praktische Bedeutung.

265. Als Grundlage für zahlreiche Anwendungen ist das richtige Verständnis der Gleichung:

(1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

erforderlich, wobei t die Zeit bedeuten soll. So z. B. ist die Gleichung (1) bei den Problemen der Wärmeleitung zu lösen, wo u die Temperatur darstellt. Andrerseits wird im Falle $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, d. h. für ein von t unabhängiges u, die Gleichung (1) durch das elektrische oder magnetische Potential u befriedigt, sowie auch durch das in der Hydrodynamik auftretende Geschwindigkeitspotential u.

In symbolischer Gestalt schreibt man die Gleichung (1) gewöhnlich:

(2)
$$\Delta u = \frac{1}{k}\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

sodafs Δu die in (1) links stehende Summe bezeichnet.

Die Gleichung (A) lehrt uns, welche Gestalt der Ausdruck Δu in Polarkoordinaten r, ϑ, φ annimmt.

Ist die z-Axe eine Symmetrieaxe für die Funktion u, d. h. ist u von φ unabhängig, so entspringt für Δu die Gestalt:

(3)
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}.$$

266. Der Leser wolle jeden einzelnen Schritt der folgenden längeren Entwicklung mit aller Sorgfalt durchdenken; je mehr Zeit er hierauf verwendet, um so besser. Die Entwicklung wird eine

Reihe wesentlicher Gesichtspunkte aus der Theorie der **Kugelfunktionen** geben, welche bei vielen Aufgaben der Wärmelehre, des Magnetismus, der Elektrizität, der Hydrodynamik und der Gravitation sehr wertvoll sind.

Ist u von φ unabhängig, so schreibt man die Gleichung (2) häufig in der Gestalt:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\right],$$

wo jetzt u nur noch eine Funktion von r, ϑ und der Zeit t ist. Der Leser wird die Richtigkeit dieser Relation am leichtesten von der Gleichung (3) aus beweisen.

Ist u auch noch von t unabhängig, so ist $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, und es folgt:

$$(2) \qquad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} = 0.$$

Man versuche diese Gleichung durch eine Funktion $u = RP$ zu lösen, wo R allein von r abhängt und P allein von ϑ. Man wird finden, daſs alsdann die Gleichung gilt:

$$(3) \qquad \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} = -\operatorname{cotg}\vartheta\frac{1}{P}\frac{dP}{d\vartheta} - \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\vartheta^2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält nur r und ist von ϑ unabhängig, die rechte enthält nur ϑ und ist von r frei. Die Folge ist, daſs die beiden Ausdrücke einer und derselben Konstanten gleich sein müssen. Nennen wir diese Konstante C, so gelten die beiden Gleichungen:

$$(4) \qquad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{RC}{r^2} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{d^2P}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{dP}{d\vartheta} + PC = 0.$$

Wir haben diesen Gleichungen nur die eine Beschränkung aufzuerlegen, daſs die Konstante C in beiden den gleichen Wert haben muſs; das Produkt zweier Lösungen P und R liefert alsdann eine Funktion u, welche die Gleichung (2) befriedigt. Auch bei anderen linearen partiellen Differentialgleichungen gewinnt man auf diese Art Lösungen in Gestalt von Produkten. Zwar kann man keineswegs jede Lösung auf diesem Wege gewinnen; immerhin aber leisten die fraglichen Lösungen für die Anwendungen gute Dienste.

Wir haben in der gekennzeichneten Art die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2) auf die Auflösung der beiden gewöhn-

lichen Differentialgleichungen (4) und (5) reduziert. Für die Gleichung (4) mögen wir eine erste Lösung versuchsweise in der Gestalt r^m ansetzen. Eine in Art. 268 zu entwickelnde Methode wird uns dann die allgemeine Lösung der Gleichung (4) in der Gestalt:

$$R = Ar^m + Br^{-(m+1)} \tag{6}$$

liefern, wo nunmehr m aus der Gleichung $m(m+1) = C$ zu bestimmen ist und A und B willkürliche Konstanten bedeuten. Ersetzen wir daraufhin C in Gleichung (5) durch $m(m+1)$ und schreiben ferner zur Abkürzung $\cos\vartheta = \mu$, so liefert Gleichung (5):

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right) + m(m+1)P = 0. \tag{7}$$

Wir sind hiermit zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt, welche als Legendre'sche Differentialgleichung bezeichnet wird.

Es erscheint nun zweckmäfsig, m einer Beschränkung zu unterwerfen; und zwar soll m fortan eine positive ganze Zahl bedeuten. Wir versuchen unter dieser Voraussetzung die Gleichung (7) durch eine Funktion P von folgender Gestalt zu befriedigen:

$$P = A_0 + A_1\mu + A_2\mu^2 + A_3\mu^3 + \cdots.$$

Schreibt man eine solche Funktion $P_m(\mu) = P_m(\cos\vartheta)$, so findet man in der That durch direkte Rechnung, dafs für $m = 0, 1, 2, 3, 4$ folgende Funktionen unsere Gleichung (7) befriedigen:

$$\begin{aligned}
P_0(\cos\vartheta) &= 1, \\
P_1(\cos\vartheta) &= \mu, \\
P_2(\cos\vartheta) &= \tfrac{3}{2}\mu^2 - \tfrac{1}{2}, \\
P_3(\cos\vartheta) &= \tfrac{5}{2}\mu^3 - \tfrac{3}{2}\mu, \\
P_4(\cos\vartheta) &= \tfrac{35}{8}\mu^4 - \tfrac{30}{8}\mu^2 + 3.
\end{aligned}$$

Es wird für den Leser eine sehr nützliche Übung sein, auch noch die weiter folgenden Funktionen etwa bis P_9 auszurechnen. Meine Schüler haben Tafeln der Werte von $P_0, P_1, \ldots, P_7$ für alle Grade von $\vartheta = 0^0$ bis $\vartheta = 180^0$ berechnet. Man vergl. die „*Proceedings of the Physical Society*“, London, vom 14. Nov. 1890, wo leichtfafsliche Vorschriften für den Gebrauch der Funktionen P bei Lösung praktischer Aufgaben entwickelt sind.

Wir haben nunmehr gefunden, dafs:

$$\left(Ar^m + \frac{B}{r^{m+1}}\right)P_m(\cos\vartheta) \tag{8}$$

eine Lösung der Gleichung (1) ist. Bei den Anwendungen hat man für gewöhnlich mit der Aufgabe zu thun, eine solche Lösung u der Differentialgleichung (1) bez. (2) anzugeben, die gewissen vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügt. Bei zahlreichen Problemen hat man Aggregate von Ausdrücken (8) mit verschiedenen Zahlen m zur Gewinnung der Lösungen herzustellen.

Die P_m heifsen, insofern sie ganze Funktionen von μ sind, auch wohl **„Legendre'sche Polynome"**; sie bilden nur einen Spezialfall der **„allgemeinen Kugelfunktionen"**, die Funktionen der *beiden* Polarkoordinaten ϑ und φ sind.

Im vorliegenden Buche ist es indessen wohl nicht angezeigt, die Theorie der Kugelfunktionen noch ausführlicher zu behandeln. Die gegebene Entwicklung betrachten wir vorwiegend als wertvolle Übung, um im Differenzieren gewandt zu werden.

267. Für viele Probleme, bei denen eine einzelne geradlinige Axe zu Grunde liegt, hat man eine Funktion u aufzusuchen, welche neben der Zeit t nur die Entfernung ϱ von der Axe enthält. Wählen wir als diese ausgezeichnete Axe die z-Axe des bisherigen Koordinatensystems, so wird $r \sin\vartheta = \varrho$ zu setzen sein, und die Differentialgleichung (1) Art. 266 rechnet sich um auf:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Wir suchen wie vorhin eine Lösung dieser Differentialgleichung in der Gestalt:

(2) $$u = RT$$

anzusetzen, wo R allein von ϱ abhängt und T allein von t. Die Gleichung (1) nimmt hierbei die Form an:

$$T\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}T\frac{dR}{d\varrho} = \frac{1}{k}R\frac{dT}{dt}.$$

Dividieren wir durch RT und wenden das oben schon ausgeübte Schlufsverfahren an, so folgt:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho R}\frac{dR}{d\varrho} = \frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = -\mu^2,$$

wo μ^2 eine Konstante bedeutet.

Hieraus folgt einerseits:

$$\frac{dT}{T} = -k\mu^2\,dt \quad \text{oder} \quad \log T = -k\mu^2 t + c,$$

wofür man auch schreiben kann:

(3) $$T = Ce^{-k\mu^2 t},$$

unter C eine willkürliche Konstante verstanden. Wir haben andrerseits die Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \mu^2 R = 0. \tag{4}$$

Setzen wir hier $\mu\varrho = x$ ein, so folgt:

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{x}^2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{R} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Dieser Gleichung versuchen wir jetzt vermöge einer Funktion von der folgenden Gestalt zu genügen:

$$R = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \cdots.$$

Dabei zeigt die Rechnung, dafs man die Koeffizienten $A, C, E, \ldots$ der Potenzen mit ungeraden Exponenten gleich Null zu setzen hat, und dafs in der That die Gleichung (5) durch die Reihe:

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}^2} + \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{2}^2\cdot\mathbf{4}^2} - \frac{\boldsymbol{x}^6}{\mathbf{2}^2\cdot\mathbf{4}^2\cdot\mathbf{6}^2} + \frac{\boldsymbol{x}^8}{\mathbf{2}^2\cdot\mathbf{4}^2\cdot\mathbf{6}^2\cdot\mathbf{8}^2} - \cdots \tag{6}$$

befriedigt wird.

Diese wichtige Reihe, welche bereits bei Fourier auftritt, liefert uns eine sogenannte **Bessel'sche Funktion**, und zwar diejenige, welche gewöhnlich mit $J_0(x)$ bezeichnet wird. Für niedere Werte von x sind Tafeln dieser Funktion berechnet. In $R = J_0(\mu\varrho)$ haben wir nun eine Lösung der Gleichung (4) und also in:

$$u = C\cdot e^{-k\mu^2 t} J_0(\mu\varrho) \tag{7}$$

eine solche der Gleichung (1). Bei den Anwendungen bedarf man gewöhnlich solcher Lösungen der Gleichung (1), welche additiv aus verschiedenen Gliedern der Gestalt (7) aufgebaut sind. Die dabei eintretenden Werte von μ und von C sind so zu bestimmen, dafs den jeweils vorliegenden Bedingungen genügt wird.

268. Es sei jetzt eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \tag{1}$$

gegeben, in welcher P und Q Funktionen von x allein darstellen. **Sind wir hier im Besitze einer partikulären Lösung**, die wir $y = v(x)$ schreiben, **so können wir auch die allgemeine Lösung angeben.**

Setzen wir nämlich $y = v\cdot u$, so kommt:

$$v\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2\frac{dv}{dx} + Pv\right)\frac{du}{dx} = 0. \tag{2}$$

Schreibt man zur Abkürzung $\frac{du}{dx} = u'$, so liefert Gleichung (2):

$$v \frac{du'}{dx} + \left(2 \frac{dv}{dx} + Pv\right) u' = 0$$

oder

$$\frac{du'}{u'} + 2 \frac{dv}{v} + P\,dx = 0.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\log u' + \log v^2 + \int P\,dx = \text{Const.}$$

Die Integration von $P\,dx$ liefere $\int P\,dx = X$; alsdann folgt:

$$u' = \frac{du}{dx} = A \frac{1}{v^2} e^{-X},$$

(3) $$u = B + A \int \frac{1}{v^2} e^{-X} dx.$$

Es ergiebt sich auf diese Art als allgemeine Lösung der Gleichung (1)

(4) $$y = Bv + Av \int \frac{1}{v^2} e^{-X} dx,$$

wo A und B willkürliche Konstanten sind.

Die Lösung der allgemeineren Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R,$$

wo R eine beliebige Funktion von x ist, während P und Q die schon in (1) auftretenden Funktionen sind, läſst sich, falls die allgemeine Lösung der Gleichung (1) bekannt ist, nach einer von Lagrange angegebenen Methode bewerkstelligen. Doch können wir hierauf nicht eingehen.

Einfaches Beispiel. Eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2x = 0 \quad \text{ist} \quad y = \cos ax.$$

Man bestimme die allgemeine Lösung.

Hier ist $P = 0$, sodaſs $\int P\,dx = X = 0$ zu setzen ist. Die gewünschte Lösung ist somit:

$$y = B \cos ax + A \cos ax \int \frac{dx}{\cos^2 ax};$$

und da

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tang} ax$$

gilt, so kleidet sich diese allgemeine Lösung in die Gestalt:

$$y = B \cos ax + C \sin ax.$$

Aufgabe 1. Wir finden durch direkte Rechnung, dafs $y = x^m$ eine Lösung der Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - m(m+1)\, y = 0$$

ist (vgl. Art. 266). Man zeige, dafs die allgemeine Lösung ist:

$$y = Ax^m + \frac{B}{x^{m+1}} \cdot$$

Aufgabe 2. Man findet durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dafs $y = e^{ax}$ eine Lösung von $\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 y$ ist. Man zeige, dafs die allgemeine Lösung dieser Gleichung die folgende ist:

$$y = Ae^{ax} + Be^{-ax}.$$

Aufgabe 3. Wir sahen in Art. 266, dafs $u = P_m(\mu)$ eine Lösung der dort angegebenen Legendre'schen Differentialgleichung ist. Man zeige, dafs die allgemeine Lösung

$$u = AP_m(\mu) + BQ_m(\mu)$$

ist, wo $Q_m(\mu)$ die folgende Bedeutung hat:

$$Q_m(\mu) = P_m(\mu) \int \frac{d\mu}{(1 - \mu^2)[P_m(\mu)]^2} \cdot$$

$Q_m(\mu) = Q_m(\cos \vartheta)$ wird als **Kugelfunktion zweiter Art** bezeichnet

Aufgabe 4. Wir fanden oben, dafs $J_0(x)$ eine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung (5) S. 397 ist. Man beweise, dafs sich die allgemeine Lösung in der Form $AJ_0(x) + BK_0(x)$ darstellt, wobei $K_0(x)$ so definiert ist:

$$K_0(x) = \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2} \cdot$$

$K_0(x)$ bezeichnet man als **Bessel'sche Funktion zweiter Art.**

269. Wärmeleitung. Längs der Geraden AB in der Figur 106 stehe senkrecht zur Papierebene eine Ebene. Der rechts von dieser Ebene gelegene Raum sei von einer homogenen Substanz erfüllt, in welcher wir die Bewegung der Wärme betrachten wollen. Dabei soll die Annahme gelten, dafs die Punkte jeder zur Ebene AB parallelen Ebene gleiche Temperatur haben. Letztere ist somit zu irgend einer Zeit t eine Funktion allein des Abstandes x der betreffenden Stelle von der Ebene AB; diese Funktion soll durch v bezeichnet werden. Da aber v neben x auch noch von der Zeit t abhängt, wird der Differentialquotient von v in Bezug

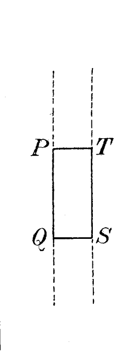


Fig. 106.

auf x durch $\frac{\partial v}{\partial x}$ zu bezeichnen sein. Beziehen sich v und $\frac{\partial v}{\partial x}$ auf die Ebene durch den Punkt P (siehe Fig. 106), so wird durch die Flächeneinheit dieser Ebene (Quadratcentimeter) in der Zeit dt die Wärmemenge $-k\frac{dv}{dx}dt$ in der Richtung wachsender Werte x hindurchfliefsen. Hierbei bedeutet k die als konstant angenommene Leitungsfähigkeit der Substanz; man kann k als die durch den Quadratcentimeter während der Zeiteinheit hindurchfliefsende Wärmemenge ansehen, falls der Temperaturabfall $-\frac{\partial v}{\partial x}$ konstant gleich 1 ist.

Wir denken uns nun über PQ senkrecht zur Papierebene eine Fläche vom Inhalt 1 errichtet und ein gleiches Flächenstück über TS in der nahe gelegenen Ebene mit dem Abstande $x + \varDelta x$ von der Ebene AB. Welches wird nun der Wärmeflufs gegen TS sein? Wir müssen $-k\frac{\partial v}{\partial x}dt$ als Funktion von x auffassen und nennen dieselbe für den Augenblick $f(x)$. Der zwischen beiden Flächenstücken gelegene Raum über $PTSQ$ erhält dann über PQ die Wärmemenge $f(x)$ in der Zeit dt und verliert über ST die Menge $f(x+\varDelta x)$. Ist $\varDelta x$ ausreichend klein, so dürfen wir:

$$f(x+\varDelta x) - f(x) = \varDelta x \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

schreiben, eine Gleichung, die für unendlich klein werdendes $\varDelta x$ genau zutrifft.

Wir schliefsen hieraus, dafs der **Zuwachs** an Wärmemenge im fraglichen Raumteile während der Zeit dt gleich ist mit:

$$-\varDelta x\frac{df(x)}{dx} = -\varDelta x\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial v}{\partial x}dt\right) = k\cdot\varDelta x\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dt.$$

Es ist nun das Volumen dieses Raumteiles gleich $\varDelta x$, und wenn wir mit w die konstante Dichtigkeit der Substanz bezeichnen, so ist $w\cdot\varDelta x$ die in jenem Bereiche enthaltene Masse. Es sei ferner s die spezifische Wärme der Substanz, d. h. die Wärmemenge, welche der Masseneinheit der Substanz zugeführt werden mufs, um eine Temperaturerhöhung von 1^0 Celsius zu erzielen. Die Temperaturzunahme dv wird alsdann durch die Wärmemenge $w\cdot\varDelta x\cdot s\cdot dv$ erzielt. Ist also dv die an der in Rede stehenden Stelle während der Zeit dt eintretende Erhöhung der Temperatur, so folgt:

$$k\cdot\varDelta x\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dt = w\cdot\varDelta x\cdot s\cdot dv.$$

Hieraus aber entspringt die Gleichung:

(1) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{ws}{k}\frac{\partial v}{\partial t}.$$



Dies ist die **fundamentale Differentialgleichung** der Wärmeleitung. Reichhaltige und vielseitige Entwicklungen bauen sich auf derselben auf. Übrigens kommen wir auf dem hier befolgten Wege auch zu den grundlegenden Differentialgleichungen der elektrischen Leitung und der Hydrodynamik.

Findet der Wärmeflufs nicht überall in der Richtung der x-Axe statt, so tritt an Stelle der Gleichung (1) die bereits in Art. 265 behandelte Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Hierbei ist $\frac{k}{ws}$, d. h. der Quotient aus der Leitungsfähigkeit k und der Wärmekapazität ws der Volumeneinheit, abgekürzt durch $\varkappa$ bezeichnet. Man nennt $\varkappa$ auch wohl die **Temperaturleitungsfähigkeit** der Substanz.

Wir schreiben daraufhin auch die Gleichung (1) kurz:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2}$$

270. Für diese Gleichung giebt es eine grofse Mannigfaltigkeit von Lösungen, von denen aber immer nur eine einem bestimmten Probleme Genüge leistet. Wir wollen z. B. die beschränkende Annahme machen, dafs die mittlere Temperatur an jeder Stelle des in Figur 106 eingegrenzten Raumes gleich 0 ist (es ist dabei gleichgültig, wo wir den Nullpunkt der Temperaturskala annehmen, da es sich bei unseren Betrachtungen nur um *Temperaturdifferenzen* handelt). Mit dieser Annahme in Übereinstimmung ist es, wenn wir ferner vorschreiben, dafs:

$$v = a \cdot \sin 2\pi n t = a \sin q t \tag{3}$$

als Gesetz der Temperaturänderung für diejenige Grenzebene des betrachteten Raumes gilt, für welche $x = 0$ ist. Dabei bedeutet n oder $\frac{q}{2\pi}$ die Anzahl der vollen periodischen Temperaturänderungen pro Sekunde.

Eine solche Randbedingung liegt z. B. beim Cylinder einer Dampfmaschine vor. Sorgfältige Beobachtungen über die **Temperaturschwankungen des Dampfes im schädlichen Raume eines Dampfcylinders** haben in der That das Ergebnis geliefert, dafs diese Schwankungen ausreichend genau einem einfachen harmonischen Gesetze folgen; wir wollen demnach dies Gesetz als Grundlage für unsere Betrachtungen nehmen. Man könnte zwar der Allgemeinheit wegen irgend ein *beliebiges* periodisches Gesetz annehmen; denn man kann

jeden verwickelteren periodischen Ausdruck stets in einfache harmonische Funktionen zerlegen und so auch jeden komplizierteren Fall auf Grund unserer Überlegungen leicht behandeln. Berücksichtigen wir aber, wie verwickelt überhaupt die Wärmevorgänge in einem Dampfcylinder sind, so erscheint diese Annahme einer einfachen harmonischen Temperaturänderung für die innere Wandfläche des Cylinders als eine annehmbare Grundlage unserer Betrachtungen.

Obwohl nun die wirkliche Änderung der Temperatur auf der Oberfläche des Metalles zweifellos kleiner ist, als die des Dampfes, so ist sie doch höchstwahrscheinlich der letzteren ungefähr proportional, sodafs wir a proportional der maximalen **Differenz der Dampftemperatur** setzen können.

Wir nehmen jetzt keine Rücksicht darauf, dafs das **Wasser im Cylinder**, an der Cylinderwandung und in den Höhlungen abwechselnd erhitzt und abgekühlt werden mufs. Diese Erwärmung und Abkühlung erfolgt mit einer aufserordentlichen Geschwindigkeit und stört daher unsere Betrachtungen nicht. Aufserdem ist man bemüht, den Dampf möglichst trocken zu halten und das gebildete Wasser möglichst schnell zu entfernen. Aber auch abgesehen von diesem Einflusse des Wassers erleichtert die Feuchtigkeitsschicht auf der Cylinderfläche durch ihr fortwährendes Verdampfen und Kondensieren das Ein- und Ausströmen der Wärme; damit nähern sich die Temperaturschwankungen im Metall denjenigen des Dampfes, wodurch a vergröfsert wird.

Unser n bedeutet die Zahl der Umdrehungen der Maschine pro Sekunde.

Wenn wir dieses Problem weiter verfolgen, so finden wir, dafs der Wert von v für jeden einzelnen Punkt und für die einzelnen Zeitmomente durch den Ausdruck (2) des Artikels 260 gegeben ist:

$$(4) \qquad v = a e^{-x\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}}} \sin\left(2\pi n t - x\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}}\right).$$

Diese Lösung gilt eigentlich nur für eine unbegrenzte Metallmasse mit einer ebenen Oberfläche; sie trifft aber näherungsweise zu für die Wandung eines dicken Cylinders, dessen Aufsenseite die Temperatur Null hat. Hat dagegen die Aufsenseite eine Temperatur v' und ist b die endliche Dicke des Metalles, so müssen wir zu dem Ausdruck (4) noch ein Glied $\frac{v'}{b}x$ addieren. Dies zeigt uns den Einflufs eines **Dampfmantels**, soweit die Wärme*leitung* in Frage kommt. Der Dampfmantel verringert aber aufserdem auch den Wert von a.

Wir wollen nun den Ausdruck (4) in der Form, wie wir ihn eben geschrieben haben, noch etwas eingehender diskutieren. An



irgend einem Punkte innerhalb der Wandung, in einer Tiefe x, erfolgt ein einfaches harmonisches Steigen und Fallen der Temperatur bei jeder Umdrehung der Maschine; aber die Schwankungen werden kleiner und kleiner, je tiefer wir in die Wandung eindringen; dabei bleibt zugleich die Phase der Temperaturschwankung gegenüber der an der Oberfläche immer mehr zurück.

Dies ist genau dieselbe Erscheinung, welche auch bei den im Craigleith-Steinbruch zu Edinburgh in die Erde eingegrabenen Thermometern beobachtet wurde. Die Temperaturschwankungen ergaben dabei erstens eine 24stündige und zweitens eine jährliche Periode. Die jährlichen periodischen Schwankungen als Mittelwerte aus einer 18jährigen Beobachtung sind in folgender Tabelle angegeben.

Tiefe der Thermometer unter Erdoberfläche in Metern.	Gröfste jährliche Temperatur-Differenz ° Celsius.	Tag der höchsten Temperatur.
0,915	8,95	14. August
1,825	6,83	26. August
3,65	4,7	17. Sept.
7,3	2,1	7. Nov.

Die Thermometer zu Calton Hill (Edinburgh) in 7,3 m Tiefe unter der Erdoberfläche zeigten ein Temperaturmaximum am 6. Januar.

Nun wollen wir unter Rückkehr zum voraufgehenden Beispiel aus (4) ermitteln, wie viel Wärme durch 1 qcm Fläche fliefst, d. h. wir wollen $-k\frac{dv}{dx}$ für jeden beliebigen Augenblick bestimmen. Wir setzen $\sqrt{\frac{\pi n}{\varkappa}} = \alpha$; dann wird:

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha a e^{-\alpha x}\sin(2\pi n t - \alpha x) - \alpha a e^{-\alpha x}\cos(2\pi n t - \alpha x).$$

Für $x = 0$, d. h. für die innere Oberfläche des Cylinders, ergiebt sich dann nach Multiplikation mit $-k$:

$$\left(-k\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = +k\alpha a\{\sin 2\pi n t + \cos 2\pi n t\}$$

oder

$$\left(-k\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = k\alpha a\sqrt{2}\,\sin\left(2\pi n t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Dieser Ausdruck ist positiv für eine halbe Umdrehung, während welcher Wärme in das Metall hineinfliefst, negativ für die folgende

halbe Umdrehung, wo die Wärme aus dem Metall herausströmt. Wir wollen nun untersuchen, **wie viel Wärme hineinfliefst**; die gesamte ausströmende Wärme hat natürlich denselben Wert.

Wir integrieren zu dem Zwecke den obigen Ausdruck für eine halbe Periode und erhalten, indem wir $\frac{1}{n} = \tau$ setzen:

$$k\alpha a\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\tau} \sin 2\pi n t \cdot dt = k\alpha a\sqrt{2}\cdot\frac{\tau}{\pi} = a\sqrt{\frac{2kws}{n\pi}}.$$

Das heifst: die fluktuierende Wärmemenge ist proportional der maximalen Temperaturdifferenz und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Tourenzahl.

Wir haben damit ein ziemlich einfaches, mathematisch formuliertes Resultat erhalten, und der Leser mag sich nun überlegen, wie es auf ein technisches Problem angewendet werden kann. Obwohl in Wirklichkeit die Vorgänge viel komplizierter sind, so liefert uns doch die Gleichung eine angenäherte Kenntnis derselben. Abgesehen davon, dafs sich der Verlust an latenter Dampfwärme durch einen Dampfmantel und die damit erreichte Trockenhaltung der Cylinderwandung herabdrücken läfst, erkennen wir, dafs der Verlust an Wärme durch Leitung proportional der Temperaturschwankung des Dampfes und der beim Abschlufs der Dampfeinströmung exponierten Cylinderoberfläche und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Tourenzahl ist.

Ein Mittel, welches wahrscheinlich mehr als jedes andere den Verlust verringern würde, besteht in der Vermengung des Dampfes mit etwas Luft oder Leuchtgas oder mit irgend einem anderen Gase welches weniger leicht kondensiert, wie der Wasserdampf.

Wenn wir nicht blofs das erste Glied der Fourier'schen Reihe benutzen, sondern mehrere derselben, so kommen wir zu dem Resultate, dafs die im Dampfcylinder bei einem Hube verlorene Wärmemenge gleich ist mit:

$$(T_1 - T_3)\left(b + \frac{c}{r}\right)\frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Dabei bedeutet T_1 die Anfangstemperatur des Frischdampfes, T_3 die Temperatur des Hinterdampfes, r den Füllungsgrad, n die Umdrehungszahl pro Minute und A die Kolbenfläche; b und c sind Konstanten, deren Wert für jede Dampfmaschinentype besonders bestimmt werden muss, und die aufserdem von den Vorkehrungen zur Trockenhaltung des Dampfes und zur Heizung des Mantels abhängen.

271. Es wird für den Lernenden zweckmäfsig sein, wenn er stets eine möglichst vollständige **Integraltabelle** zur Hand hat. Besonders nützlich würde es sein, wenn er sich für seinen eigenen Gebrauch eine derartige Tabelle selber anlegen würde; aber ich habe gefunden, dafs sie gewöhnlich verloren geht, wenn man sie nicht in ein Nachschlagebuch eingebunden hat. Wir drucken deswegen eine solche Tabelle hier ab. Wiederholungen waren dabei unvermeidlich.

Tabelle der wichtigsten Integrale.

1. $\int x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$.
2. $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \log x$.
3. $\int e^x \cdot dx = e^x$.
4. $\int a^x \cdot dx = \frac{1}{\log a} a^x$.
5. $\int \cos mx \cdot dx = \frac{1}{m} \sin mx$.
6. $\int \sin mx \cdot dx = -\frac{1}{m} \cos mx$.
7. $\int \operatorname{cotang} x \cdot dx = \log(\sin x)$.
8. $\int \operatorname{tang} x \cdot dx = -\log(\cos x)$.
9. $\int \operatorname{tang} x \cdot \sec x \cdot dx = \sec x$.
10. $\int \sec^2 x \cdot dx = \operatorname{tang} x$.
11. $\int \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx = -\operatorname{cotang} x$.
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tang} ax$.
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotang} ax$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$.
15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a}$.
16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a}$.
17. $\int \cosh ax \cdot dx = \frac{1}{a} \sinh ax$*).

*) In den Formeln 17 bis 23 haben wir die Bezeichnungen der sogenannten hyperbolischen Funktionen gebraucht:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

$$\operatorname{tangh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \qquad \operatorname{cotangh} x = \frac{1}{\operatorname{tangh} x}.$$

Analog setzen wir, falls $y = \sinh x$ ist, umgekehrt $x = \operatorname{arc\,sinh} y$.
Die folgenden Formeln wird man danach leicht beweisen:

18. $\int \sinh ax \cdot dx = \frac{1}{a} \cosh ax.$

19. $\int \operatorname{sech}^2 ax \cdot dx = \frac{1}{a} \operatorname{tangh} ax.$

$$\begin{aligned}
\sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b,\\
\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b,\\
\sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b,\\
\cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b,\\
\sinh 2a &= 2 \sinh a \cdot \cosh a,\\
\cosh 2a &= \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1,\\
&= 2\sinh^2 a + 1.
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, daſs die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ den Rechnungsregeln der reellen Zahlen folgt, wobei insbesondere $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ... zutrifft. Wir können alsdann eine „komplexe Zahl" $a + ib$ in die Gestalt setzen:

$$a + ib = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

wobei die Gleichungen gelten:

$$r^2 = a^2 + b^2, \qquad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{b}{a}.$$

Bei Gebrauch dieser Schreibweise ist es leicht, die n^{te} Wurzel aus der Zahl $a + ib$ zu ziehen. Wir finden nämlich:

$$\sqrt[n]{a+ib} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i \sin\frac{\vartheta}{n}\right),$$

können aber in dieser Formel noch ϑ um beliebige Vielfache von 2π vermehren. Hierbei entspringen im ganzen n verschiedene Werte der n^{ten} Wurzel aus $a + ib$ (cf. Art. 234).

Ferner bestehen die Formeln:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha, \qquad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \sin\alpha.$$

Ist

$$z = a + ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta},$$

so gilt für den natürlichen Logarithmus von z:

$$\log z = \log r + i\vartheta = \tfrac{1}{2}\log(a^2 + b^2) + i \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}.$$

Dieser Ausdruck ist unendlich vieldeutig, da der Wert $\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}$ um beliebige Vielfache von 2π vermehrt werden kann. Diese Vieldeutigkeit entspricht umgekehrt der Formel $e^{2k\pi i} = 1$, wo k eine beliebige ganze Zahl ist.

Die Beziehung zwischen den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen kleidet sich nun in die Gestalt:

$$\cosh x = \cos ix, \qquad \sinh x = -i \sin ix.$$

Man zeige, daſs, wenn man in:

$$u = \operatorname{arc\,sinh} x \qquad \text{oder} \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$$

20. $\int \operatorname{cosech}^2 ax \cdot dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cotangh} ax.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arc\,sinh} \frac{x}{a} = \log \{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arc\,cosh} \frac{x}{a} = \log \{x + \sqrt{x^2 - a^2}\}.$

23. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tangh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x}.$

24. $\int \frac{dx}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \log \frac{x - \alpha}{x - \beta}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \arcsin \frac{x - a}{a}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x - a}{x}.$

26. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$

27. $\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \log \{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}.$

---

für u positive Werte einsetzt, die Gleichung gilt:

$$e^u = x + \sqrt{1 + x^2},$$

und daſs dementsprechend zutrifft:

$$u = \operatorname{arc\,sinh} x = \log (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Analog gelten die Formeln:

$$\operatorname{arc\,cosh} x = \log (x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{arc\,tangh} x = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x},$$

$$\operatorname{arc\,sech} x = \log \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right),$$

$$\operatorname{arc\,cosech} x = \log \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right).$$

Man vergleiche noch die folgenden Formeln:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arc\,sinh} x = \log (x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,cosh} x = \log (x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{arc\,tangh} x = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}.$$

28. $\int \sqrt{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2} a^2 \log\left\{x+\sqrt{x^2-a^2}\right\}.$

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \text{ arc sin } \frac{a}{x} \text{ oder } = \frac{1}{a} \text{ arc cos } \frac{a}{x}.$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}.$

31. $\int \frac{1}{x} \sqrt{a^2 \pm x^2} \cdot dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \log \frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}.$

32. $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2-a^2} \cdot dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \text{ arc cos } \frac{a}{x}.$

33. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}.$

34. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}.$

35. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}.$

36. $\int x\sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2-x^2)^3}.$

37. $\int \sqrt{2ax-x^2} \cdot dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc sin } \frac{x-a}{a}.$

38. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

39. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

40. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx = \text{arc sin } x - \sqrt{1-x^2}.$

41. $\int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} \cdot dx = \sqrt{(x+a)(x+b)} + (a-b) \log\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right).$

42. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx.$

Wir unterscheiden bei diesem Integral drei Fälle:

1) Ist $\frac{p}{q}$ eine positive ganze Zahl, so entwickele man $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ binomisch, multipliziere mit $x^{m-1}dx$ und integriere gliedweise.

2) Man substituiere $a + bx^n = y^q$.

3) Falls die eben genannte Substitution auf unübersichtliche Rechnungen führt, so versuche man die Substitution $ax^{-n} + b = y^q$ anzuwenden; doch gelangt man auch dann nicht in jedem Falle zu einfachen Verhältnissen.

43. $\int \arcsin x \cdot dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

44. $\int x \log x \cdot dx = \frac{x^2}{2} (\log x - \frac{1}{2})$.

45. $\int x e^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} e^{ax} \left(x - \frac{1}{a}\right)$.

46. $\int x^n e^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \cdot dx$.

Man beachte genau dieses erste Beispiel einer Recursionsformel, welche dazu dient, den Exponenten n Schritt für Schritt zu reduzieren.

47. $\int \frac{e^{ax}}{x^m} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} dx$.

48. $\int e^{ax} \log x \cdot dx = \frac{1}{a} e^{ax} \log x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx$.

49. $\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \log \operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

50. $\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2}$.

51. $\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{a - b} \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\sqrt{a + b}}$, wo $a > b$,

$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b - a} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \sqrt{b + a}}{\sqrt{b - a} \operatorname{tang} \frac{x}{2} - \sqrt{b + a}}$, wo $a < b$.

52. $\int e^{cx} \sin ax \cdot dx = \frac{e^{cx}(c \sin ax - a \cos ax)}{a^2 + c^2}$.

53. $\int e^{cx} \cos ax \cdot dx = \frac{e^{cx}(c \cos ax + a \sin ax)}{a^2 + c^2}$.

54. $\int \sin^n x \cdot dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \cdot dx$.

55. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

56. $\int e^{ax} \sin^n x \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2} \sin^{n-1} x\,(a \sin x - n \cos x)$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax} \sin^{n-2} x \cdot dx.$$

57*). $\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$

58. $\int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$

59. $\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}.$

60. $\int \sin^2 nx \cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n}\sin 2nx.$

61. $\int \cos^2 nx \cdot dx = \frac{1}{4n}\sin 2nx + \frac{1}{2}x.$

62**). $\int\limits_0^{\pi \text{ oder } 2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx = 0.$

63. $\int\limits_0^{\pi \text{ oder } 2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx = 0.$

64. $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 nx \cdot dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^{\pi} \cos^2 nx \cdot dx = \frac{\pi}{2}.$

65. $\int\limits_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx = 0.$

66. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx = 0,$ falls $m-n$ gerade ist.

*) Bei Ausführung der Integrale 57 bis 61 hat man von folgenden Formeln Gebrauch zu machen:

$$2\sin mx \sin nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x,$$
$$2\cos mx \cos nx = \cos(m-n)x + \cos(m+n)x,$$
$$2\sin mx \cos nx = \sin(m+n)x + \sin(m-n)x,$$
$$\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1 = 1 - 2\sin^2 nx.$$

**) In den Formeln 62 bis 67 gelten m und n als von einander verschiedene ganze Zahlen.

67. $\int_0^\pi \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx = \frac{m}{m^2 - n^2}$, falls $m - n$ ungerade ist.

68. $\int \sin^m x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$.

69. $\int \cos^m x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}$.

Hiernach kann irgend eine ungerade Potenz von $\cos x$ oder eine ebensolche Potenz von $\sin x$ leicht integriert werden. Wir schreiben:

$$\cos^{2n+1} x = (1 - \sin^2 x)^n \cos x$$

bezw.

$$\sin^{2n+1} x = (1 - \cos^2 x)^n \sin x,$$

entwickeln binomisch und integrieren nach 68 resp. 69 gliedweise. Analog kann man $\sin^p x \cdot \cos^q x$ integrieren, falls entweder p oder q ungerade ist.

70. $\int x^m \sin x \cdot dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \cdot dx$.

71. $\int x^m \cos x \cdot dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x \cdot dx$.

72. $\int \frac{\sin x}{x^m} \cdot dx = -\frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{x^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{\cos x}{x^{m-1}} dx$.

73. $\int \frac{\cos x}{x^m} \cdot dx = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{x^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{\sin x}{x^{m-1}} dx$.

74. $\int \operatorname{tang}^n x \cdot dx = \frac{(\operatorname{tang} x)^{n-1}}{n-1} - \int (\operatorname{tang} x)^{n-2} \cdot dx$.

75. $\int x^n \arcsin x \cdot dx = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

76. $\int x^n \operatorname{arc\,tang} x \cdot dx = \frac{x^{n+1} \operatorname{arc\,tang} x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2}$.

77. $\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$, falls $4ac > b^2$,

$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, falls $4ac < b^2$,

$= -\frac{2}{2cx + b}$, falls $4ac = b^2$.

Ist $X = a + bx + cx^2$ und $q = 4ac - b^2$, so gilt:

78. $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2cx + b}{qX} + \frac{2c}{q} \int \frac{dx}{X}$.

79. $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2cx+b}{q}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3c}{qX}\right) + \frac{bc^2}{q^2}\int\frac{dx}{X}\cdot$

80. $\int \frac{x \cdot dx}{X^2} = -\frac{bx+2a}{qX} - \frac{b}{q}\int\frac{dx}{X}\cdot$

81. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}\cdot$

82. $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2a^2}\log\frac{X}{x^2} - \frac{1}{ax} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right)\int\frac{dx}{X}\cdot$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\cdot$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(\alpha-\beta x)}} = \frac{2}{\sqrt{b\beta}}\arcsin\sqrt{\frac{\beta(a+bx)}{a\beta+b\alpha}}\cdot$

85. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{an}\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{x^{\frac{n}{2}}}{a}\right)\cdot$

86. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = \frac{1}{an}\log\frac{\sqrt{a^2+x^n}-a}{\sqrt{a^2+x^n}+a}\cdot$

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(cx+\frac{b}{2}+\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\right)\cdot$

88. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\cdot$

89. $\frac{p+gx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ entwickelt man in die Summe:

$$\frac{g}{2c}\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{2pc-gb}{2c}\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

worauf die einzelnen Glieder leicht integriert werden können.

90. Irgend ein Integral von der Form:

$$\int\frac{P+Q(ax+b)^{\frac{p}{r}}}{R+S(ax+b)^{\frac{q}{r}}}dx,$$

wo P, Q, R, S ganze rationale Funktionen von x sind, kann durch Einführung der neuen Variabeln v vermöge der Subtitution $ax+b=v^r$ auf rationale Gestalt transformiert werden.

91. Irgend ein Integral von der Gestalt:

$$\int\frac{P+Q\sqrt{U}}{R+S\sqrt{U}}dx,$$

wo $U=a+bx+cx^2$ ist, kann durch Einführung einer neuen Varia-

Sachregister.